

# Modélisation 3D simplifiée d'une plaque sur sol multicouche élastique

F. CUIRA  
B. SIMON

TERRASOL  
72, avenue Pasteur  
93108 Montreuil Cedex  
f.cuira@terrasol.com

## Résumé

Cet article rend compte d'une méthode pour l'analyse de l'interaction sol-plaque (radier, dallage industriel...). Le calcul consiste à établir un couplage entre les éléments finis de plaque et les formules de Boussinesq et conduit à des résultats voisins de ceux obtenus par traitement complet en éléments finis 3D. Ladite méthode a fait l'objet d'un programme informatique, TASPLAQ, qui permet de traiter le tassement et les sollicitations pour des plaques d'inertie et de forme variables, reposant sur un massif de couches horizontales, sous différents types de chargement. Le modèle a été perfectionné par plusieurs fonctionnalités complémentaires : prise en compte du décollement de la plaque, simulation de la plastification du sol en surface ainsi que la possibilité d'introduire différentes conditions de symétrie.

*Mots-clés* : modélisation 3D, interaction sol-structure, radier, dallage industriel, éléments finis de plaque, formules de Boussinesq, TASPLAQ.

## Simple 3D-modelling of a plate lying on a set of elastic layers

## Abstract

This paper presents a calculation method for the analysis of soil-plate interaction (rafts, industrial pavements, etc.). This method consists in coupling plate finite elements with Boussinesq formulas, and leads to results that are very close to those reached with full 3D finite elements calculations. It was developed as a computer program called TASPLAQ, which enables to calculate settlements and bending moments for plates with various rigidities and shapes, and for various loading conditions. The plates are assumed to be laying on a set of horizontal elastic layers. The method was further improved with additional-options : possible separation of the plates from the soil, soil yielding under the plate edges and symmetries.

*Key words* : 3D-modelling, soil structure interaction, raft, industrial pavement, plate finite elements, Boussinesq formulas, TASPLAQ.

NDLR : Les discussions sur cet article sont acceptées jusqu'au 1<sup>er</sup> septembre 2009.

## Introduction

L'interaction sol-structure est un problème majeur qui a fait l'objet de nombreuses recherches et approches en France comme à l'étranger. Jusqu'à un passé récent, la méthode la plus courante consistait à considérer un appui continu élastique : les déplacements sont supposés proportionnels aux réactions et les calculs peuvent être menés soit à l'aide d'une formulation analytique, soit à l'aide de programmes informatiques. Cette approche constitue cependant une simplification radicale, car elle suppose qu'une charge ne provoque de tassements que dans sa zone d'application, ce qui n'est pas représentatif de la réalité. De plus, une telle approche ne permet pas de tenir compte de l'interaction entre deux structures voisines ou entre une structure et une charge extérieure s'appliquant directement au sol.

Une autre approche consiste à faire appel aux méthodes de calcul en éléments finis en trois dimensions : des méthodes qui, outre la multiplicité des paramètres, sont réputées complexes et lourdes, surtout pour des études préliminaires.

Cet article présente une approche intermédiaire permettant de répondre de manière satisfaisante à ce problème, dans un cadre dérivé de l'élasticité. Cette méthode repose sur les hypothèses suivantes (Fig. 1) :

- le sol considéré est assimilé à un massif multicouche élastique, infini dans les directions horizontales (Ox) et (Oy). Chaque couche est horizontale et caractérisée par son module d'Young et son coefficient de Poisson ;
- le sol supporte une plaque, d'inertie et de géométrie variables, représentative d'un radier ou d'un dallage, et à laquelle on peut appliquer un chargement réparti ou concentré ;
- en plus de la pression exercée par la plaque, le sol peut être soumis à l'application d'une charge extérieure directe, représentative par exemple d'un remblai, pouvant interagir avec le système « sol-structure ».

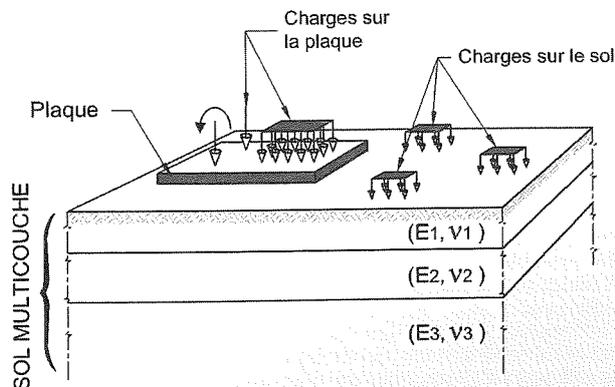


FIG. 1 Position du problème.  
Presentation of the problem.

La méthode proposée permet de déterminer en tout point, le tassement, la réaction du sol ainsi que les sollicitations induites dans la plaque.

## Notations

Dans toute la suite, les notations suivantes sont adoptées :

NOTATIONS	
$E$	: Module d'Young (kPa)
$\nu$	: Coefficient de Poisson
$w$	: Flèche de la plaque, comptée positivement vers le bas (m)
$M_x$	: Moment de flexion autour de l'axe (-Oy) (kN.m/ml)
$M_y$	: Moment de flexion autour de l'axe (Ox) (kN.m/ml)
$M_{xy}$	: Moment de torsion (kN.m/ml)
$T_x$	: Effort tranchant suivant l'axe (Ox) (kN/ml)
$T_y$	: Effort tranchant suivant l'axe (Oy) (kN/ml)
$n$	: Nombre total de nœuds activés du maillage éléments finis de la plaque
$\mathbf{K}^e$	: Matrice de rigidité de la plaque (3n x 3n)
$\mathbf{F}^e$	: Vecteur chargement équivalent résultant sur la plaque (3n)
$\mathbf{F}^{ext}$	: Vecteur chargement équivalent relatif aux efforts extérieurs (3n)
$\mathbf{R}^s$	: Vecteur chargement équivalent relatif à la réaction du sol (3n)
$\mathbf{a}^e$	: Vecteur déplacement généralisé de la plaque (3n)
$\mathbf{T}_{inf}$	: Matrice de souplesse (ou d'influence) du sol (n x n)
$\mathbf{S}$	: Vecteur tassement résultant du sol
$\mathbf{P}^s$	: Vecteur réaction du sol (n)
$\mathbf{s}^{ext}$	: Vecteur tassement représentant la part du tassement résultant des charges extérieures s'appliquant directement au sol (n)
$\mathbf{T}^s$	: Matrice de passage permettant d'exprimer $\mathbf{R}^s$ en fonction de $\mathbf{P}^s$ (3n x n)
$\mathbf{G}$	: Matrice de passage permettant d'exprimer $\mathbf{S}$ en fonction de $\mathbf{a}^e$ (n x 3n)

## Référence à quelques méthodes existantes

Plusieurs méthodes de calcul des radiers ou dallages ont été proposées pour offrir des approches intermédiaires entre la méthode « aux coefficients de réaction » et les éléments finis 3D permettant d'aborder ces problèmes d'interaction sol-structure ; toutes reposant sur des hypothèses plus ou moins simplificatrices.

P. Vezole (1986) a abordé ce problème dans un cadre bidimensionnel (problème plan ou à symétrie de révolution), en proposant une approche consistant à discrétiser la structure étudiée (radier, semelle ou dallage...) en plusieurs tronçons et à combiner cette discrétisation avec les formules usuelles relatives au calcul des tassements d'un massif élastique semi-infini. L'auteur a appliqué cette approche à quelques cas courants pour mettre en lumière les simplifications implicitement introduites par la méthode « aux coefficients de réaction ».

Dans la même optique, M. Cassan *et al.* (1991) ont mis au point une approche simplifiée pour l'étude de l'interaction sol - radier, dont le principe est proche de celui de la méthode objet de cet article. Leur approche est basée, pour l'équilibre du radier, sur l'intégration numérique de l'équation de Lagrange. Pour le sol support, elle consiste à faire appel à la distribution de contraintes de Boussinesq, supposée applicable même en présence d'un substratum. Il a été vérifié, sur des cas simples, que cette approche conduit à des résultats très voisins de ceux obtenus par traitement complet en éléments finis.

Pour le cas des dallages, le DTU 13.3 fournit une méthode simplifiée, basée sur la combinaison des formules de Boussinesq et de celles relatives à une plaque infinie sur ressorts juxtaposés. Cette méthode permet de calculer les déformations et les sollicitations dans le corps du dallage dues à différents types de chargement.

Ces trois approches ont deux facteurs en commun qu'il convient de souligner : l'utilisation des formules de Boussinesq pour le calcul des tassements et l'adoption du modèle simplifié des plaques (ou poutres) minces pour calculer l'équilibre de la fondation.

On peut également citer la méthode couramment utilisée pour le dimensionnement des chaussées, qui consiste à assimiler l'ensemble « chaussée + sol » à un multicouche élastique, en résolvant rigoureusement le problème de Burmister (1943). Cette méthode puissante, ne permet cependant pas de prendre en compte les efforts de bord puisque l'élément de fondation est supposé infini en plan. Également, sa résolution numérique qui n'est actuellement réalisée qu'en coordonnées cylindriques, ne s'applique qu'à des charges circulaires ; le cas des charges rectangulaires est traité en considérant un ou plusieurs disques d'emprise équivalente.

## 4

### Notions théoriques préliminaires

#### 4.1

#### Modélisation d'une plaque en flexion pure

La plaque est supposée localement homogène isotrope, de comportement élastique linéaire. On se limite au cas des plaques travaillant en flexion pure, et dont l'épaisseur est faible devant les autres dimensions, ce qui permet d'adopter la théorie classique des plaques minces et plus exactement « le modèle discret de Kirchhoff », où seules les déformations dues à la flexion sont prises en compte : la contribution des déformations de cisaillement est donc négligée.

Dans le cadre de ce modèle, deux systèmes d'équations régissent le comportement et l'équilibre de la plaque :

$$\begin{cases} T_x + \left( \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) = 0 \\ T_y + \left( \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) = 0 \\ q + \left( \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} \right) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

- équations d'équilibre

$$\begin{cases} M_x = \frac{EI}{(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y = \frac{EI}{(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ M_{xy} = \frac{2EI}{(1-\nu^2)} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial xy} \right) \end{cases} \quad (2)$$

- loi de comportement

où  $q$  désigne la densité de charge appliquée localement à la plaque ;  $EI$ , le produit d'inertie (on rappelle que  $EI = \frac{Eh^3}{12}$ ,  $E$  étant le module d'Young de la plaque et  $h$  son épaisseur) ;  $\nu$ , le coefficient de Poisson.

La combinaison des équations (1) et (2) conduit à l'équation (3), dite de Lagrange :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \frac{(1-\nu^2)}{EI} \quad (3)$$

La résolution de cette équation peut être menée à l'aide d'une formulation en éléments finis. On a choisi un modèle de type « déplacements » avec des éléments rectangulaires à quatre nœuds et douze degrés de liberté (Zienkiewicz et Taylor, 1991) : chaque nœud possède ainsi trois degrés de liberté, une translation et deux rotations, sachant que ces rotations ne sont autres que les premières dérivées partielles de la flèche (approximation de Kirchhoff).

Ce modèle, simple à mettre en œuvre, converge par ailleurs de manière sûre et rapide.

## 4.2

### Modélisation du sol : formules de Boussinesq

#### 4.2.1

#### A propos des formules de Boussinesq

Le sol est assimilé à un massif multicouche élastique. Certes, tous les géotechniciens savent bien que le sol n'est pas un matériau élastique, mais Terzaghi, lui-même, admettait que lorsque les contraintes sont inférieures au tiers des valeurs limites, on peut considérer avec une approximation suffisante que le sol a un comportement élastique.

Le comportement élastique du sol étant admis, on se propose d'utiliser les formules de Boussinesq pour le calcul des tassements en surface. Ces formules qui ont été établies pour le cas d'un massif homogène semi-infini, peuvent être étendues au cas d'un multicouche en admettant que les distributions de contraintes sont identiques dans les deux cas. Burland *et al.* (1977) ont discuté de manière approfondie les conditions de cette simplification ; ils ont conclu que celle-ci était effectivement acceptable dans la majorité des situations couramment rencontrées par l'ingénieur. Une exception

notable est le cas d'une couche raide surmontant des couches plus déformables.

4.2.2

Calcul des tassements

Le calcul des tassements est fondé principalement sur la formule de Steinbrenner qui découle des formules de Boussinesq (Terzaghi, 1943). Cette formule permet d'exprimer le tassement, dû à une couche située entre les profondeurs D1 et D2 (Fig. 2), sous le coin d'une charge rectangulaire uniforme q :

$$\rho_{D1-D2} = \frac{qB}{E} \left( (1-\nu^2)(F_1(d_2) - F_1(d_1)) + (1-\nu-2\nu^2)(F_2(d_2) - F_2(d_1)) \right) \quad (4)$$

avec :

$$\begin{cases} F_1(d) = \frac{1}{\pi} \left( \ln \left( \frac{(1+\sqrt{1+d^2})\sqrt{1+d^2}}{1+\sqrt{1+d^2+l^2}} \right) + \ln \left( \frac{(1+\sqrt{1+d^2})\sqrt{1+d^2}}{(1+\sqrt{1+d^2+l^2})} \right) \right) \\ F_2(d) = \frac{d}{2\pi} \arctan \left( \frac{1}{d\sqrt{1+d^2+l^2}} \right) \end{cases} \quad d = \frac{D}{B} \text{ et } l = \frac{L}{B} \quad (5)$$

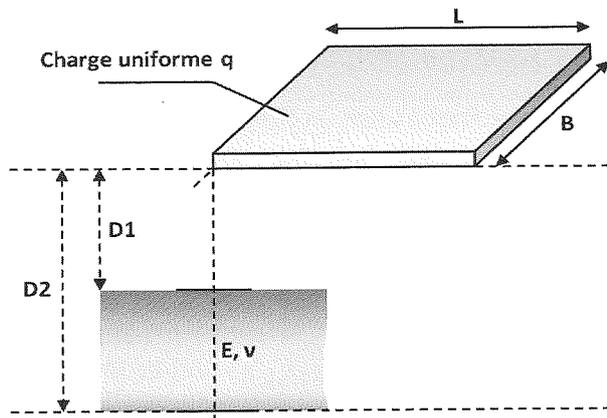


FIG. 2 Application de la formule de Steinbrenner. Application of the Steinbrenner's formula.

Ainsi, par addition des tassements produits dans chaque couche, l'application de cette formule, combinée avec la méthode de superposition algébrique, permet d'évaluer le tassement induit par une ou plusieurs charges rectangulaires, en tout point de surface d'un multicouche élastique.

5

Principes théoriques de la méthode

La plaque est discrétisée en éléments finis rectangulaires. Si l'on admet que la réaction du sol est uniformément répartie autour de chaque nœud, on peut alors exprimer les tassements aux nœuds en fonction de la réaction du sol à l'aide d'une « matrice de souplesse » dont le calcul peut être conduit sur la base des caractéristiques de chaque couche à l'aide des formules de Boussinesq. La formulation finale du problème est obtenue ensuite en écrivant l'égalité, en chaque nœud, entre le tassement du sol et le déplacement vertical de la plaque.

5.1

Modélisation de la plaque

La discrétisation de la plaque est réalisée à l'aide d'un maillage dont le « pas » peut varier dans les deux directions (Fig. 3). Les éléments utilisés sont les éléments rectangulaires de Kirchhoff présentés précédemment. Chaque élément est caractérisé par son module d'Young E, son épaisseur h et son coefficient de Poisson nu. Il convient de noter que le choix du coefficient de Poisson influe de façon notable sur les moments calculés dans la plaque. En particulier, si on choisit nu = 0, alors le moment dans chaque direction est proportionnel à la courbure associée, ce qui n'est pas le cas si nu ≠ 0. Dans le cas d'une plaque en béton, il est d'usage de prendre nu = 0,2 si le béton est non armé et nu = 0 dans le cas d'un béton armé.

Le chargement extérieur appliqué à la plaque est introduit à l'aide de charges réparties associées à chaque élément, et de charges ponctuelles (effort vertical + deux moments fléchissants) associées à chaque nœud du maillage.

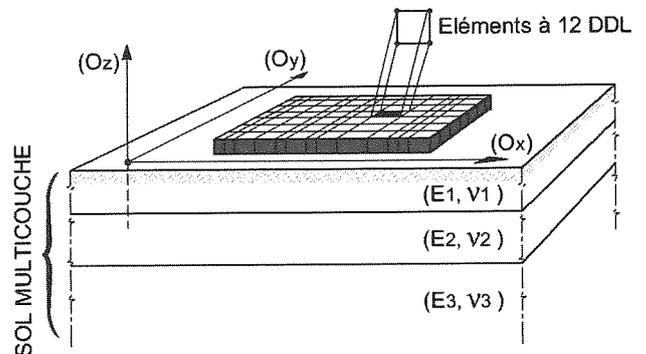


FIG. 3 Modélisation de la plaque en éléments finis. Modelling of the plate by the finite element method.

Par ailleurs, une technique de « désactivation des éléments » permet de modéliser une plaque de forme polygonale, l'existence de trous intérieurs, ou encore le cas de plusieurs plaques désolidarisées (Fig. 4).

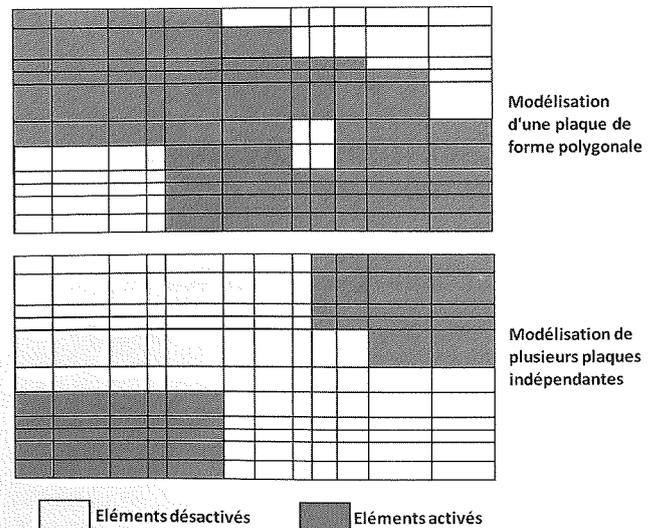


FIG. 4 Modélisation d'une forme polygonale, modélisation de plusieurs plaques. Modelling of a polygonal shape, modelling of several plates.

Pour tout ce qui suit, on désigne par « n » le nombre total des nœuds (activés) du maillage. A l'aide de ce maillage, l'équation d'équilibre de la plaque se traduit par un système linéaire (6) :

$$\underline{\mathbf{K}}^e \cdot \mathbf{a}^e = \mathbf{F}^e \quad (6)$$

où  $\underline{\mathbf{K}}^e$  est la matrice de rigidité de la plaque ( $3n \times 3n$ ), constituée par assemblage des matrices de rigidité associées à chaque élément du maillage ;  $\mathbf{F}^e$ , le vecteur chargement équivalent de la plaque ( $3n$ ), constitué par assemblage des « vecteurs chargement » élémentaires ;  $\mathbf{a}^e$ , le vecteur déplacement équivalent de la plaque ( $3n$ ), constitué par le déplacement et les rotations en chaque nœud.

En examinant les efforts équilibrant la plaque (Fig. 5), on peut décomposer le vecteur chargement en deux parties : un vecteur chargement relatif aux efforts extérieurs  $\mathbf{F}^{ext}$ , et un vecteur chargement relatif à la réaction du sol  $\mathbf{R}^s$  :

$$\underline{\mathbf{K}}^e \cdot \mathbf{a}^e = \mathbf{F}^{ext} - \mathbf{R}^s \quad (7)$$

Le premier vecteur est calculé directement à l'aide des charges appliquées sur la plaque. Le deuxième fait intervenir la rigidité du sol.

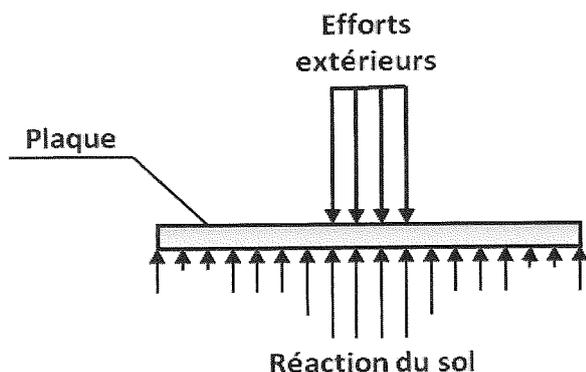


FIG. 5 Équilibre de la plaque.  
Equilibrium of the plate.

## 5.2

### Modélisation de l'interaction sol-plaque

On se place dans l'hypothèse d'un contact sans frottement : seules les réactions normales à la plaque sont prises en compte. On néglige ainsi les efforts de cisaillement à l'interface sol-plaque.

Par le principe d'action-réaction, la réaction du sol n'est autre que la pression exercée par la plaque sur celui-ci. L'idée de base consiste à supposer que cette pression est uniforme *autour* de chaque nœud : plus exactement, elle est uniforme sur un rectangle délimité par les centres des éléments connectés à ce nœud. Il faut bien sûr tenir compte du cas particulier d'un nœud situé sur le bord, d'un nœud situé en un coin sortant ou rentrant. Pour une plaque de forme polygonale, la distribution des pressions d'interaction a la forme schématisée sur la figure 6.

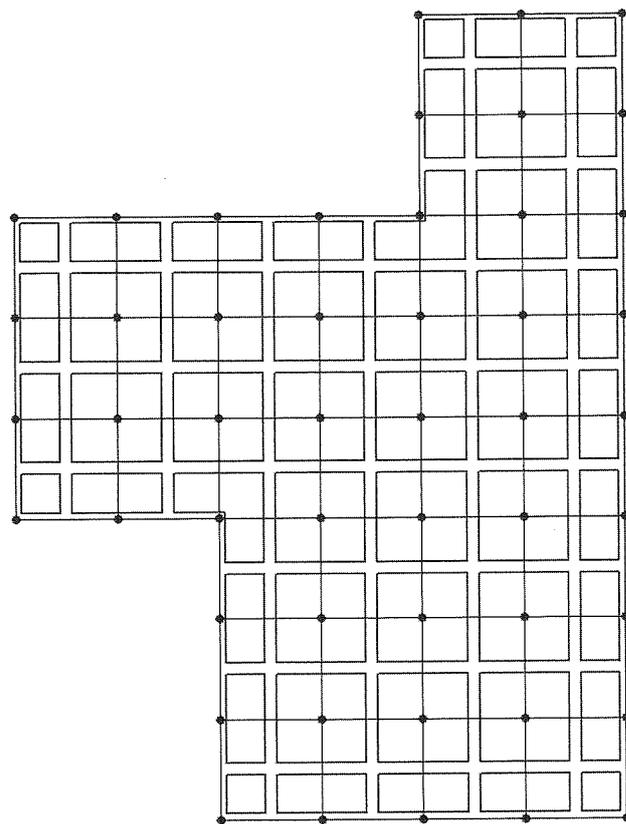


FIG. 6 Distribution de la réaction du sol sous les éléments de plaque.  
Distribution of soil reactions under plate elements.

## 5.3

### Modélisation du sol support

Le sol est assimilé à un massif multicouche élastique. Chaque couche est caractérisée par son module d'Young, son épaisseur et son coefficient de Poisson. L'influence de ce dernier est généralement faible, et il est d'usage de prendre une valeur comprise entre 0,25 et 0,35. Le module d'Young est souvent estimé en référence aux résultats des essais pressiométriques, en adoptant une valeur égale à  $k \frac{E_M}{\alpha}$ ,  $E_M$  étant le module pressiométrique ;  $\alpha$ , le coefficient rhéologique, et  $k$  un facteur majorant, pouvant varier entre 1 et 4, et qui dépend à la fois du type de sol, de la dimension de la fondation ainsi que du niveau de déformation atteint. O. Combarieu (2006) a discuté de manière approfondie du choix de la valeur de  $k$  ; il a notamment montré qu'un calcul élastique mené, comme il est souvent constaté, en adoptant le choix de la valeur  $k = 1$ , peut conduire à des tassements pessimistes.

A l'aide du maillage associé à la plaque, on définit une « matrice de souplesse » du sol notée  $\underline{\mathbf{T}}_{inf}$  ( $n \times n$ ), qui permet de relier linéairement les pressions exercées sur le sol aux tassements induits par celles-ci (8) ; de telle sorte que le coefficient «  $\alpha_{ij}$  » est calculé en examinant le tassement induit au nœud « i » par une pression unitaire appliquée autour du nœud « j ». Le calcul est conduit à l'aide de la méthode présentée en 4.2.

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \alpha_{n1} & \dots & & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} \quad (8)$$

Tassements                      Matrice de souplesse                      Pressions d'interaction

$\underline{S}$                                        $\underline{T}_{inf}$                                        $\underline{P}^s$

Bien noter que cette matrice n'est pas symétrique, autrement dit, on a dans le cas général :  $\alpha_{ij} \neq \alpha_{ji}$ .

Par ailleurs, le tassement du sol en surface résulte à la fois de la pression exercée par la plaque et des charges extérieures s'appliquant directement au sol (Fig. 1). On écrit donc :

$$\underline{S} = \underline{T}_{inf} \underline{P}^s + \underline{s}^{ext}, \quad \underline{P}^s = (\underline{T}_{inf})^{-1} \cdot (\underline{S} - \underline{s}^{ext}) \quad (9)$$

où  $\underline{s}^{ext}$  désigne la part du tassement générée par ces charges extérieures.

## 5.4

### Formulation du problème et résultats

On reprend à présent l'équation d'équilibre de la plaque :  $\underline{K}^e \cdot \underline{a}^e = \underline{F}^{ext} - \underline{R}^s$ . Le terme  $\underline{R}^s$  s'exprime linéairement en fonction de la réaction du sol  $\underline{P}^s$ . Ensuite, à l'aide de la matrice de souplesse, on exprime la réaction du sol en fonction du tassement (9). Enfin, la formulation finale du problème s'obtient en écrivant l'égalité, en chaque nœud, entre le tassement du sol et le déplacement vertical de la plaque :

$$(\underline{K}^e + \underline{T}^s \cdot (\underline{T}_{inf})^{-1} \cdot \underline{G}) \cdot \underline{a}^e = \underline{F}^{ext} + \underline{T}^s \cdot (\underline{T}_{inf})^{-1} \cdot \underline{s}^{ext} \quad (10)$$

où  $\underline{T}^s$  est la matrice de passage qui permet d'exprimer  $\underline{R}^s$  en fonction de  $\underline{P}^s$ ;  $\underline{G}$ , la matrice qui permet de passer de  $\underline{S}$  à  $\underline{a}^e$  grâce à l'égalité en chaque nœud entre le tassement et le déplacement vertical de la plaque.

La résolution de ce système permet d'évaluer le vecteur déplacement généralisé  $\underline{a}^e$ , et donc les variables nodales associées à chaque élément du maillage. Cela permet de calculer :

- la flèche  $w$  de la plaque en tout point de chaque élément ;
- la réaction du sol en tout point à l'aide de (9) ;
- le tassement du sol en tout point (y compris au droit des parties désactivées) ;
- les moments fléchissants dans la plaque, que l'on peut évaluer à partir de la flèche de la plaque définie dans chaque élément à l'aide de (2). Notons que les moments sont calculés uniquement à l'intérieur de chaque élément (en quatre points dits « points d'intégration ») du fait du caractère « non conforme » des éléments utilisés, qui n'assure pas la continuité des efforts lors du passage d'un élément à un autre.

## 5.5

### Traitement de certains cas particuliers

#### 5.5.1

#### Décollement de la plaque

Le calcul précédent est valable dans l'hypothèse où la plaque demeure en contact avec le sol. Le sol ne pouvant générer des efforts de traction, l'obtention de

réactions négatives nécessite de considérer les nœuds correspondants comme « décollés ». Ceci est réalisé à l'aide d'un calcul itératif automatique moyennant un critère de décollement : un seuil de traction au-delà duquel on considère qu'il n'y a plus de liaison entre la plaque et le sol en surface. Ainsi, pour les nœuds considérés comme « décollés » :

- le déplacement de la plaque n'est plus égal au tassement du sol ;
- la réaction du sol au droit de ces nœuds est nulle.

Un retraitement adapté de la matrice de souplesse (8) permet de tenir compte de ces nouvelles conditions.

## 5.5.2

#### Limitation de la réaction du sol

Dans certains calculs élastiques, on aboutit souvent à un pic de réaction au bord de la plaque (exemple d'une semelle chargée uniformément). Dans la discrétisation de plaque adoptée, ce pic de réaction est d'autant plus important que la largeur des éléments placés au bord est réduite. Pour un sol réel, il y a limitation de ce pic par déformation plastique.

Cette limitation peut être contournée (mais seulement partiellement) en contrôlant la taille des éléments placés au bord pour créer les conditions d'une diffusion de ce pic de réaction. Une autre manière plus élaborée consiste à simuler la plastification du sol à l'interface sol-plaque en menant un calcul itératif automatique, tel qu'au droit des nœuds considérés comme « plastifiés », la réaction du sol est imposée égale à un seuil de plastification prédéfini, tandis que pour les zones non plastifiées, l'expression élastique des tassements est conservée. On s'assure enfin que la répartition des réactions obtenues respecte bien l'équilibre statique de la plaque.

## 5.5.3

#### Prise en compte d'une contrainte initiale dans le sol

Il s'agit de traiter le cas où une contrainte initiale (ou une contrainte « avant travaux ») existe dans le sol, par exemple le cas d'un radier fondé au fond d'une excavation. L'hypothèse adoptée consiste à ne transmettre au sol que la fraction de la charge qui excède le poids des terres initial. Ceci peut être pris en compte en adaptant la relation (9) :

$$\underline{S} = \underline{T}_{inf} (\underline{P}^s - \underline{\sigma}_v^0) + \underline{s}^{ext} \quad (11)$$

où  $\underline{\sigma}_v^0$  est le vecteur des contraintes verticales initiales.

## 6

### Mise en œuvre de la méthode

La méthode présentée a fait l'objet d'un programme informatique, nommé TASPLAQ, qui a la capacité de traiter :

- le cas d'une plaque de géométrie et d'inertie variables, soumise à un chargement qui peut être réparti (charges verticales) ou ponctuel (efforts verticaux et moments) ;
- le cas d'un sol support défini comme un massif multicouche élastique, qui peut être soumis, en plus de la pression exercée par la plaque, à des charges extérieures directes ;

– la gestion automatique du décollement de la plaque ainsi que de la limitation locale des pressions d'interaction.

Le programme permet également d'introduire des ressorts élastiques sous la plaque, avec des raideurs en rotation ou en translation, ponctuelles ou réparties.

Par ailleurs, afin de permettre le traitement de certains cas particuliers, le programme a été adapté pour tenir compte de différents cas de symétrie : symétrie par rapport à un ou deux plans, symétrie par rapport à un axe, ou encore le cas des déformations planes. Dans chaque cas, la condition de symétrie est supposée valable pour la plaque, pour le sol, ainsi que pour le chargement.

La symétrie par rapport à un axe correspond au cas d'une plaque circulaire soumise à un chargement à symétrie de révolution. Le traitement d'un tel cas nécessite d'adopter des modèles particuliers : pour la plaque, on adopte le modèle de Kirchhoff avec des éléments annulaires à deux nœuds et quatre degrés de liberté ; pour le sol, une intégration numérique des formules de Boussinesq est réalisée pour le calcul du tassement d'une charge annulaire uniformément répartie.

Le cas des déformations planes correspond à la situation où la flexion de la plaque peut être négligée dans une direction. Dans ce cas, on utilise pour la fondation des éléments finis de poutre, tandis que pour le sol, il suffit d'adopter les formules de Boussinesq utilisées pour le cas d'un plan semi infini (problème de Flamant).

## 7

### Quelques exemples

L'objet de cette partie est d'illustrer la mise en pratique de la méthode TASPLAQ à travers quatre exemples retenus volontairement schématiques et simples : le cas d'une dalle sous chargement ponctuel, celui d'un dallage avec différents systèmes de joints, celui d'une semelle chargée localement, ou encore le cas de l'interaction entre un radier et un remblai.

#### 7.1

### Exemple 1 : dalle rectangulaire sous charges concentrées voisines

Une dalle rectangulaire de 20 m de côté est soumise à l'application de deux charges voisines de 500 kN chacune. Les données du problème sont détaillées sur la figure 7. La dalle a été discrétisée à l'aide du maillage représenté sur la figure 8, qui a été raffiné autour des deux points d'application des charges. Ces deux charges ont été introduites dans TASPLAQ comme des charges ponctuelles verticales. On ne tient pas compte du poids propre de la dalle dans cet exemple.

Le calcul permet de déterminer en tout point, le tassement, la réaction du sol, ainsi que les moments fléchissants. Ces résultats peuvent être présentés graphiquement d'une manière surfacique en 3D ou en faisant des coupes suivant des axes particuliers.

Les figures 9 et 10 illustrent les résultats obtenus au droit de l'axe (AX) représenté sur la figure 8. La courbe de tassements révèle deux « pics » proches des points

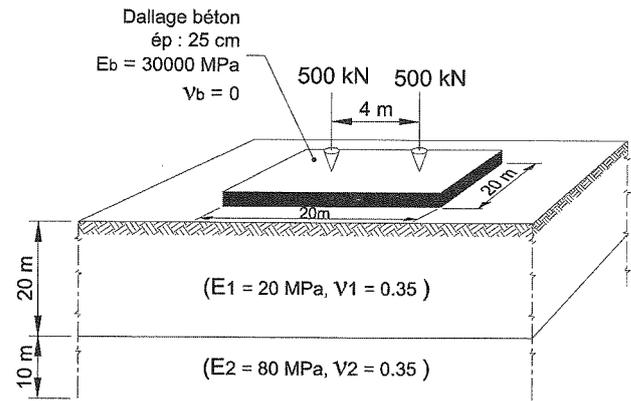


FIG. 7 Exemple 1 : données du problème.  
General data for the example 1.

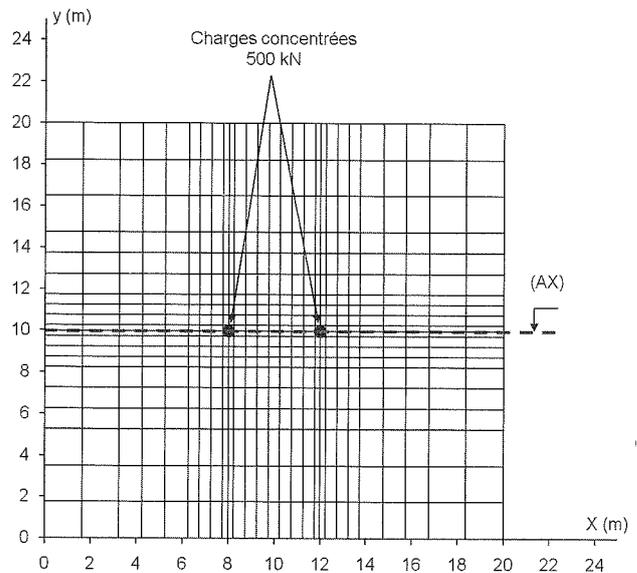


FIG. 8 Exemple 1 : maillage utilisé.  
Mesh considered for the example 1.

d'application des charges. On retrouve le caractère « en escalier » de la réaction du sol (uniforme autour de chaque nœud). La réaction maximale est de 45 kPa pour un tassement de l'ordre de 6,6 mm.

Au niveau des sollicitations, il est à noter que le cas d'un chargement ponctuel demeure purement théorique ; il conduit en toute rigueur à des valeurs infinies de moment aux points d'application des charges. Dans le cas présent, le maillage de la plaque introduit une diffusion implicite des deux efforts qui explique les valeurs obtenues.

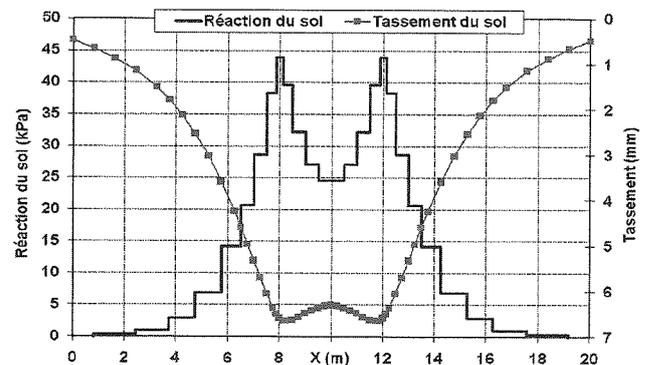


FIG. 9 Exemple 1 : tassements et réaction du sol (coupe AX).  
Example 1 : settlements and soil reaction (AX cross section).

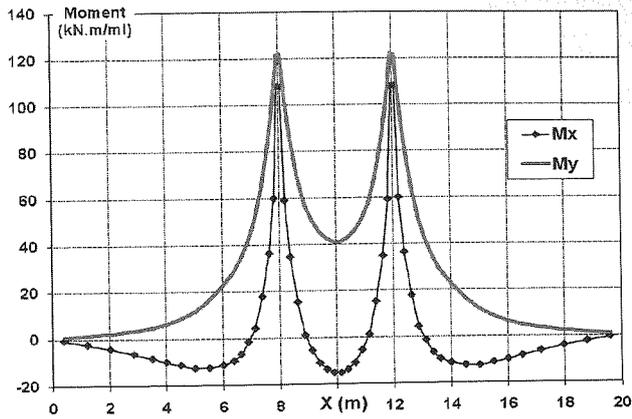


FIG. 10 Exemple 1 : moments fléchissants (coupe AX).  
Example 1 : bending moments (AX cross section).

7.2

### Exemple 2 : dallage rectangulaire avec différents systèmes de joints

Un dallage rectangulaire de 16 m × 10 m est soumis, en plus de son poids propre, à une charge de 50 kPa répartie sur 10 m × 5 m en son centre. L'objet de cet exemple est d'illustrer l'aptitude de la méthode à traiter également le cas des dallages avec différents systèmes de joints. Trois situations ont été étudiées : le cas d'un dallage continu (sans joints), le cas des joints partiels et le cas des joints francs. Les figures 11 et 12 détaillent les données du problème.

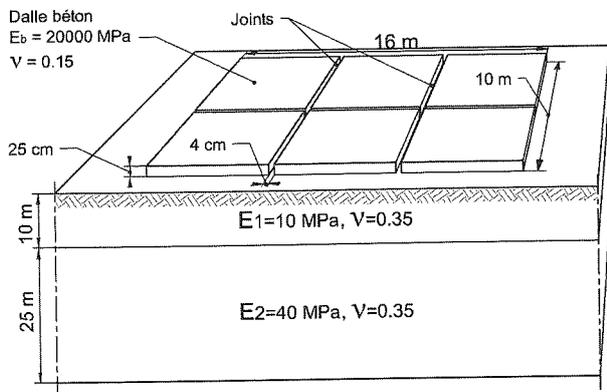


FIG. 11 Exemple 2 : données du problème.  
General data for the example 2.

Le dallage a été discrétisé selon le maillage représenté sur la figure 13. Des éléments intermédiaires y ont été introduits permettant de simuler la présence éventuelle des joints : dans le cas d'un dallage continu, on affecte à ces éléments les mêmes caractéristiques mécaniques que celles du corps de dallage ; dans le cas d'un dallage avec joints partiels, on a supposé que le dallage a été scié sur 4/5 de son épaisseur (Fig. 12), ce qui revient à affecter à ces éléments une épaisseur réduite égale à 5 cm ; enfin, dans le cas d'un dallage avec joints francs, ces éléments sont tout simplement désactivés.

Pour le chargement, en plus de la charge centrale de 50 kPa, on tient compte du poids propre du dallage modélisé comme une charge de 6,25 kPa répartie sur toute la surface de la plaque. Enfin, un critère de décollement de 0 kPa a été considéré : aucune traction n'est donc autorisée à l'interface sol-plaque.

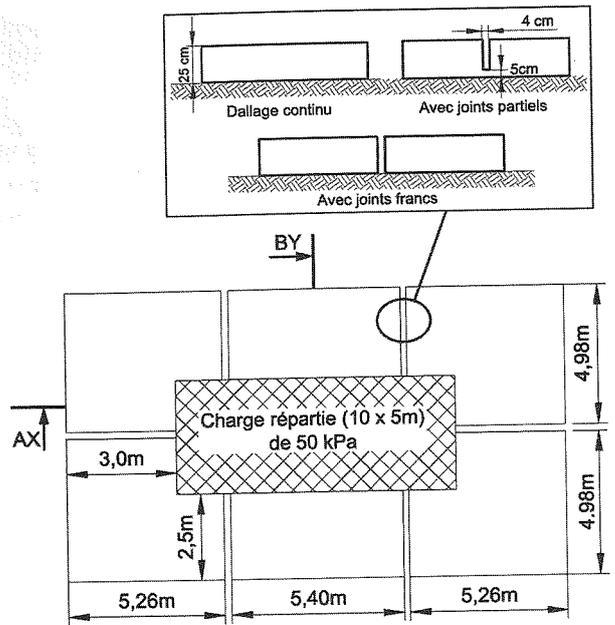


FIG. 12 Zone de chargement et disposition des joints éventuels.  
Loading area and location of joints.

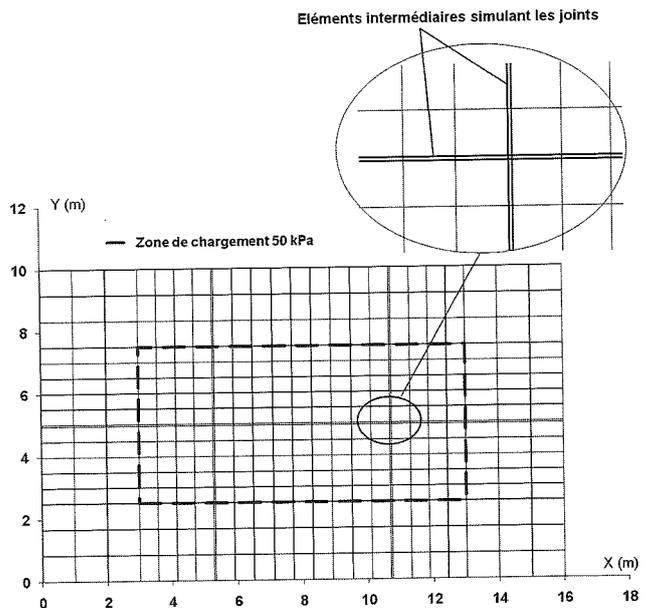


FIG. 13 Exemple 2 : maillage utilisé.  
Mesh considered for the example 2.

Les figures 14 et 15 présentent les résultats obtenus en termes de tassements et de moments au droit des coupes AX et BY identifiées sur la figure 12. Ces résultats montrent que la présence des joints modifie notablement l'amplitude et l'allure des moments dans les deux directions. Les sollicitations dans le corps du dallage sont ainsi atténuées et les tassements sont légèrement augmentés en transformant progressivement le dallage continu initial en six panneaux désolidarisés demeurant en interaction réciproque. Notons que dans le cas ultime des joints francs, l'interaction entre les six panneaux du dallage illustrée par le modèle TASPLAQ, ne peut pas être retrouvée dans un calcul où le sol est assimilé à des ressorts juxtaposés.

### Exemple 3 : semelle de roulement chargée localement

Une semelle de roulement de 30 m de longueur et de 6 m de largeur, est soumise à une charge de 150 kPa appliquée sur sa poutre centrale sur un linéaire de 10,5 m. Les données du problème sont détaillées sur la figure 16. La semelle a été discrétisée selon le maillage de la figure 17, où sont également représentés les deux axes de symétries du problème (AX) et (BY) situés respectivement à  $y = 3$  m et  $x = 15$  m.

Dans cet exemple, le poids propre de la semelle a volontairement été négligé et un critère de décollement de 0 kPa a été considéré : aucune traction n'est donc autorisée à l'interface sol-plaque.

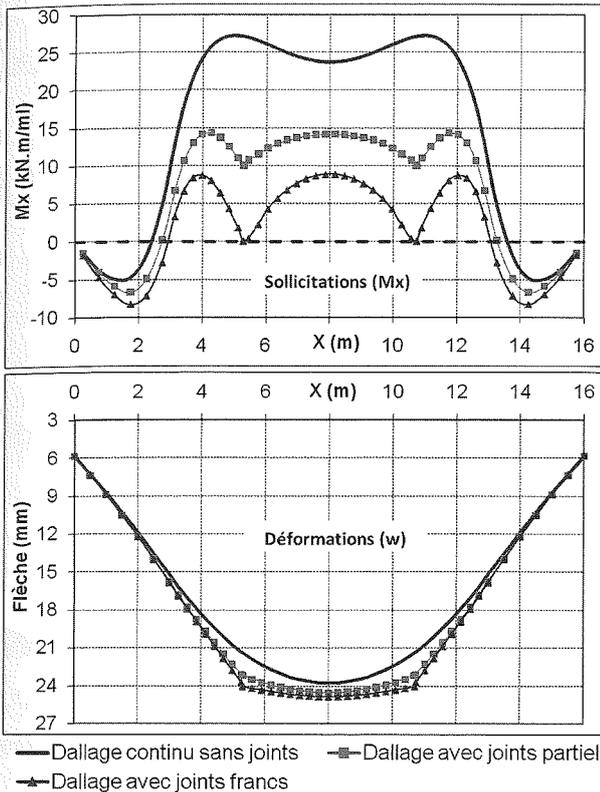


FIG. 14 Comparaison des trois situations (coupe AX).  
Comparison of the three situations (AX cross section).

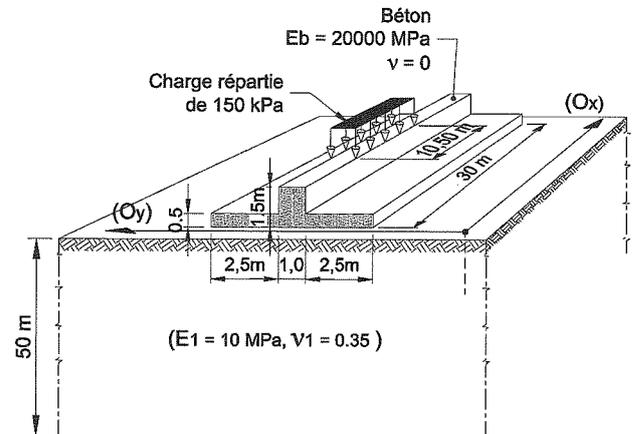


FIG. 16 Exemple 3 : données du problème.  
Example 3 : general data.

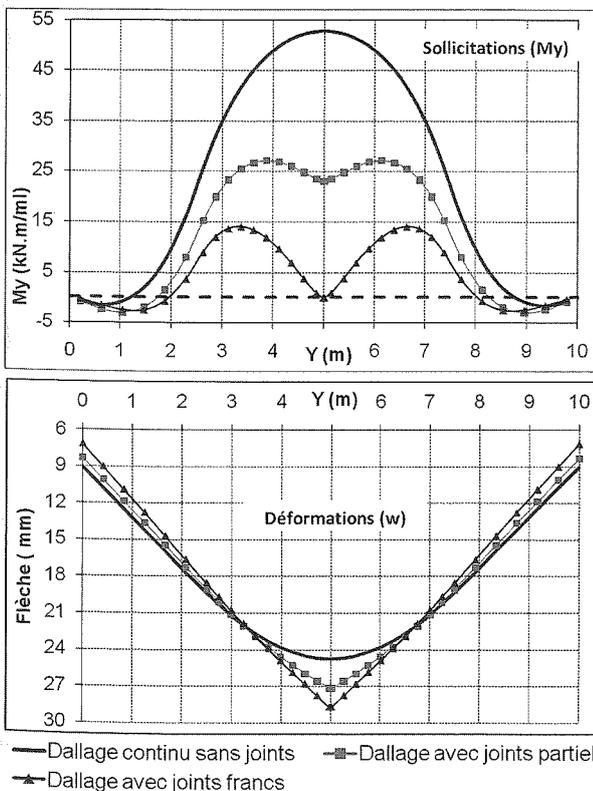


FIG. 15 Comparaison des trois situations (coupe BY).  
Comparison of the three situations (BY cross section).

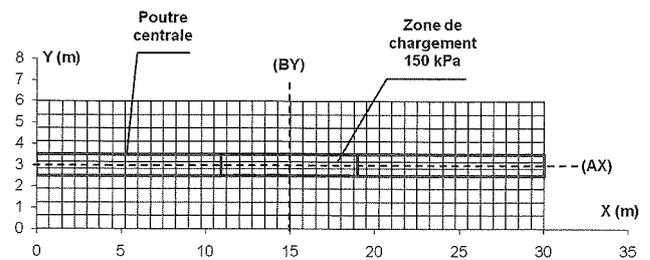


FIG. 17 Exemple 3 : maillage utilisé.  
Mesh considered for the example 3.

Les figures 18 et 19 présentent les résultats obtenus, au droit des axes (AX) et (BY), en termes de flèche, de tassements ainsi que de réaction du sol. Ces résultats montrent qu'avec le critère de décollement considéré, une zone de décollement est observée aux deux extrémités de la semelle : ceci résulte en partie du fait que le poids propre de la semelle ait été négligé. L'exemple retenu volontairement schématisé illustre bien l'aptitude du modèle à gérer les décollements. La figure 19 illustre également « l'effet de bord » qui se caractérise par une augmentation du rapport « contraintes/déformations » au voisinage des bords de la semelle. On peut enfin remarquer que la semelle, par sa rigidité, diffuse la charge qui lui est appliquée : la réaction du sol au centre de la semelle n'excède pas 14 kPa.

### Exemple 4 : radier au voisinage d'un remblai

Un radier en forme de « L » est soumis, en plus de l'action de son poids propre, à l'application de trois charges concentrées de 300 kN chacune. Ce radier est situé au voisinage d'un remblai de 2 m de hauteur, comme le schématise la figure 21.

Le radier a été discrétisé selon le maillage représenté sur la figure 22, dont une zone est désactivée pour suivre la géométrie de la plaque. Dans ce maillage, chacune des charges concentrées a une surface d'impact de 1 m x 1 m. Le poids propre du radier est modélisé par une charge répartie de 12,5 kPa appliquée à toute la surface de la plaque. Enfin, le remblai est pris en compte comme une charge extérieure de 40 kPa, s'exerçant directement sur le sol au droit de la zone désactivée. Le remblai est ainsi implicitement supposé appliqué en même temps que les charges sur le radier.

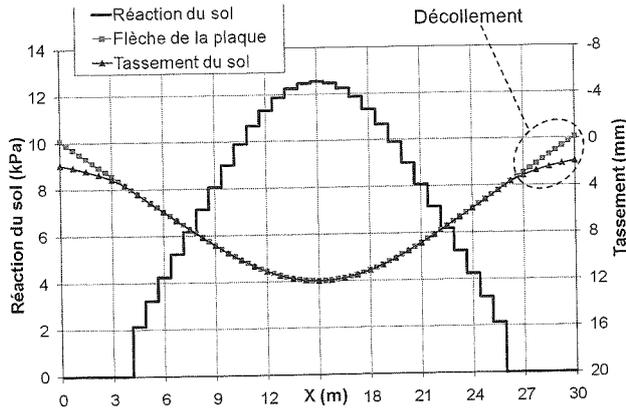


FIG. 18 Exemple 3 : flèche de la plaque, tassements et réaction du sol (coupe AX).  
Example 3 : plate deflection, settlements and soil reaction (cross section AX).

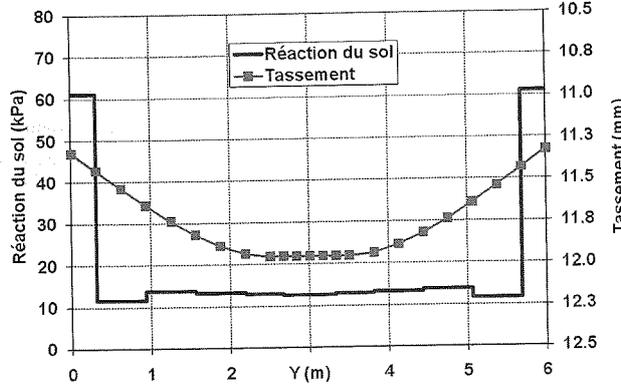


FIG. 19 Exemple 3 : tassements et réaction du sol (coupe BY).  
Example 3 : settlements and soil reaction (cross section BY).

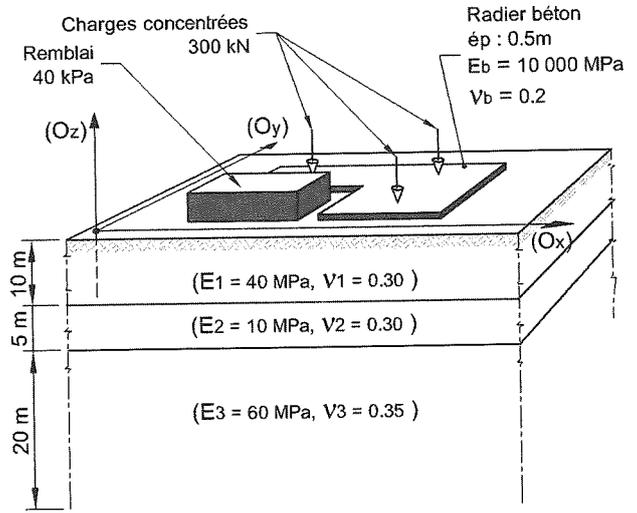


FIG. 21 Exemple 4 : données du problème.  
Example 4 : general data.

La figure 20 présente les résultats obtenus en termes de moments fléchissants  $M_x$  et  $M_y$ . Ces résultats montrent que le moment  $M_x$  est repris principalement par l'âme de la semelle.

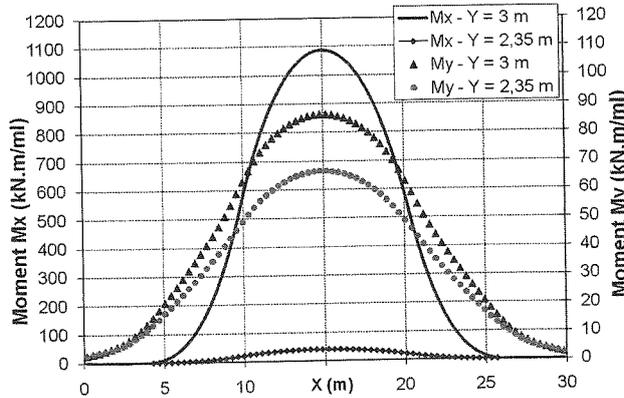


FIG. 20 Exemple 3 : moments fléchissants  $M_x$  et  $M_y$ .  
Example 3 : bending moments  $M_x$  and  $M_y$ .

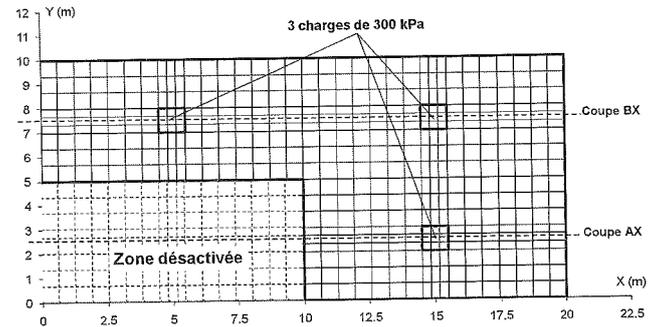


FIG. 22 Exemple 4 : maillage utilisé.  
Mesh considered for the example 4.

Les résultats peuvent être comparés à ceux obtenus en ignorant la présence du remblai. La figure 23 présente les tassements au droit des coupes (AX) et (BY) identifiées sur la figure 22. Ces résultats illustrent bien l'influence du remblai qui modifie notablement l'allure et l'amplitude des tassements sous le radier. L'interaction radier - remblai mise en évidence ne peut pas être retrouvée par un « calcul sur ressorts » où les charges n'ont une influence qu'au droit des zones où elles sont appliquées.

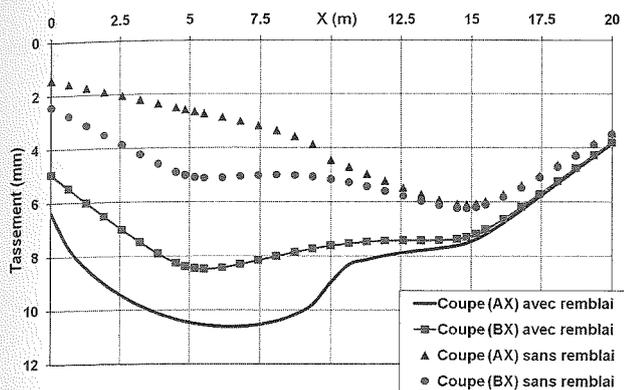


FIG. 23 Exemple 4 : influence du remblai sur les tassements en surface.  
Example 4 : interaction with an embankment : settlements.

8

## Comparaison avec d'autres méthodes

8.1

### Confrontation à des calculs éléments finis 3D

La méthode présentée a fait l'objet d'une étude de validation qui s'est appuyée sur des tests de comparaison avec d'autres méthodes. Une première étape a consisté à valider le modèle de plaque utilisé, à savoir celui de Kirchhoff à quatre nœuds et douze degrés de liberté, en vérifiant que dans le cas d'une plaque sur appuis élastiques par exemple, on aboutit bien à des résultats comparables à ceux issus des autres modèles de calcul de structure couramment utilisés (analytiques et éléments finis). Une deuxième étape a consisté à valider la méthode dans le cas général d'une plaque sur massif multicouche élastique. Il a pu être établi que, dans le domaine de validité des hypothèses adoptées, TASPLAQ conduit à des résultats voisins de ceux issus d'un traitement complet en éléments finis en trois dimensions, avec des écarts n'excédant pas 10% en général, ce qui est acceptable et convient aux applications pratiques de l'ingénieur.

De manière générale, les écarts constatés sont essentiellement attribués aux limites résultant de la généralisation des formules de Boussinesq au cas d'un multicouche : ces limites, rappelons-le, concernent le cas où les rigidités des couches sont contrastées ; elles ne sont toutefois significatives que lorsqu'une couche raide est rencontrée immédiatement en surface, ce qui n'est pas le cas le plus courant. On constate néanmoins que dans ces cas spécifiques, la rigidité propre à l'élément de structure (plaque du radier ou dallage) atténue notablement les écarts en tassement qui seraient obtenus sans cet élément.

A titre de comparaison, les exemples présentés précédemment ont été modélisés en éléments finis en trois dimensions à l'aide du logiciel PLAXIS 3D (pris comme modèle de référence). Les tableaux I à III présentent les résultats obtenus en termes de tassements et de moments fléchissants :

TABLEAU I Comparaison des tassements (mm).  
Comparison of settlements (mm).

	TASPLAQ	PLAXIS 3D	Rapport $\rho$
Exemple 1	6,6	6,6	1,00
Exemple 2 <sup>(1)</sup>	24,8	25,8	0,96
Exemple 3	12,0	12,1	0,99
Exemple 4	10,7	9,9	1,08

TABLEAU II Comparaison des moments maximaux  $M_x$  (kN.m/ml).  
Comparison of bending moments  $M_x$  (kN.m/ml).

	TASPLAQ	PLAXIS 3D	Rapport $\rho$
Exemple 1	108	110	0,98
Exemple 2 <sup>(1)</sup>	28,4	28,7	0,99
Exemple 3	1090	1070	1,02
Exemple 4	60	61	0,98

TABLEAU III Comparaison des moments maximaux  $M_y$  (kN.m/ml).  
Comparison of bending moments  $M_y$  (kN.m/ml).

	TASPLAQ	PLAXIS 3D	Rapport $\rho$
Exemple 1	122	118	1,03
Exemple 2 <sup>(1)</sup>	53	53	1,00
Exemple 3	86	87	0,99
Exemple 4	56	57	0,98

$$\text{avec } \rho = \frac{\text{Valeur TASPLAQ}}{\text{Valeur PLAXIS3D}}$$

La comparaison des tassements (tableau I) conduit à des valeurs de  $\rho$  variant entre 0,96 et 1,08. On constate que TASPLAQ sous-estime légèrement les tassements dans la situation où les rigidités des couches croissent avec la profondeur ( $\rho < 1$ , exemples 1 à 3). En revanche, une surestimation des tassements est observée lorsque les rigidités des couches supérieures décroissent avec la profondeur ( $\rho > 1$ , exemple 4).

Par contraste, les écarts associés aux moments (tableaux II et III) sont plus faibles avec des valeurs de  $\rho$  variant entre 0,98 et 1,03. Les figures 24 et 25 confirment et clarifient cette tendance : on observe en effet que les écarts obtenus en tassements n'induisent que des différences faibles au niveau des sollicitations calculées dans la plaque.

Par ailleurs, la méthode TASPLAQ présente des avantages décisifs par rapport aux éléments finis 3D. Tout d'abord, « l'emprise » du modèle est limitée à celle des éléments de fondation ; sa construction s'en trouve donc notablement simplifiée puisqu'il n'est pas nécessaire de mailler le sol en profondeur et autour de la plaque. Ceci facilite le raffinement du maillage, là où cela est nécessaire (charges, joints...), sans peser sur la taille globale du modèle. Enfin, l'expérience montre que les temps de préparation et de calcul sont réduits, notamment pour les problèmes

<sup>(1)</sup> Comparaison établie pour le cas d'un dallage continu.

impliquant des phénomènes de décollement puisque le modèle demeure appuyé sur une approche initiale élastique.

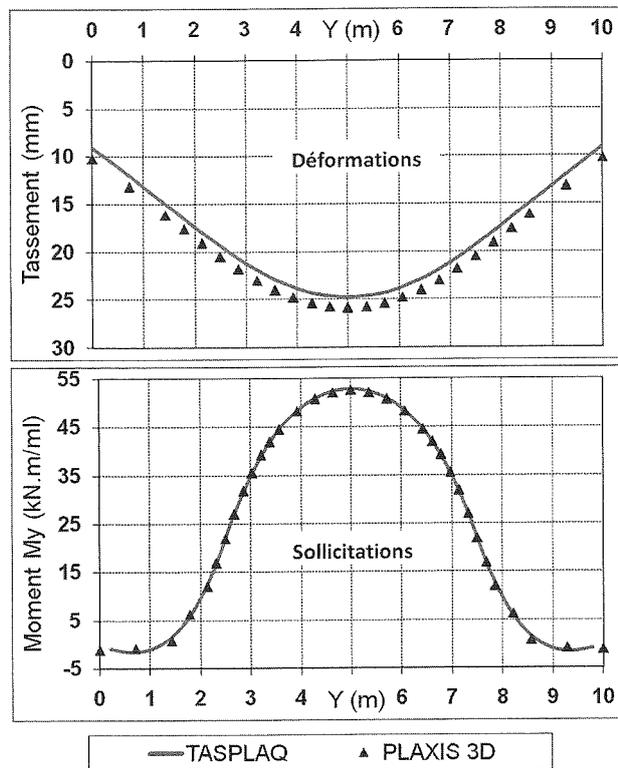


FIG. 24 Exemple 2 (coupe BY).  
Example 2 (cross section BY).

8.2

### Comparaison avec les règles de calcul du DTU 13.3

L'objet de cette partie est de comparer les résultats issus de TASPLAQ à ceux obtenus par l'application des règles de calcul de la norme dallages (DTU 13.3). Pour cela, on se place dans les conditions de l'exemple 1, avec deux cas de chargement (Fig. 26) : le cas d'une charge isolée de 500 kN au centre du dallage (point O) et le cas de deux charges de 500 kN chacune, espacées de 4 m (aux points A et B).

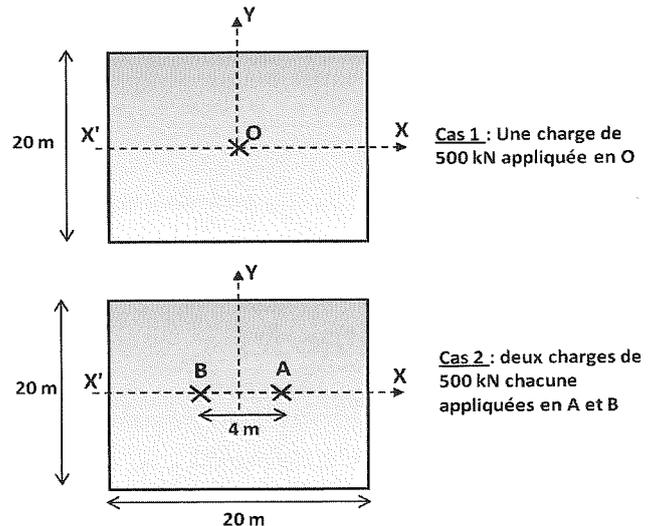


FIG. 26 Cas étudiés : localisation des points de chargement.  
Studied cases : location of loading points.

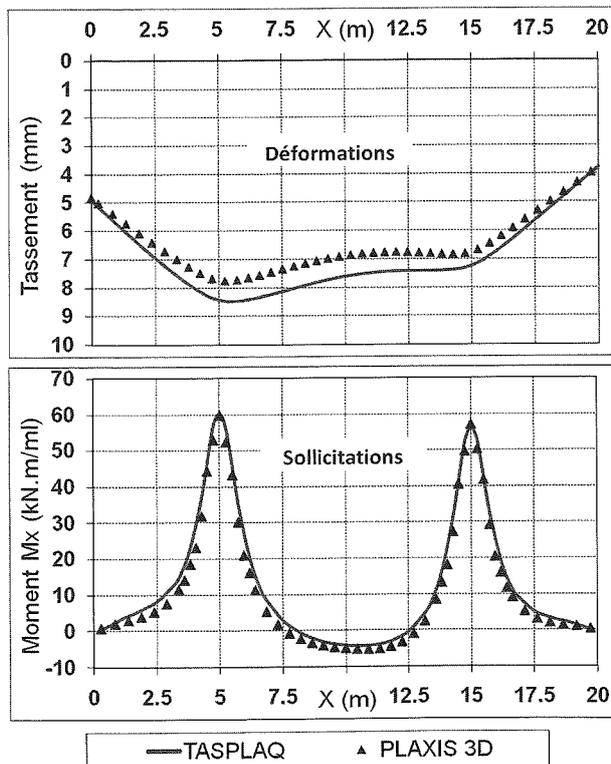


FIG. 25 Exemple 4 (coupe BX).  
Example 4 (cross section BX).

8.2.1

### Application des règles de calcul du DTU 13.3

Ces règles, explicitées dans l'annexe C du DTU 13.3, couvrent la détermination des sollicitations subies par le dallage d'origine mécanique (liées aux charges appliquées) ou d'ordre rhéologique (liées au comportement du béton : retrait, gradient thermique, dessiccation...). Seules les sollicitations d'origine mécanique sont traitées par la méthode TASPLAQ, les autres sollicitations devant ensuite leur être combinées au titre du projet complet de l'ouvrage. On se limite donc dans cette partie à la comparaison des déformations et sollicitations d'origine mécaniques, dues aux « charges d'exploitations », obtenues par les deux méthodes.

Dans le cas d'une ou plusieurs charges concentrées en partie courante, la méthode décrite dans le DTU 13.3 repose sur deux notions :

- le diamètre équivalent, noté  $D_{eq}$ , égal à celui d'une zone de support circulaire qui, soumise à l'application directe d'une charge uniformément répartie, subit en son centre un tassement identique à celui provoqué sur le dallage par une charge concentrée d'intensité égale à la résultante de cette charge répartie ;
- le module conventionnel de réaction du support, noté  $K_{eq}$ , égal au rapport entre la pression uniformément répartie sur la zone de support de diamètre  $D_{eq}$  et le tassement en son centre.

Dans l'exemple étudié d'un sol bicouche, le calcul de ces deux paramètres se fait de manière itérative. On obtient les valeurs suivantes :

$$D_{eq} = 5,42 \text{ m}, K_{eq} = 4700 \text{ kPa/m}$$

Le diamètre équivalent obtenu est associé à chaque charge concentrée appliquée en partie courante du dallage. Les déformations induites par ces charges sont calculées par la formule suivante :

$$w = \sum_1^n w_i \cdot C_{p(x_i,0)} \quad (12)$$

où  $w_i$  est le tassement provoqué par la charge concentrée d'indice  $i$  au droit de cette charge ;  $C_{p(x_i,0)}$ , le coefficient de propagation du tassement qu'on calcule à partir des coefficients d'influence relatifs à un support homogène et les caractéristiques mécaniques de chaque couche ;  $x_i$ , la distance de la charge d'indice  $i$  au point de calcul.

Pour les sollicitations, le DTU 13.3 suggère une méthode de calcul s'appuyant sur la courbure du support et fournissant les moments conventionnels dus à différents types de chargement.

### 3.2.2

#### Cas d'une charge isolée

Sur la figure 27, on a représenté les tassements

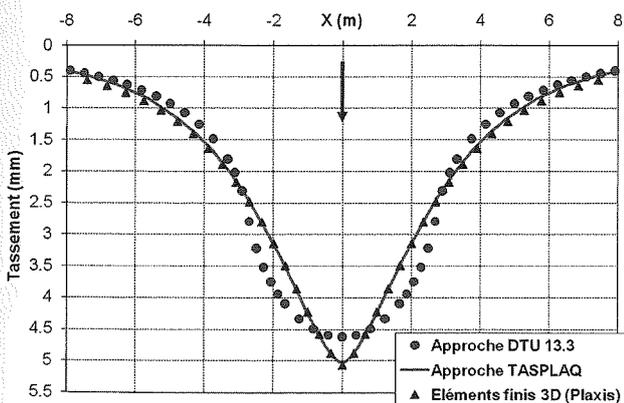


FIG. 27 Cas d'une charge isolée : tassements (axe X'X).  
Case of a point load : settlements (X'X axis).

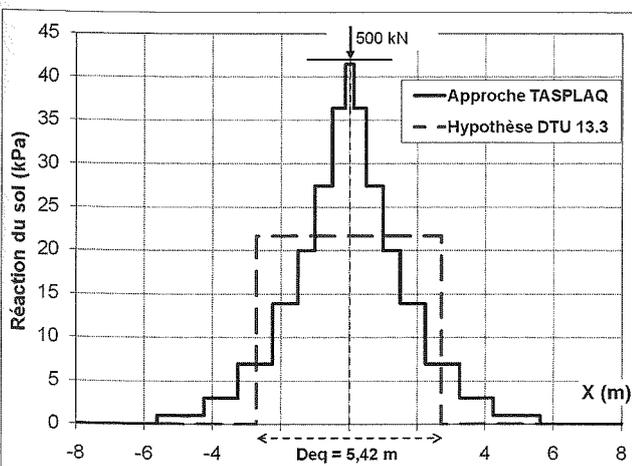


FIG. 28 Cas d'une charge isolée : réaction du sol (axe X'X).  
Case of a point load : soil reaction (X'X axis).

issus de TASPLAQ ainsi que ceux obtenus par l'approche du DTU 13.3. Les tassements obtenus par un traitement complet en éléments finis 3D sont également figurés. Ces résultats montrent que la méthode du DTU 13.3 fournit une déformée approchée du dallage avec des tassements légèrement sous-estimés mais du même ordre de grandeur que ceux fournis par TASPLAQ ou PLAXIS 3D.

Au niveau des réactions, la figure 28 montre que l'hypothèse du DTU 13.3, qui considère que la réaction du sol est uniforme sur un disque centré sur la charge, n'est qu'une approximation par rapport au résultat issu d'une approche plus élaborée.

Quant aux sollicitations, on rappelle que pour un calcul de plaque, le cas d'une charge ponctuelle demeure purement théorique ; il conduit en toute rigueur à des valeurs infinies de moment au point d'application de la charge. Une manière usuelle pour simuler ce cas consiste à considérer une diffusion de la charge ponctuelle sur le plan neutre de la plaque, avec un angle de diffusion de 45 degrés, comme le montre la figure 29. Ainsi, sous TASPLAQ ou PLAXIS, la charge concentrée est modélisée comme une charge répartie sur un disque (ou rectangle équivalent) de diamètre égal à l'épaisseur du dallage.

On a représenté sur la figure 30 la variation du rapport  $Mx/Q$  au droit de l'axe X'X, ce qui permet d'avoir un résultat indépendant de la valeur de la charge appliquée  $Q$ . L'amplitude du moment fournie par l'approche du DTU 13.3 est de  $0,125Q$ . Cette valeur est deux fois plus faible que celle obtenue par une approche plus élaborée. Le fait que dans le DTU, le calcul des sollicitations soit basé sur la courbure du support, peut expliquer en partie l'écart constaté : la figure 27 montre en effet que la courbure maximale du profil de tassement obtenu par l'approche du DTU est relativement sous-estimée par rapport aux deux autres approches.

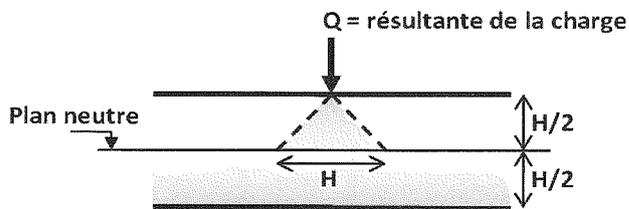


FIG. 29 Diffusion d'une charge concentrée.  
Diffusion of a point load.

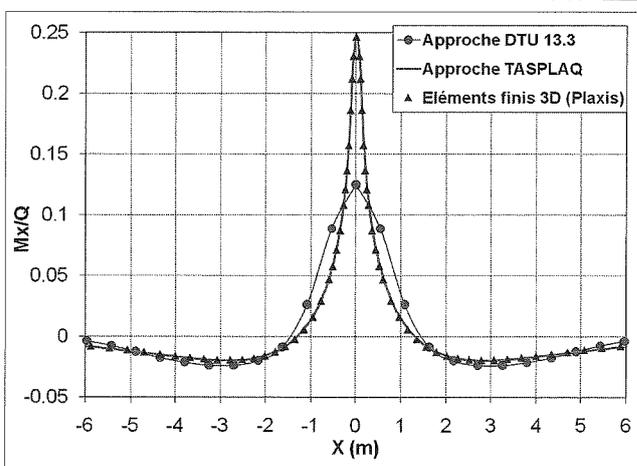


FIG. 30 Cas d'une charge isolée : moment fléchissant  $Mx$  (axe X'X).  
Case of a point load : bending moment  $Mx$  (X'X axis).

## Cas de deux charges voisines

On considère à présent le cas de deux charges de 500 kN chacune, espacées de 4 m (Fig. 26). Sur la figure 31, on a représenté les tassements issus des trois approches. On constate que l'approche du DTU aboutit à une allure de tassement sensiblement différente : le tassement maximal est atteint entre les deux charges contrairement à ce qui est obtenu par un calcul plus complet. En effet, l'approche du DTU est basée sur le principe d'un disque d'interaction, associé à chaque charge, et sur lequel la réaction du sol est uniforme. Dans le cas présent, les deux disques d'interaction se superposent (diamètre équivalent égal à 5,42 m supérieur à la distance séparant les deux charges) et créent une zone de réaction cumulée plus forte au milieu, qui ne correspond pas toujours à la réalité (Fig. 32).

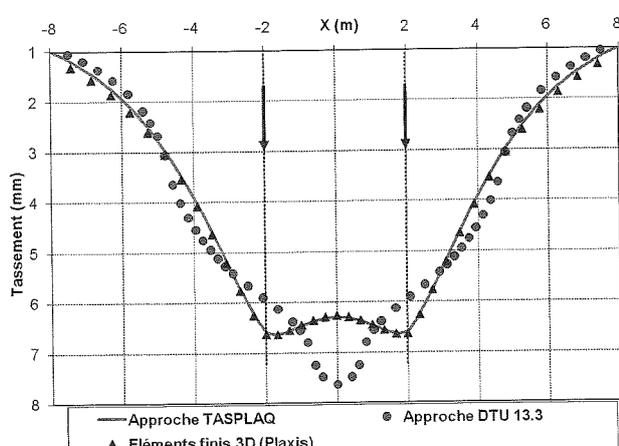


FIG. 31 Cas de deux charges voisines : tassements (axe X'X).  
Case of two point loads : settlements (X'X axis).

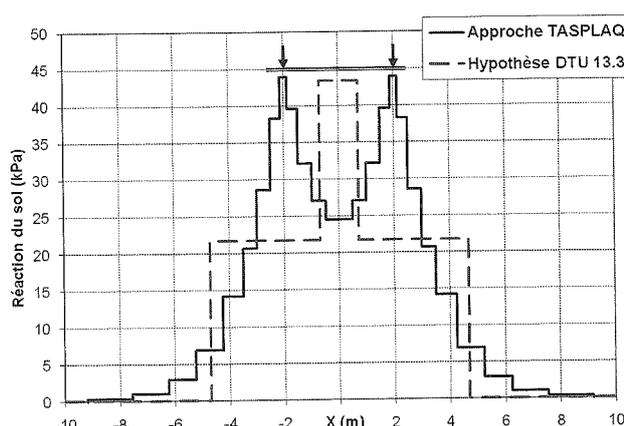


FIG. 32 Cas de deux charges voisines : réaction du sol (axe X'X).  
Case of two point loads : soil reaction (X'X axis).

Ces exemples simples sont destinés à illustrer les capacités de la méthode TASPLAQ à traiter les problèmes de dallage, mais également à mettre en lumière les simplifications inhérentes à l'approche simplifiée décrite dans le DTU 13.3, dont il convient que le projeteur soit convenablement averti. A ce propos il peut être rappelé que le DTU 13.3 précise que la méthode simplifiée est à utiliser à défaut de méthodes plus

rigoureuses, éprouvées et scientifiquement justifiées. Si on s'intéresse aux déformations et sollicitations d'origine « mécanique », alors le modèle TASPLAQ a précisément pour vocation de figurer parmi ces méthodes avancées.

## Extension de la méthode

Dans le cas de dallages par exemple, l'existence d'une couche de forme généralement plus raide en surface peut paraître de nature à limiter la validité du modèle TASPLAQ, du fait de l'inadéquation des formules de Boussinesq dans ce cas précis. L'expérience acquise par les nombreux tests de validation montre néanmoins que, dans une telle situation, la rigidité propre à l'élément de structure (plaque du radier ou dallage) qui vient « coiffer » cette couche peu déformable atténue notablement les écarts en tassement qui seraient obtenus sans cet élément de structure.

Une amélioration de l'approche de base qui a été décrite, permettant de mieux surmonter cette limitation potentielle, est possible par une technique d'homogénéisation. Celle-ci consiste à définir une inertie équivalente de l'ensemble (dallage + couche de forme), puis à traiter le problème de l'appui de cette plaque « homogénéisée » sur les couches sous-jacentes.

Cette fonctionnalité spécifique a également été introduite. L'inertie équivalente qui est définie peut être variable dans le modèle afin de tenir compte de la variation de l'épaisseur du milieu équivalent, notamment au droit des joints. Cette technique conduit effectivement à une déformée plus précise, et il est possible de remonter aux efforts dans la plaque à partir de ceux du milieu équivalent en effectuant une « déshomogénéisation » de celui-ci.

Il convient toutefois de s'assurer de la compatibilité des contraintes de flexion obtenues dans la couche de forme avec les contraintes initiales et/ou les propriétés rhéologiques du matériau qui la constitue.

## Conclusion

La méthode développée pour l'étude de l'interaction sol-plaque n'est pas, bien entendu, aussi puissante et versatile que celle des éléments finis en trois dimensions. Mais elle présente des avantages décisifs en s'affranchissant du maillage du sol et en limitant l'emprise du modèle à celle des éléments de fondations.

Cette méthode a été basée sur un couplage entre une formulation en éléments finis de plaque et les formules de Boussinesq, et conduit, dans le domaine de sa validité, à des résultats voisins de ceux obtenus par traitement complet en éléments finis 3D. Elle s'applique à tout massif de fondation constitué de couches horizontales, dont le comportement peut être considéré élastique dans la situation de chargement étudiée. De la sorte cette méthode se substitue avantageusement aux méthodes de calcul de plaques sur appuis élastiques en évitant la simplification très critiquée de la proportionnalité réaction-déplacement, et par conséquent l'écueil du choix d'un module de réaction dont chacun sait qu'il n'est caractéristique ni d'un sol ni d'un ensemble sol-structure.

Cette méthode a fait l'objet d'un programme informatique, qui permet de traiter le tassement et la déformée de plaques d'inertie variable, sous chargement ponctuel et/ou réparti. Le modèle a été perfectionné par l'introduction de plusieurs fonctionnalités comme la prise en compte d'une plaque de géométrie quelconque, la modélisation de plusieurs plaques désolidarisées ainsi que la gestion automatique du décollement de la plaque. Il est également possible de prendre en compte, de manière approchée, tout seuil

de plastification prédéfini par l'utilisateur en sous-face de la plaque ou l'influence de l'état initial des contraintes pour traiter d'une fondation placée au fond d'une excavation.

Une extension du domaine d'application via une technique d'homogénéisation est également rendue possible et s'avère intéressante dans le cas particulier d'un massif de fondation comportant une couche de forme raide en surface.

## Bibliographie

- Batoz J.-L., Dhatt G. – *Modélisation des structures en éléments finis*. Presses de l'université Laval, édition Hermès, 1990.
- Burland J.B., Broms B.B., De Mello V.F.B. – Behaviour of Foundations and Structures. *Proceedings of the ninth international conference on soil mechanics and foundation engineering*, Tokyo, vol. 2, 1977, p. 495-546.
- Cassan M., Guendon J.-P., Locci J.-M. – Méthode numérique pour l'étude de l'interaction sol-radier. *10<sup>e</sup> Conférence européenne de mécanique des sols et des travaux de fondations*, Florence (Italie), vol. 1, 26-30 mai 1991, p. 363-366.
- Combarieu O. – L'usage des modules de déformation en géotechnique. *Revue française de géotechnique*, n° 114, 1<sup>er</sup> trimestre 2006.
- Norme NFP.11-213, DTU 13.3 – Dallages : conception, calcul et exécution. Partie 1 : cahiers des clauses techniques des dallages à usage industriel ou assimilés.
- Pliskin L. – Dallages industriels sur sol. *Revue française de génie civil*, vol. 3, n° 6, 1999, p. 423-436.
- Potts D., Zdravkovic L. – *Finite element analysis in geotechnical engineering*. Thomas Telford Publishing, 1999.
- Terzaghi K. – *Theoretical soil mechanics – Theory of Semi-infinite elastic solids*. 1943, 2<sup>nd</sup> edition.
- Vezole P. – Interactions sol structure. Méthode de calcul des pressions normales à l'interface dans quelques cas courants. *Annales de l'ITBTP*, n° 448, octobre 1986.
- Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. – *The finite Element Method*. McGraw-Hill book Company (UK), 1991, 4<sup>th</sup> edition.

# La méthode de Kranz d'hier à aujourd'hui : une revue critique

**A. CORFDIR**

Institut Navier, CERMES  
ENPC, 6 et 8, avenue  
Blaise-Pascal  
77455 Marne-la-vallée  
corfdir@cermes.enpc.fr

## Résumé

La méthode de Kranz concerne les murs et parois ancrés et doit permettre de vérifier la longueur des ancrages. Cette méthode déjà ancienne (1939) visait à satisfaire les besoins apparus quelque temps auparavant avec le développement des ancrages et des écrans. Au cours de presque soixante-dix ans, il s'est produit une évolution des techniques d'ancrages qui sont passées de la plaque d'ancrage au scellement. En parallèle, diverses adaptations de la méthode originale de Kranz ont été proposées et utilisées. Des expériences ont aussi été réalisées pour tester la validité de la démarche proposée par Kranz. Finalement, on étudie le bien-fondé de méthodes dérivées de Kranz au vu des pratiques actuelles et on évoque quelques alternatives possibles.

*Mots-clés* : soutènement, ancrage, méthode de Kranz.

# Kranz's method from yesterday to today : a critical review

## Abstract

Kranz's method deals with anchored walls and allows to verify the length of anchorings. This already ancient method (1939) aimed at satisfying necessities appeared a little while previously with the development of anchored walls. During almost 70 years, there was an evolution of the technique of anchorings which change from anchor plates to grouted anchorages. In parallel, different adaptations of Kranz's original method were proposed and used. Experiments were also conducted to test the validity of Kranz's method. Finally, one studies the validity of methods derived from Kranz's in view of current practices and one evokes possible alternatives.

*Key words* : retaining wall, anchoring, Kranz's method.

NDLR : Les discussions sur  
cet article sont acceptées  
jusqu'au 1<sup>er</sup> septembre 2009.

## Introduction

La pratique d'ancrages des murs de soutènement ou des quais par des tirants métalliques dans le sol remonte au moins à la première moitié du XIX<sup>e</sup> siècle. La technique des parois minces utilisant des ancrages s'est développée avec l'utilisation de palplanches en acier. Le développement est progressif jusque dans les années 1930 qui voient croître rapidement les tonnages consommés dans différents pays et notamment l'Allemagne, les États-Unis (Pascal, 1957). Parallèlement, des efforts pour rationaliser la conception des ouvrages de soutènement se développent activement. Les questions sont nombreuses a priori : répartition des efforts de poussée sur la paroi, résistance des ancrages à l'arrachement, position des dispositifs d'ancrages. En ce qui concerne la longueur des ancrages ou plus généralement la position des dispositifs d'ancrages, c'est, de loin, le nom de Kranz qui a le plus marqué, en particulier en Allemagne et en France.

Les recommandations sur les tirants d'ancrage font fréquemment référence à la méthode de Kranz (EAU 1990), (ROSA 2000) ou à une méthode de Kranz modifiée (TA. 72), (Balay, 1988, *Techniques de l'ingénieur*). Dans les dernières recommandations françaises (TA 95), une méthode de Kranz modifiée est présentée mais sans citer le nom de Kranz. L'objectif exprimé est d'assurer la stabilité vis-à-vis d'un type de rupture par renversement (TA 95), d'assurer la stabilité d'ensemble (TA 72), de vérifier la stabilité du massif d'ancrage (Balay, 1988) (Houy, 1986) ou la stabilité de l'ancrage selon le plan de rupture inférieur (EAU, 1990). Les recommandations ROSA 2000 précisent qu'il s'agit d'un mode de rupture externe (glissement généralisé du massif d'ancrage) et qu'on cherche à se prémunir d'une longueur insuffisante des tirants entre le rideau principal et le massif d'ancrage. Cette vérification doit être nettement distinguée de la vérification à l'arrachement.

Nous allons d'abord resituer le contexte scientifique dans lequel a travaillé Kranz, rappeler la méthode qu'il a proposée, puis les diverses méthodes dérivées qui ont repris des éléments de la méthode de Kranz originelle. Enfin nous proposerons une analyse de ces méthodes dérivées tendant à remettre en question la pertinence du choix particulier du coefficient de sécurité qu'elles ont en commun et à proposer de se rapprocher des modes de justification d'autres types d'ouvrages.

## Avant Kranz

### Le développement des écrans et des travaux allemands sur les ancrages jusqu'aux années 1930

On ne peut prétendre tenter ici un historique complet et on se focalisera sur la période beaucoup mieux documentée de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle et du début du XX<sup>e</sup> siècle. Cette période est notamment marquée par l'apparition des palplanches de type moderne (Pile Buck, 2007) : acier laminé au lieu de fonte, profils nou-

veaux (brevet de Larssen en 1904), abandon des assemblages par rivets (serrure Larssen sans rivet en 1914). Les quantités de palplanches utilisées augmentent très fortement au cours des trente premières années du siècle (Pascal, 1957).

Ce développement des écrans suscite parallèlement des réflexions sur leur conception et leur dimensionnement et notamment sur leur ancrage. Sur ce sujet, les ingénieurs allemands se montrent alors particulièrement actifs et notamment les ingénieurs en travaux maritimes ou fluviaux, cumulant exercice de responsabilité et travail scientifique et technique. Ainsi, plusieurs auteurs allemands nés dans la deuxième moitié du XIX<sup>e</sup> siècle ont marqué leur époque : il faut citer essentiellement : Heinrich Müller-Breslau (1851-1925), Max Möller (1854-1935), Hans Detlef Krey (1866-1928) qui se consacra beaucoup aux travaux hydrauliques et développa un laboratoire de mécanique des sols à Berlin, Otto Franzius (1877-1936), fondateur à Hanovre d'un institut de recherche qui porte maintenant son nom, auteur de livres sur les voies navigables. Un peu plus tard, viennent les noms d'Arnold Agatz (1891-1980), d'Erich Lohmeyer (1886-1966), lequel fut en poste au port de Hambourg et collabora à partir de 1927 au traité de géotechnique de Ludwig Brennecke (1843-1931), ingénieur en travaux maritimes longtemps au port de Wilhelmshaven. Il faudrait également noter Johann Ohde (1905-1953) qui débuta sa carrière sous la direction de Krey et qui publia une série d'articles sur la poussée avant la thèse de Kranz. Il faut citer enfin des travaux d'expérimentateurs comme Wilhelm Buchholz et Hans Petermann qui soutinrent dans les années 1930 leurs thèses sur la résistance des ancrages à l'université technique de Hanovre.

### L'état des réflexions sur la longueur des ancrages avant 1939

Max Möller (1902) propose une théorie de l'ancrage en complément de ses tables de poussée, théorie qui est reprise telle quelle dans l'adaptation en français (Möller, 1933). Möller ne sépare pas le mur du sol dont il est solidaire par les ancrages : « Le prisme de terrain constitue une partie intégrante du mur », et on calcule la poussée s'exerçant sur ce nouvel ensemble. Un raccourcissement des ancrages nécessite une augmentation de la fiche. Il conclut finalement que des murs à ancrages courts (Fig. 1), n'atteignant pas le plan de poussée maximum nécessitent la même profondeur de fondation que les murs non ancrés mais permettent la construction d'un mur plus léger avec une épaisseur plus faible. Pour des ancrages très longs, atteignant la ligne de talus naturel, il va jusqu'à affirmer que la profondeur de fondation peut, à la limite, être choisie nulle.

Un peu plus tard, Krey (1918)<sup>(1)</sup> distingue trois cas : (1) le bloc constitué du mur et du sol ancré est au-dessus de la ligne de glissement correspondant à la poussée ; (2) il est entre la ligne de glissement et la pente de talus naturel ; (3) il est en dessous de la pente de talus naturel. Il donne une estimation de la force dans l'ancrage dans le cas où zone de poussée sur le mur et zone de butée contre le mur d'ancrage s'interpénètrent

<sup>(1)</sup> Il s'agit d'une deuxième édition augmentée ; la première édition est parue en 1912.

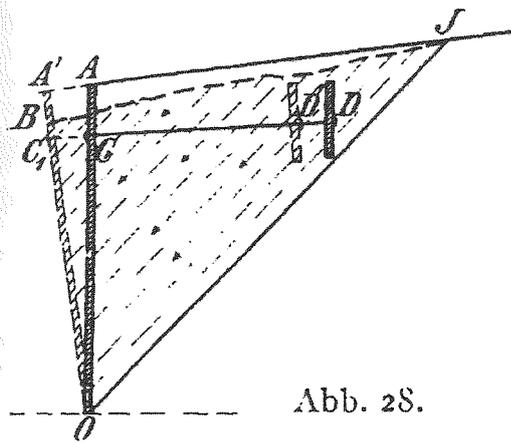


Abb. 28.

FIG. 1 Illustration de l'inefficacité d'un ancrage situé au-dessus de la ligne de glissement (Krey, 1918).

Illustration of the ineffectiveness of an anchoring situated over the sliding line (Krey, 1918).

partiellement. La conclusion est que pour une distance suffisante, la force à laquelle l'ancrage peut résister atteint une valeur maximale quand il n'y a plus interpénétration de ces deux zones. Contrairement à Möller, il ne reconnaît aucune utilité aux ancrages à l'intérieur de cette ligne de glissement, il ne raisonne plus comme si le mur et le sol ancré formaient un bloc : il fait intervenir force d'ancrage et poussée sur la paroi.

Inversement, une longueur suffisante de l'ancrage doit permettre d'évaluer l'effort sans tenir compte de la présence du mur.

Brenneke et Lohmeyer (1930) combinent qualitativement les deux critères de non interpénétration des zones de poussée et de butée d'une part et de position de l'ancrage par rapport à la pente de talus naturel d'autre part, en distinguant plusieurs zones (Fig. 2) (à noter que cela ne figure pas dans la troisième édition (Brennecke, 1906) et que Kranz attribue ces conditions à Lohmeyer).

Franzius (1927) recommande que l'ancrage soit placé de telle sorte qu'il n'y ait pas intersection. Il introduit une configuration particulière appelée « cas long », dans laquelle il n'y a pas d'interaction entre zone active et zone passive. Mais il impose à titre de sécurité de diminuer de 5 degrés l'inclinaison par rapport à l'horizontale de la limite de la zone de poussée.

Buchholz (1932), élève de Franzius, estime au vu de ses résultats expérimentaux que cette minoration de 5 degrés n'est pas utile. Ceci donne la condition suivante sur L (Fig. 3) :

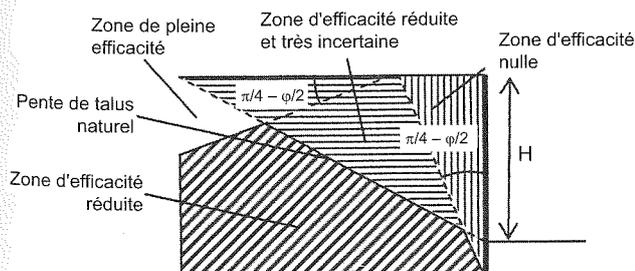


FIG. 2 Zones de plus ou moins grande efficacité des ancrages d'après Brenneke et Lohmeyer (1930).

Zones of more or less big efficiency of anchorings according to Brenneke and Lohmeyer (1930).

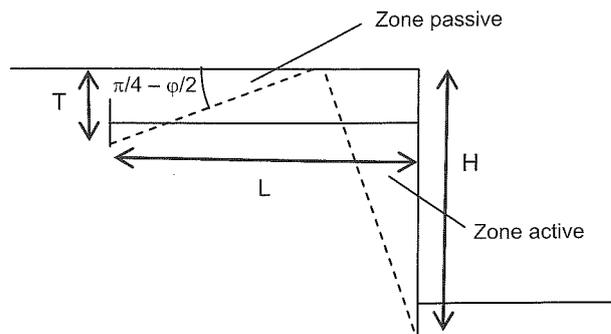


FIG. 3 Définition des ancrages longs. Definition of long anchorings.

$$L \geq H \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) + T \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \quad (1)$$

Kranz signale la variante d'Agatz (1936) qui permet de raccourcir un peu la longueur minimale pour être dans le cas long : au lieu de faire partir la zone active depuis la base de la paroi, il propose de considérer qu'elle commence au point de moment nul.

Ces considérations ne font intervenir ni la force dans l'ancrage ni la résistance de l'ancrage. D'ailleurs Ohde (1938) est conscient du fait que la répartition des pressions sur un mur simplement ancré dépend des déformations du mur et est différente selon que le mur tourne autour de son point d'ancrage ou autour de sa base.

### 3

## La méthode de Kranz

### 3.1

### Une thèse théorique dans un contexte quasi exclusivement germanophone

C'est donc dans un contexte d'une tradition allemande bien développée de recherche sur les questions d'ancrage qu'Egidius Kranz a réalisé ses travaux et soutenu sa thèse de docteur ingénieur le 9 juin 1939 à Berlin. Elle a fait l'objet d'une première édition en 1940 par Ernst et Sohn (53 p.), suivie après la guerre d'une seconde édition inchangée en 1953, toujours chez le même éditeur. Cette seconde édition est plus facilement accessible. Probablement, il est aussi l'auteur d'un article sur des travaux maritimes mettant en œuvre notamment des palplanches (Kranz, 1932). Nous n'avons pas trouvé trace de publications de Kranz après 1939 ; il est bien possible, compte tenu des circonstances historiques, que son oeuvre scientifique ait été alors interrompue.

Suivant les usages académiques, Kranz (1940) commence par présenter l'état de l'art avec des références extrêmement précises. Ces références sont de provenance germanique à une exception près, un ouvrage de Dean (1935). Encore, cette référence est-elle invoquée non pas au titre du problème principal des ancrages mais pour la question du point d'application de la poussée sur un mur. De même, il n'utilise pas de références expérimentales ; les travaux de Petermann (1933) et de Buchholz et Petermann (1935) sont bien signalés dans la liste bibliographique mais ne sont pas du tout pris en compte. Il ne compare ses résultats qu'à ceux d'autres calculs.

Kranz parle exclusivement de mur d'ancrage à l'exclusion notamment des plaques d'ancrages pourtant en usage à son époque. Il n'explique pas ce choix mais on peut penser que la raison en est de légitimer ses calculs à deux dimensions.

Dans son avant-propos de décembre 1939, Kranz pose le problème des ancrages courts de la manière suivante : comment trouver la surface de glissement la plus défavorable ? comment alors calculer la butée du sol ?

Le dernier point peut être reformulé de manière plus opérationnelle en : comment caractériser la sécurité de l'ouvrage pour cette surface de glissement ?

### 3.2

## Position de Kranz vis-à-vis de ses prédécesseurs

Kranz (1953) critique sévèrement ses prédécesseurs. Il reproche à Möller d'avoir considéré le prisme de sol entre le mur de soutènement et le mur d'ancrage comme un bloc rigide, ce qui selon lui ôte toute pertinence aux travaux de Möller pour éclaircir la question posée. Nous reviendrons sur ce point quand nous examinerons les diverses évolutions de la méthode de Kranz.

Kranz n'est guère plus indulgent envers Lohmeyer (1930) et Krey (1936). Du premier, il critique en particulier l'utilisation de la pente de talus naturel et le choix de considérer cette droite de talus naturel à partir de la surface du sol devant le mur et non à partir de la base de la paroi. Au second, il reproche une incohérence au sujet de la hauteur du mur sur laquelle s'exerce la poussée. Le calcul de Krey prend en compte seulement la partie au dessus du sol devant le mur.

### 3.3

## La méthode de Kranz

Kranz s'intéresse au cas qui pose problème, celui de l'ancrage court, quand la condition (1) n'est pas satisfaite. Il se place dans le cadre le plus simple possible : il suppose que la surface du massif est horizontale, que le mur est vertical et l'ancrage horizontal. La méthode vise essentiellement à déterminer la force maximale supportable dans l'ancrage et à la comparer à la force que le tirant doit reprendre du fait de la poussée des terres. Bien que la répartition de la poussée des terres dépende de différents facteurs, il retient l'hypothèse que la poussée globale peut être calculée de manière classique.

Kranz choisit d'étudier l'équilibre du bloc ABFE. Il en déduit une valeur maximale supportable de la force de traction  $T_{max}$  dans l'ancrage. Il faut noter que dans son approche la force  $T_{max}$  dans l'ancrage est bien une force extérieure pour le bloc étudié. Les autres forces agissant sur ce bloc sont son poids, la poussée des terres sur AF et BE, la réaction sur EF, ces dernières étant toutes supposées inclinées de par rapport à la normale. On note qu'il envisage deux variantes selon le choix du point E. La variante II est préférée par Kranz en raison de sa plus grande simplicité.

Le terrain pris en compte par Kranz ne comporte pas le coin de terre BCD, près du mur, supposé en poussée.

On peut considérer l'état limite considéré par Kranz comme un état limite d'arrachement du mur d'ancrage. Avec la technique du mur d'ancrage, il est naturel de modéliser cette résistance à l'arrachement par la mise en butée d'un bloc limité par ce mur. L'utilisation d'autres techniques d'ancrage rendra beaucoup plus délicate une modélisation de ce type.

La condition de stabilité de Kranz compare la force  $T_{max}$  maximale compatible avec la stabilité du bloc ABFE et la force  $T$  que doit reprendre le tirant au niveau du mur, c'est à dire ici la composante horizontale de la poussée des terres sur le mur. La condition de stabilité de Kranz s'écrit en définitive :

$$T_{max} \geq T \quad (2)$$

Cette condition ne fait pas intervenir la résistance du tirant proprement dit, celle-ci doit toujours être supérieure à  $T$ . Donc, suivant Kranz lui-même et la problématique affichée dans son avant-propos, on peut considérer que sa méthode repose sur deux éléments : un certain choix des lignes de rupture et un certain choix de paramètre pour mesurer la sécurité.

### 4

## Les critiques anciennes de la méthode de Kranz

Des critiques ont été formulées au fil des années qui portent sur les deux caractéristiques essentielles de la méthode de Kranz : le choix du bloc étudié et le choix du paramètre caractérisant la sécurité. On peut citer Jelinek et Ostermeyer (1967a,b), Ranke et Ostermeyer (1968), Verdeyen et Nuyens (1966). Verdeyen et Nuyens (1966) s'avèrent quelque peu gênés pour classer la méthode de Kranz et finalement choisissent de la mettre parmi les méthodes empiriques faute de pouvoir la rattacher clairement à une autre catégorie (états

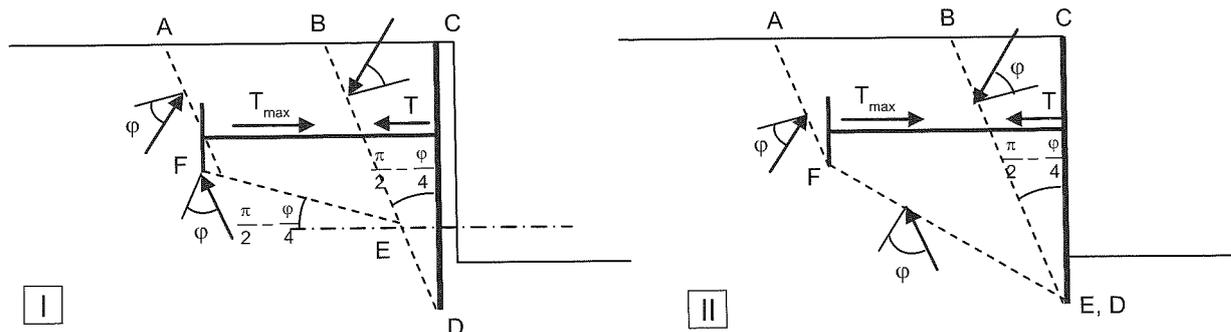


FIG. 4 Bloc de Kranz avec les deux variantes I et II. Kranz's block with two variants (I and II).

d'équilibre limite ou bien théorie élastique), malgré l'absence de données expérimentales dans l'ouvrage de Kranz.

#### 4.1

### L'apport des expériences

Tout d'abord, citons pour mémoire les expériences de Rowe (1952) et de Hanna et Matallana (1970) à Sheffield sur des modèles réduits de parois ancrées. Les tirants étaient solidaires du bâti de l'appareillage avec mesure de la force. Ces expériences ne peuvent être représentatives que du cas des ancrages longs.

#### 4.1.1

### Expériences de Jelinek et Ostermeyer

Les expériences ont été menées avec du sable (Jelinek et Ostermeyer, 1967a et b).

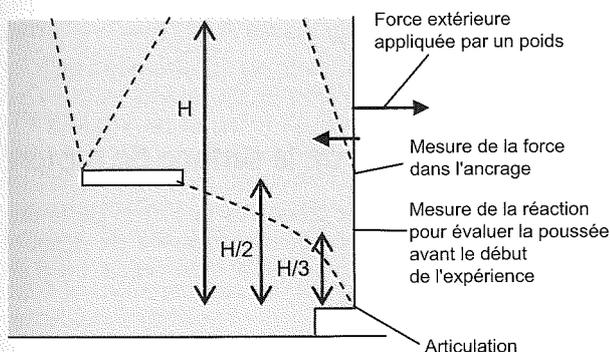


FIG. 5 Schéma de l'expérience et allure des lignes de ruptures selon Jelinek et Ostermeyer (1967a, b) : cas de l'ancrage court.

Scheme of the test and pattern of the failure lines according to Jelinek and Ostermeyer (1967a, b) : case of the short anchoring.

L'ancrage est un élément plutôt 2D ; il va agir essentiellement par frottement. La ligne de rupture principale peut être assimilée à une spirale logarithmique allant de l'extrémité aval de l'ancrage à l'articulation. Des lignes de ruptures sont également constatées à l'amont de l'ancrage et un coin de glissement près de la paroi. Le sol au-dessus de l'ancrage a tendance à se comporter comme un bloc qui ne se déforme pas.

#### 4.1.2

### Expériences de Verdeyen et collaborateurs

On fait référence principalement à Verdeyen et Nuyens (1964). Des données complémentaires peuvent être trouvées dans Verdeyen *et al.* (1971) et dans Verdeyen et Roisin (1961). Cette dernière référence montre les surfaces de rupture pour une paroi sans ancrage mais présente l'intérêt d'envisager l'effet de surcharges verticales. Ces expériences sont plus proches du cas envisagé par Kranz : l'ancrage agit par mise en butée du terrain, la paroi tient en place par une fiche et non pas une articulation irréaliste.

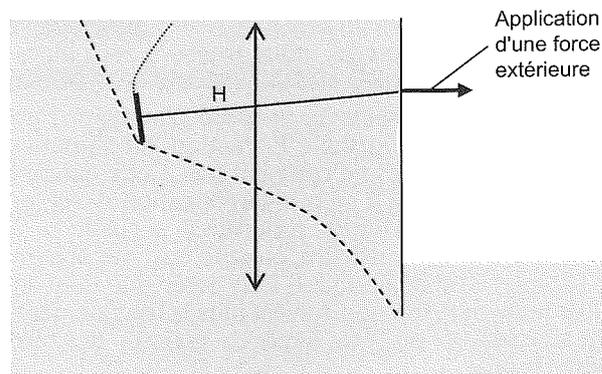


FIG. 6 Schéma de l'expérience et allure des lignes de rupture des expériences d'après (Verdeyen et Nuyens, 1964) : cas de l'ancrage court.

Scheme of the test and pattern of the failure lines according to Verdeyen and Nuyens (1964) : case of the short anchoring

Pour l'ancrage court, la géométrie globale de la zone déplacée est semblable à celle obtenue dans les expériences de Jelinek et Ostermeyer. En revanche le comportement interne est différent. Pour l'ancrage long, l'allure est sensiblement différente avec une zone en déformation autour de l'ancrage séparée de la zone en déformation près de la paroi.

#### 4.1.3

### Commentaires et conclusions

Globalement, aucune des expériences ne donne des figures de glissement semblables à celles postulées par Kranz.

Jelinek et Ostermeyer notent (1967a) :

- que la ligne de rupture droite (FE sur la figure 4) ne correspond pas à l'optimum, c'est-à-dire au minimum de réaction mobilisable, ce qui est confirmé par les expériences sur modèle, celles de Jelinek et Ostermeyer comme celles de Verdeyen et de ses collaborateurs ;
- qu'on constate expérimentalement sur des modèles que les deux lignes de rupture BD et FE (Fig. 4) peuvent apparaître successivement mais pas simultanément. L'équivalent de la ligne BD n'est d'ailleurs pas visible dans les expériences de Verdeyen et de ses collaborateurs qui sont les plus représentatives du problème étudié par Kranz.

Notons toutefois que ces études de rupture sur modèle présentent l'inconvénient, comme du reste la méthode de Kranz, d'étudier l'effet d'une surcharge horizontale ou dans la direction du tirant, ce qui ne correspond pas en général au problème réel. Des essais réalisés avec d'autres moyens (centrifugeuse) permettraient d'éviter ce biais.

#### 4.2

### Critiques sur le choix du paramètre mesurant la sécurité

Jelinek et Ostermeyer (1967b) font également des critiques sur le choix fait par Kranz du paramètre représentant la sécurité :

- la force de traction dans l'ancrage est une force intérieure au massif et n'a en aucun cas d'influence sur la stabilité globale du système ; ils raisonnent sur des

schémas de rupture à un seul bloc (voir figures 7-II, 8) à la différence de Kranz qui utilise toujours deux blocs et qui n'étudie donc pas la stabilité globale du système ;

– le coefficient de sécurité proposé par Kranz : traction maximale supportable  $P$ /traction  $A$  résultant de la poussée des terres ne convient pas. Cette définition conduit notamment à ce que l'application d'une précontrainte dans l'ancrage diminue la sécurité ce qui est anormal si on considère, comme eux, des schémas de rupture à un seul bloc. Il faut noter que dans leur raisonnement la traction  $A$  n'est plus la traction découlant simplement de l'état limite de poussée des terres contre le mur.

Ranke et Ostermeyer reprennent et complètent ces critiques (1968). Ils reprochent au coefficient de sécurité de Kranz de comparer une force interne et une force externe. Mais ils se résignent à utiliser ce coefficient de sécurité car ils sont forcés de constater qu'un système alternatif de coefficients de sécurité partiel ne s'est pas encore imposé pour ce type de travaux.

5

## Les variantes de la méthode de Kranz

On peut considérer qu'il y a dans la méthode de Kranz deux éléments essentiels :

- un certain choix du bloc dont il faut étudier la stabilité ;
- une définition particulière d'un coefficient de sécurité.

La méthode de Kranz est restée longtemps appliquée en Allemagne en gardant le bloc préconisé par Kranz (option II de la figure 4) : voir par exemple (EAU, 1990). Jessberger (1963) l'a adaptée au cas des ancrages

scellés par injection, en proposant d'effectuer le calcul comme s'il y avait un mur d'ancrage situé à la moitié de la longueur de la zone scellée.

On constate de nombreuses variantes depuis le texte de Kranz (1939) ; elles portent principalement sur le choix des blocs étudiés : le nombre de blocs, la nature géométrique des frontières entre blocs. D'autres auteurs ont proposé de changer la définition du coefficient de sécurité.

5.1

### Choix d'un seul bloc

D'une manière générale, les variantes n'ont plus pris en compte une décomposition du massif de terre entre ancrage et écran en 2 blocs.

Ceci a pour conséquence de clarifier le type d'analyse que l'on mène : avec la méthode de Kranz originelle, on pouvait penser saisir quelque chose de la stabilité interne du massif de contour extérieur ACDEF puisqu'on envisage sa rupture le long de la ligne BE. Les méthodes modifiées consistent clairement à étudier la stabilité externe du massif A'CD'F.

5.2

### Forme géométrique de la surface de rupture

Les variantes portent aussi sur la forme de la surface de rupture. Elle peut être composée de deux ou plusieurs segments de droite, d'arc de cercle ou d'arc de spirale logarithmique.

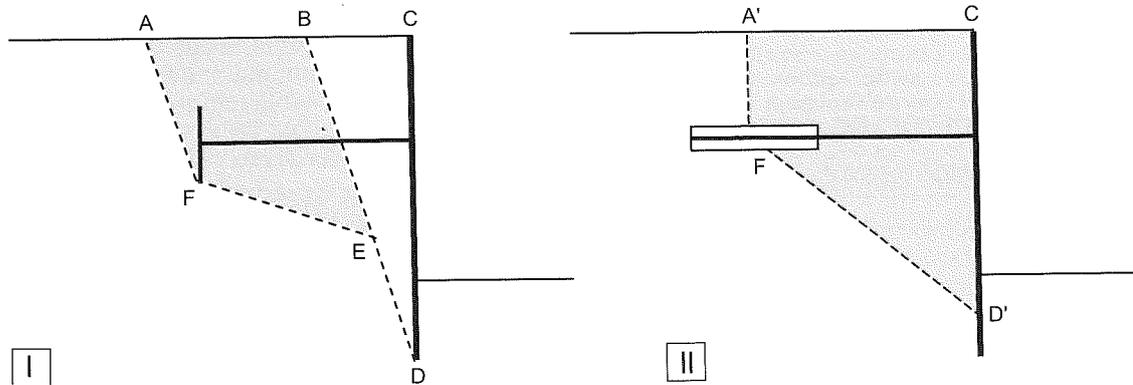


FIG. 7 **Changement dans le choix du bloc considéré I : méthode de Kranz originelle ; II : méthode modifiée voir par exemple (ROSA 2000).**  
Change in the choice of the considered block : I original method of Kranz ; II modified method e.g. (ROSA 2000).

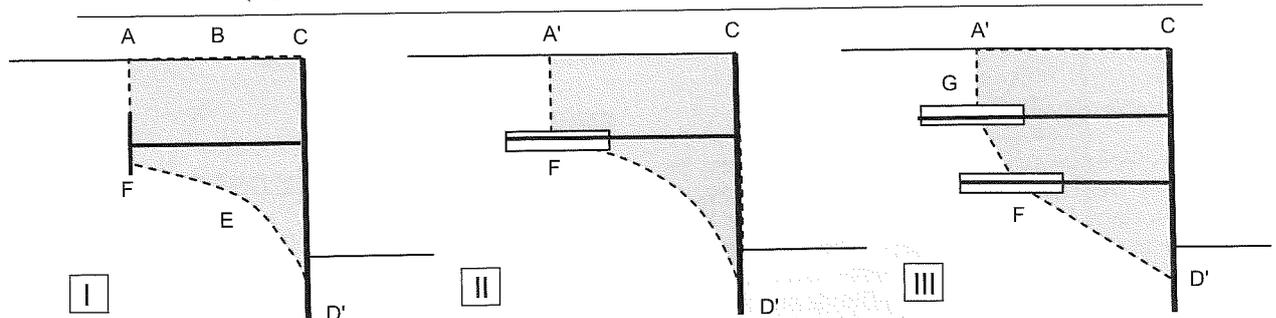


FIG. 8 **Différents choix de géométrie de la ligne de rupture : I : spirale logarithmique ; II : arc de cercle ; III : segments de droite.**  
Various choices of the failure line : I : logarithmic spira ; II : arc of a circle ; III : straight segments.

## Définition du coefficient de sécurité

Nous pouvons reprendre la synthèse faite par Houy (1986). Les segments de droite avaient été retenus par Kranz, la spirale logarithmique par Jelinek et Ostermeyer (1967a, 1967b), Verdeyen et Nuyens (1964) et Brinch Hansen et Lungren (1960). Les arcs de cercle ont été proposés par Brinch-Hansen (1953), Cambefort (1975) et TA 95, comme approximation de la spirale logarithmique. Les trois possibilités sont envisagées dans le projet de norme écrans (Pr NF P94-282).

Notons que Houy (1986) propose d'appliquer un coefficient de réduction à la force maximale dans l'ancrage évaluée par la méthode de Kranz. Cette réduction dépend de l'angle de frottement interne du sol. Elle est évaluée en prenant en considération une ligne de rupture en spirale à la place du segment de droite de Kranz.

## Limites du bloc étudié

Les auteurs varient aussi sur les limites du bloc sur la surface horizontale supérieure du massif et sur la paroi.

Dans la méthode originelle de Kranz (1939), la ligne de rupture passe par la partie inférieure de l'ancrage et s'éloigne de la paroi en faisant un angle de  $\pi/4 - \phi/2$  avec la verticale (ligne AF de la figure 7-I). Pour les autres auteurs, la ligne de rupture rejoint verticalement la surface supérieure du massif (ligne FA' de la figure 7-II) avec prise en compte de la poussée sur FA', ce qui n'est pas strictement équivalent si on se place dans le cadre rigoureux de l'approche cinématique du calcul à la rupture.

L'intersection de la ligne de rupture et de la paroi est fixée à l'extrémité inférieure de la paroi pour la méthode originelle de Kranz. Jelinek et Ostermeyer (1967a, b), Brinch Hansen et Lundgren (1960) reprennent la même option. Mais en général, c'est le point d'effort tranchant nul qui est retenu comme lieu de formation d'une rotule, voir par exemple Balay (1988), Houy (1986). Le projet de norme écrans (Pr NF P94-282) comporte une annexe informative intitulée « Procédure pour vérifier la stabilité du massif d'ancrage ». Cette annexe garde ouvertes beaucoup d'options de calcul tout en gardant la définition de Kranz de la condition de stabilité. Cette annexe prend acte que la vérification se fait habituellement en utilisant comme limite du bloc le point d'effort tranchant nul, mais indique néanmoins qu'il est loisible d'envisager d'autres positions. Dans ce cas, si la charge déstabilisante est trouvée inférieure pour une autre position, il convient « d'examiner si on est dans une configuration qui sort du domaine d'ouvrages pour lesquels on peut considérer que la procédure habituelle (M au point d'effort tranchant nul) a été validée ».

Enfin, le troisième point à fixer est celui déterminé par la position du bord inférieur du dispositif d'ancrage. La méthode originelle de Kranz (1953) envisageait des plaques d'ancrage ou un rideau. La ligne de rupture choisie passait par le bord inférieur de cette plaque ou de ce rideau. Dans le cas d'un ancrage du type scellement, la recommandation usuelle est de faire passer la ligne de rupture par la moitié de la zone de scellement (Ranke et Ostermeyer, 1968). Mais Strom et Ebeling (2002) proposent de fixer ce point au tiers de la longueur de scellement à partir de l'extrémité libre.

Nous avons déjà rappelé les critiques émises par Jelinek et Ostermeyer (1967b) et Ranke et Ostermeyer (1968) sans recommander d'alternative. Littlejohn (1972) recommande le changement du coefficient de sécurité en proposant de le définir de la manière suivante :

$$F = \frac{\tan \phi'}{\tan \phi'_n} \quad (3)$$

où  $\phi'_n$  est l'angle de frottement interne minimal permettant d'assurer l'équilibre et  $\phi'$  est l'angle de frottement interne du sol.

Cette idée est reprise ultérieurement par Schulz (1976) et Ostermeyer (1977).

## Discussion : quelle approche proposer ?

### Une certaine confusion

La méthode de Kranz et ses variantes, bien que largement répandues, soulèvent des doutes dans l'esprit de nombreux praticiens. Les variantes sont nombreuses. Les incompréhensions ne sont pas rares. A titre d'anecdote, nous donnons ici (Fig. 9) un exemple d'interprétation erronée de la méthode de Kranz.

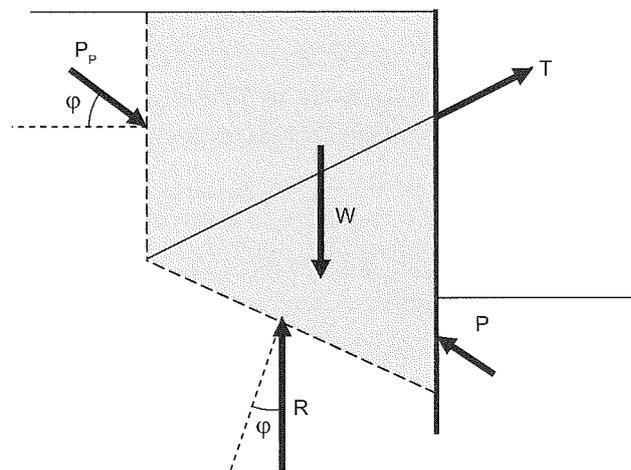


FIG. 9 Inventaire des forces : exemple d'interprétation erronée de la méthode de Kranz. Inventory of forces : example of erroneous interpretation of Kranz's method.

On voit ici l'erreur : ou le système comporte outre le bloc de sol la partie de paroi contiguë et alors la force  $T$  sur le tirant est une force intérieure au système, ou le système se limite au bloc de sol, alors il faut ajouter la réaction de la paroi sur le sol.

6.2

### Étude de l'effort d'arrachement ou de la stabilité suivant une ligne de glissement profonde ?

Il est indispensable lorsqu'on considère ces mécanismes avec un bloc rigide de séparer la question de l'équilibre interne et de l'équilibre externe. La question de l'équilibre interne est celle de la résistance du tirant et de l'arrachement. Cette question de l'arrachement est primordiale. Kranz essayait de l'aborder puisque le bloc qu'il considère est une sous-partie du bloc considéré dans les approches ultérieures. De même sa définition du coefficient de sécurité devient tout à fait naturelle dans cette perspective.

Mais cette approche pose des problèmes et tout d'abord celui de la nature de l'ancrage : autant on pouvait légitimement essayer d'appliquer les méthodes usuelles d'équilibre limite pour un mur d'ancrage, autant, ces méthodes paraissent inapplicables pour les plaques d'ancrage où l'effet 3D est déterminant et pour les ancrages scellés qui sont maintenant la solution usuelle.

Cette évolution a certainement contribué à ce qu'on renonce à traiter l'arrachement par la modélisation et le calcul. Cette question est réglée pour l'instant par les essais de traction des tirants. Dans la pratique française, les vérifications de type Kranz ne visent plus à vérifier cette résistance à l'arrachement. Elles ne peuvent plus espérer le faire d'ailleurs puisqu'elles considèrent l'ancrage et le bloc de sol compris entre le mur et l'ancrage comme un ensemble. Pour essayer de saisir cet effet d'arrachement il faudrait revenir à des schémas de rupture plus complexes comme ceux envisagés par Kranz.

De ce fait, la stabilité des blocs doit maintenant être comprise clairement comme un examen de stabilité externe pour le bloc étudié.

6.3

### Inadaptation du coefficient de sécurité de Kranz pour l'étude de la stabilité globale du bloc pour une ligne de glissement profonde

Pour l'étude de cette stabilité externe ce sont les forces de calcul (forces réelles éventuellement majorées par un coefficient de sécurité partiel) qui doivent être utilisées. Faire intervenir une force de traction supplémentaire dans la direction de l'ancrage ne paraît pas compatible avec la démarche des ELU telle qu'elle est comprise dans les Eurocodes. Or nous allons voir que les méthodes dérivées de la méthode de Kranz reviennent à étudier un état ultime sous l'effet d'une force extérieure complémentaire. C'est ce que notaient déjà Jelinek et Ostermeyer (1967b), avec la simplification de forces de poussée et de butée sans inclinaison (frottement nul).

Nous allons suivre ici la variante détaillée dans les recommandations (TA 95). Considérons par exemple l'inventaire des forces figurant dans (TA 95) (Fig. 10).

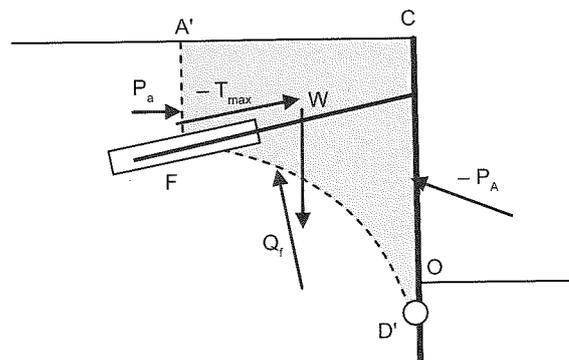


FIG. 10 Inventaire des forces d'après une méthode dérivée de celle de Kranz (TA 95). Inventory of forces according to a method derived of Kranz's (TA 95).

Le système considéré est le massif de sable A'CD'F (figure 10). Il ne comporte ni la paroi ni l'ancrage. L'ancrage applique une force  $T$  au massif de sol et la paroi exerce une force  $-P_A$  réaction à la poussée. Le point  $D'$  est le point d'effort tranchant nul. Il s'agit de déterminer la force  $T_{max}$  maximale compatible avec l'équilibre.

Quittant maintenant la démarche du document TA 95, on considère les forces qui s'exercent sur la partie CD' du mur d'ancrage (Fig. 11-I). On a : la force de poussée du mur  $P_A$ , la traction  $T$  dans le tirant, la force normale dans le mur  $N$  (l'effort tranchant est supposé nul en  $D'$ ). Pour fermer le funiculaire des forces il faut ajouter une force horizontale  $F$  appliquée au mur.

On considère maintenant comme système l'ensemble formé du massif de sable A'CD'F de l'ancrage et de la partie de la paroi D'C. On se rapproche ainsi de la démarche du FHWA (1999). Pour ce nouveau système les forces sont le poids  $W$ , la poussée  $P_a$ , la butée  $P_p$  sur partie D'O,  $Q_r$  la résultante des forces sur D'F,  $N$  l'effort normal en  $D'$  dans la paroi. Si le coefficient de sécurité sur la traction était de 1, on aurait la traction maximale qui fermerait le funiculaire des forces avec les différentes autres forces. Pour arriver à mobiliser la traction jusqu'à  $T_{max}$ , il faut ajouter une force extérieure  $F$  égale à la projection horizontale de  $T_{max} - P_A - P_p$ . (Fig. 11). Déterminer la force  $F$  extérieure maximale supportable est équivalent à déterminer  $T_{max}$ .

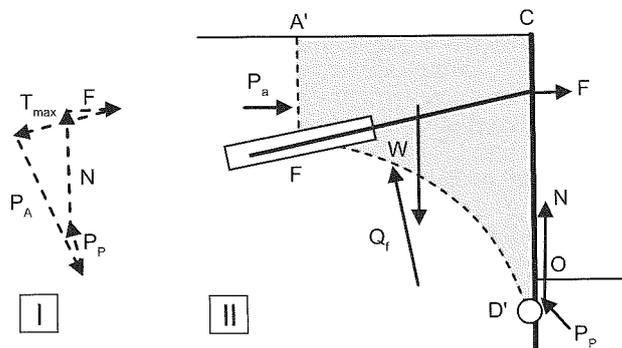


FIG. 11 Introduction d'une force extérieure  $F$  remplaçant la réaction du mur et l'effort transmis par l'ancrage au terrain. I : diagramme des forces s'exerçant sur la partie CD' du mur ; II : inventaire des forces s'exerçant sur l'ensemble bloc + paroi.

Introduction of an external force  $F$  replacing the reaction of the wall and the effort passed on by the anchoring to the ground. I : diagram of forces exercising on the part CD' of the wall ; II : inventory of forces exercising on the set block + wall.

Il devient alors clair que la méthode proposée par TA95 revient à évaluer la stabilité sous l'effet d'une charge extérieure  $F$ . Faire intervenir une telle force qui n'existe pas dans le chargement réel revient à changer de problème. Ceci est notamment de nature à changer les lignes de rupture les plus défavorables et ce sans raison (voir annexe A).

Le coefficient de sécurité associé à Kranz est généralement pris égal à 1,5. On a la condition :

$$\frac{T_{\max}}{T} \geq 1,5 \quad (4)$$

Cette condition peut être réécrite en exprimant  $T_{\max}$  en fonction des projections horizontales de  $F$ , de  $P_A$  de  $P_p$  et de  $N$  et en désignant par l'indice  $h$  la composante horizontale des forces :

$$\frac{T_{\max}}{T} = \frac{(T_{\max})_h}{(T)_h} = \frac{(P_A)_h - (P_p)_h + F}{(P_A)_h - (P_p)_h} \geq 1,5 \quad (5)$$

Soit :

$$F \geq 0,5 ((P_A)_h - (P_p)_h) \quad (6)$$

Cette condition porte finalement sur la résistance du système à une sollicitation extérieure fictive  $F$ , qui ne figure pas parmi les sollicitations agissant sur le système. Ceci conduit à proposer l'abandon du coefficient de sécurité défini par Kranz, compte tenu de son usage actuel.

L'autre point faible soulevé par Jelinek et Ostermeyer (1967b) est que la force réelle dans l'ancrage ne doit pas avoir d'influence sur cette stabilité de glissement sur une ligne de rupture profonde. C'est une autocontrainte dont on peut imposer la valeur, au moins dans un certain intervalle, par un dispositif mécanique comme un vérin.

## 6.4

## Les alternatives actuelles dans les pays anglo-saxons

Dans certains pays, la méthode de Kranz ou ses méthodes dérivées ne semblent pas utilisées, notamment en Grande-Bretagne et aux États-Unis. Notons que l'ouvrage sur les parois moulées (SEI/ASCE 2000) traite du cas des butons mais pas des tirants ancrés. La présentation de Terzaghi en 1953 à l'ASCE ne fait pas non plus référence à la méthode de Kranz (traduction allemande, Terzaghi, 1957).

## 6.4.1

### Le cas de la norme BSI

La norme (BSI, 1994) prévoit trois types d'ancrage par « corps mort » (*deadman anchors*) par pieux travaillant en tension ou par pieu ancré (*anchor pile*). Le cas avec des pieux sous tension est très différent puisqu'il reporte la charge de l'ancrage loin de l'extrémité du tirant.

Deux cas sont distingués : ou les zones active et passive n'interfèrent pas ou elles interfèrent. Si elles interfèrent, l'espace compris entre les deux parois doit être considéré comme un seul bloc dont il faut étudier la stabilité au glissement sur le plan de rupture inférieur. La stabilité interne de ce bloc doit aussi être considérée. Cette norme semble plutôt conçue en pensant au cas d'un ancrage réalisé par un rideau arrière.

## Le cas du manuel FHWA

Le manuel FHWA (1999) envisage le problème du dimensionnement de la partie libre de l'ancrage (p. 67-68). Cette longueur doit permettre de localiser la partie ancrée à une distance minimale de la surface de rupture potentielle critique, de localiser la zone d'ancrage dans un sol adapté à l'ancrage, d'assurer la stabilité globale du système ancré, de supporter les mouvements à long terme. En général, la partie libre doit être à une distance minimale de  $H/5$  ou de 1,5 m derrière la surface de rupture potentielle critique. Dans un sol sans cohésion, on peut supposer que cette surface est celle qui limite la zone de poussée (angle de  $(45^\circ + \phi/2)$  avec l'horizontale en partant du fond de l'excavation).

Une estimation plus précise de cette surface de rupture peut être faite en cherchant l'angle  $\alpha$  conduisant à la plus forte tension dans l'ancrage (Fig. 12).

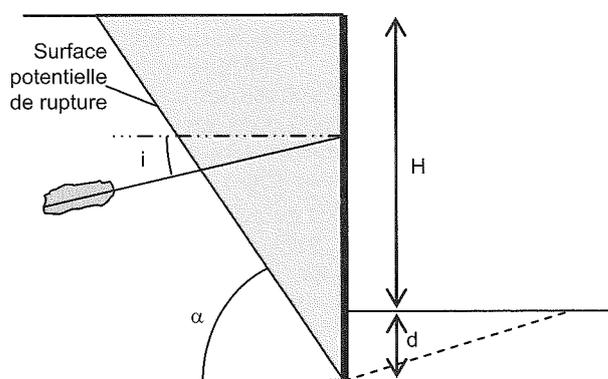


FIG. 12 Exemple d'un mur ancré d'après (FHWA, 1999).

Example of an anchored wall according to (FHWA, 1999).

Cette analyse prend comme système le bloc de sol en grisé et le mur sans l'ancrage. Elle considère que la zone de rupture potentielle est située en dehors de la zone d'ancrage du tirant et que l'on peut bénéficier pleinement de la résistance du tirant.

La force  $P$  que doivent reprendre la composante horizontale de la force d'ancrage et la force résistante horizontale du mur est :

$$P = \frac{1}{2} \gamma H^2 \left[ \frac{(1 + \xi)^2}{\tan \alpha} - K_p \xi^2 (\sin \delta + \frac{\cos \delta}{\tan(\alpha - \phi)}) \right] \tan(\alpha - \phi) \quad (7)$$

avec  $\gamma$  le poids volumique du sol,  $\delta$  l'angle de frottement sol/mur et  $\zeta = d/H$ . On choisit  $\alpha$  qui maximise  $P$ .

## 6.5

## Une possibilité : aller vers des méthodes de calcul de type plus général analysant la stabilité de blocs

Une alternative naturelle est d'appliquer à la stabilité de différents blocs les méthodes utilisées de manière habituelle pour d'autres types d'ouvrages où on étudie la stabilité de blocs délimités par différentes lignes de rupture. Cela constituerait en quelque sorte un retour à Möller (1933) qui au sujet des parois ancrées prescrit : « Il faut toujours s'assurer que la construction présente une sécurité suffisante par rapport à un plan de glissement arbitraire ».

Là encore plusieurs possibilités s'ouvrent ; ne retenir *a priori* que quelques lignes de rupture, soit optimiser le choix d'une ligne de rupture parmi toutes celles possibles, ce qui suppose d'avoir des outils de calcul adaptés.

L'annexe B évoque sommairement cette possibilité qui est semblable à celle proposée pour les murs à ancrages multiples (Schlosser, 1991). Il s'agit là d'une méthode utilisant des outils plus récents (calcul à la rupture, logiciels) que la méthode de Kranz.

7

## Conclusion

La méthode originelle de Kranz et ses nombreuses variantes ont pour objectif de vérifier la stabilité d'un ouvrage en prenant en compte la longueur des ancrages. Elles diffèrent par le choix du bloc dont on étudie la stabilité. En revanche, elles reprennent le coefficient de sécurité typique de la méthode de Kranz qui est le rapport entre la force maximale et la force qui découle du calcul de poussée. La détermination de cette force maximale revient à l'étude de la stabilité quand on applique une force extérieure déstabilisatrice. C'est ce qui a été reproduit (ou à peu près) dans les expériences déjà anciennes qui ont été rappelées. Cela correspond en fait à l'étude d'un problème qui diffère du problème réel.

Ce calcul pourrait être remplacé, d'une part, par des dispositions constructives telles que proposées par des documents britannique et américain et, d'autre part, par des calculs de stabilité utilisant des lignes de rupture et menés suivant les méthodes classiques compatibles avec l'Eurocode 7. Bien entendu, une telle évolution ne peut être recommandée que si toutes les dispositions pour la mise en œuvre pratique sont prévues, comme le demande Heibaum (2005).

### REMERCIEMENTS

L'auteur tient à remercier Emmanuel Bourgeois pour une relecture critique d'une version antérieure.

## Annexe A

### L'introduction d'une force extérieure horizontale fait varier la ligne de rupture optimale

Nous allons donner un exemple *le plus simple possible*, dans le cadre du calcul à la rupture (approche cinématique). Nous supposons que le sol est purement cohésif de cohésion  $C$ . Il y a une surcharge verticale imposée  $F_v$  et le poids  $W$  est dû à un poids volumique homogène  $\gamma$  (Fig. 10). Nous étudions la stabilité d'un prisme de Coulomb.

Nous allons vérifier que le choix de l'angle optimal  $\alpha$  dépend de la force horizontale appliquée.

On évalue la puissance des forces extérieures  $P_e$  et la puissance résistante maximale  $P_{rm}$  :

$$P_e = U(F_h \sin \alpha + F_v \cos \alpha + \frac{\gamma H^2}{2} \sin \alpha) \quad (\text{A.1})$$

$$P_{rm} = U \frac{HC}{\cos \alpha} \quad (\text{A.2})$$

La condition nécessaire de stabilité s'écrit :

$$C \geq \left( \frac{\gamma H}{2} + \frac{F_h}{H} \right) \sin \alpha \cos \alpha + \frac{F_v}{H} \cos^2 \alpha \quad (\text{A.3})$$

Clairement, le choix optimal de  $\alpha$  dépend du rapport

$$\frac{F_h + \gamma H^2 / 2}{F_v} \text{ et est donc influencé par } F_h.$$

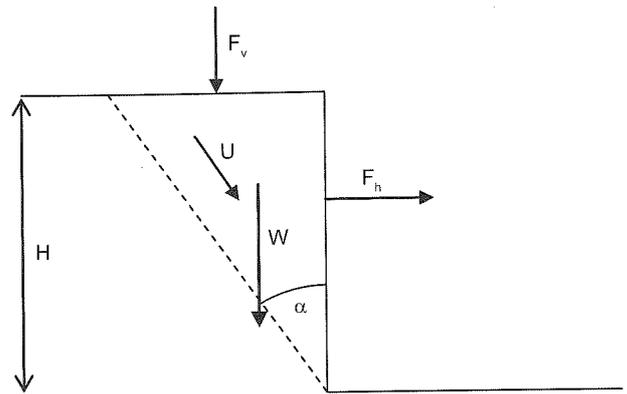


FIG. A1

Exemple montrant qu'une force horizontale supplémentaire influence les lignes de rupture.

Example showing that a supplementary horizontal force influences the failure lines.

## Annexe B

### Aller vers des méthodes utilisées pour d'autres ouvrages ?

Une alternative naturelle est d'étudier la stabilité de différents blocs selon les méthodes utilisées de manière habituelle pour d'autres types d'ouvrages : étude de la stabilité de blocs suivant des lignes de rupture. Là encore, plusieurs possibilités s'ouvrent ; ne retenir *a priori* que quelques lignes de rupture, soit optimiser le choix d'un ligne de rupture parmi toutes celles possibles, ce qui suppose d'avoir des outils de calcul adaptés. La disponibilité de moyens de calculs permet aujourd'hui de ne pas se limiter aux segments droits mais d'envisager cercles ou arcs de spirale logarithmique.

On peut ainsi définir comme condition à vérifier que le travail des forces motrices agissant sur le bloc soit inférieur avec un coefficient de sécurité partiel au travail de forces résistantes (poids, surcharges) ; ces forces résistantes sont les forces de cisaillement le long de la ligne de rupture et une contribution éventuelle de la résistance d'un ancrage coupé par la ligne de rupture envisagée. Une telle définition est adaptée à une démarche type calcul à la rupture comme suggéré par le projet de norme « écrans » (Pr NF P94-282), mais on peut aussi l'écrire comme le rapport des forces de

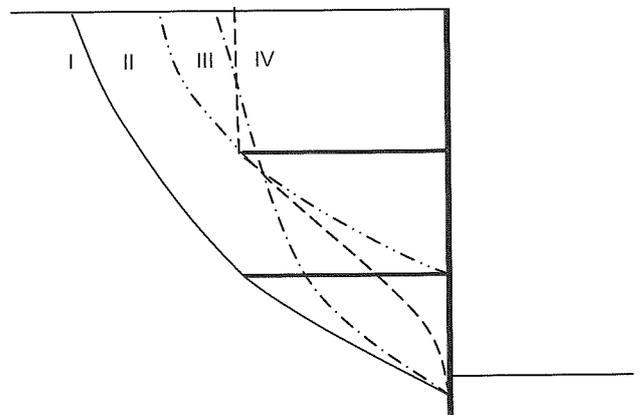


FIG. B1

Exemples de lignes de rupture pour la vérification des longueurs d'ancrage.

Examples of failure lines for the check of the anchoring length.

cisaillement nécessaires sur la résistance au cisaillement. Il faut bien noter qu'un calcul de ce type prend en compte de manière explicite la résistance des ancrages ainsi que leurs longueurs, alors que la méthode de Kranz ne s'intéresse qu'à la longueur.

Par ailleurs, la prise en compte de telles lignes coupant éventuellement tirant ou bulbe d'ancrage permet de prendre en compte l'éventuelle interaction entre longueur du tirant et résistance du tirant et de son ancrage dans le dimensionnement (Aljewifi, 2006). Cette interaction intervient quand on abandonne l'hypothèse simplificatrice du point d'ancrage fictif situé à la moitié de la zone d'ancrage. On peut notamment prendre comme hypothèse que la résistance de l'ancrage dans le sol à prendre en compte est proportion-

nelle à la partie laissée en dehors du massif par la ligne de rupture considérée. Cette possibilité est offerte par certains programmes de calcul (TALREN, 2005). Une telle méthode se rapprocherait très sensiblement de ce qui est préconisé pour les états limites ultimes des sols renforcés (Schlosser et Unterreiner, 1994), (Clouterre, 1991) et plus encore des murs à ancrages multiples (Schlosser, 1991). Elle engloberait à la fois la vérification de la stabilité globale et celle de la longueur des ancrages et de la résistance des tirants.

Enfin, l'utilisation du calcul à la rupture, peut déjà permettre d'envisager des mécanismes de rupture plus complexes avec par exemple deux blocs, ce qui se rapprocherait de certaines observations expérimentales, au prix toutefois d'une certaine complication.

## Bibliographie

- Aljewifi H. – Stabilité d'un écran ancré : longueur d'ancrage, rapport de stage master MSROE, ENPC, 2006, 35 p.
- Agatz A. – *Der Kampf des Ingenieurs gegen Erde und Wasser im Grundbau*, Springer Verlag, 1936, 276 p.
- Anderson W.F., Hanna T.H., Abdel-Malek, M.N. – Overall stability of anchored retaining walls. *Journal of Geotechnical Engineering*, ACSE, vol. 109, n° 11, 1983, p. 1416-1433.
- Balay J. – Parois moulées ancrages. *Techniques de l'ingénieur*, C 252, 1988, 12 p.
- Brennecke L. – *Der Grundbau*. Verlag Deutsche Bauzeitung, Berlin, 1906, 595 p. (3<sup>e</sup> éd.).
- Brennecke L., Lohmeyer E. – *Der Grundbau*, tome 2. Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1930, 278 p. (4<sup>e</sup> éd.).
- Brinch Hansen J. – *Earth Pressure calculation*. Danish Technical Press, Copenhagen, 1951.
- Brinch Hansen J., Lungren H. – Hauptprobleme der Bodenmechanik, Springer-Verlag, Berlin, 1960, 282 p.
- BSI – Code of Practice for earth retaining structures, BS 8002. British Standards Institution, 1994, 112 p.
- Buchholz W. – Erdwiderstand auf Ankerplatten, in *Jahrbuch der Hafenbautechnischen Gesellschaft. Zwölfter band 1930-1931*, Verlag der Hafenbautechnischen Gesellschaft, Hambourg, 1932, p. 300-326.
- Buchholz W., Petermann H. – Berechnungsverfahren für Ankerplatten und Wände. *Der Bauingenieur*, Heft 19/20, 1935, p. 227-230.
- Cambefort H. – Parois de soutènement maintenues par une ligne d'ancrage. *Annales ITBTP*, n° 333, novembre 1975, p. 25-44.
- Clouterre – *Recommendation Clouterre 1991 pour la conception, le calcul, l'exécution et le contrôle des soutènements réalisés par clouage des sols*. Presses de l'ENPC, 1991, 272 p.
- Dean A.C. – *Piles and Pile Driving*. Crosby Lockwood & Son Ltd, London, 1935.
- DIN 1054 – *Ground Verification of the safety of earthworks and foundations* (version anglaise de Baugrund Sicherheitsnachweise im Erd und Grundbau), Beuth Verlag, Berlin, 2005, 123 p.
- EAU 2004 – *Recommendations of the Committee for Waterfront Structures Harbours and Waterways*. 8<sup>th</sup> English edition, Translation of the 10<sup>th</sup> German edition, John Wiley and Sons, 2006, 636 p.
- EAU 1990 – *Recommendations of the Committee for Waterfront Structures Harbours and Waterways*. 6<sup>th</sup> English edition, Ernst & Sohn, Berlin, 1992, 623 p.
- Franzius O. – *Der Grundbau*, Julius Springer, Berlin, 1927, 360 p.
- FHWA – Geotechnical Engineering Circular n° 4, Ground Anchors and Anchored Systems, publication N° FHWA-IF-99-015, U.S. Department of Transportation, 1999, 281 p.
- Hanna T.H., Matallana G.Z. – The behavior of tied-back retaining walls. *Canadian Geotechnical Journal*, vol. 7, 1970, p. 372-396.
- Heibbaum M. – Neue Regeln für Erdstatische Nachweise und daraus abgeleitete Empfehlungen. *Hansa* n° 11/2005, (<http://hansa-online.de/print.asp?artikelID=600>).
- Houy A. – Dimensionnement des ouvrages en palplanches en acier, édité par l'auteur, Metz, 1986, 492 p.
- Jelinek R., Ostermeyer H. – Zur Berechnung von Fangedämmen und verankerten Stützwänden. *Die Bautechnik*, 44, n° 5, 1967a, p. 167-171.
- Jelinek R., Ostermeyer H. – Zur Berechnung von Fangedämmen und verankerten Stützwänden. *Die Bautechnik*, 44, n° 6, 1967b, p. 203-207.
- Jessberger H.L. – Theorie und Praxis eines neuzeitlichen Verankerungsverfahrens. *Die Bautechnik*, n° 7, 1968, p. 226-232.
- Kranz E. – Die Arbeiten und Bauten auf den Ostfriesischen Inseln von Borkum bis Speikerooog. *Jahrbuch der Hafenbautechnischen Gesellschaft. Zwölfter band 1930-1931*, Verlag der Hafenbautechnischen Gesellschaft, Hambourg, 1932, p. 174-180.
- Kranz E. – Über die Verankerung von Spundwänden, 1<sup>re</sup> éd. 1940, Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 2<sup>e</sup> éd. 1953, 53 p.
- Krey H. – *Erddruck, Erdwiderstand und Tragfähigkeit des Baugrundes in grössere Tiefe*. Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 2<sup>e</sup> éd. 1918.
- Krey H. – *Erddruck, Erdwiderstand und Tragfähigkeit des Baugrundes*. Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 5<sup>e</sup> éd. 1936.
- Littlejohn G.S. – Anchored Diaphragm Walls in Sand. *Anchor Design, Ground Engineering*, vol. 5, n° 1, 1972, p. 12-17.
- Möller M. – *Erddruck-Tabellen mit Erläuterung über Erddruck und Verankerungen*. S. Hirzel, Leipzig, 1902.
- Müller-Breslau H. – *Erddruck auf Stützmauern*. Alfred Kröner Verlag, Stuttgart, 1<sup>re</sup> éd. 1906, 2<sup>e</sup> éd. 1947.
- Möller M. – *Erddruck-Tabellen mit Erläuterung über Erddruck und Verankerung*. Verlag von S. Hirzel, Leipzig, 1902, 148 p.
- Möller M. – *Poussée des terres*. Édition française revue et complétée par H. Lurié, Paris et Liège, Librairie polytechnique Ch. Béranger, 1933, 324 p.
- Pascal R. – Conception et calcul des murs de quai à tirants. *Annales des ponts et chaussées*, 1957, p. 319-355 et 445-472.
- Ohde J. – Zur Theorie des Erddruckes unter besonderer Berücksichtigung der Erddruckverteilung. *Die Bautechnik*, 1938, p. 150-159, 176-180, 241-245, 331-335, 480-487, 570-571, 753-761.
- Ostermeyer H. – Practice in the Detail Design Application of Anchorages. *A review of Diaphragm walls*, Institution of civil Engineers, London, 1977, p. 55-61.
- Peterman H. – Bewegung und Kraft bei Ankerplatten. *Der Bauingenieur*, Heft 43/44, 1933, p. 531-536.
- Pile Buck – History and types of sheet piling, (<http://pz27.pilebuckinternational.com/overview/history.php>), 2007.
- Pr NF P94-282 – Calcul géotechnique, Ouvrages de soutènement, Écrans, projet de norme française, AFNOR, version du 20/11/2006, 193 p.
- Ranke A., Ostermeyer H. – Beitrag zur Stabilitätsuntersuchung mehrfach verankerter Baugrubenumschließungen. *Die Bautechnik*, 45, n° 10, 1968, p. 341-350.
- ROSA 2000 – Recommendation pour le calcul aux états limites des ouvrages en site aquatique, série ouvrages, fascicule « Rideaux de soutènement », CD Rom, CETMEF, 2001, 44 p.
- Rowe P.W. – *Anchored sheet-pile walls*. The Institution of Civil Engineers, London, 1952.
- Roth S. – Steel sheet pile as prefabricated elements in harbour construction. *Bulletin de l'AIPCN* (Association internationale des congrès de navigation), n° 59, 1987, p. 101-117.

- Schlosser F. – Murs de soutènement. *Techniques de l'Ingénieur*, traité Construction, document C244, 1991, 23 p.
- Schlosser F., Unterreiner P. – Renforcement des sols par inclusions, in *Techniques de l'Ingénieur*, traité Construction, document C 245, 1994, 19 p.
- Schulz H. – The Definition of the Factor of Safety of Multi-Tied Back Walls, Proceedings. *6th European Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering*, Vienne, vol. 2, 1976, p. 473-478.
- SEI/ACSE 2000 – Effective Analysis of Diaphragm Walls, ACSE, 98 p.
- Strom R.W., Ebeling R. – Methods Used in Tieback Wall Design and Construction to Prevent Local Anchor Failure, Progressive Anchorage Failure, and Ground Mass Stability Failure. USACE, ERDC/ITL TR-02-11, 2002, 178 p.
- T.A. 72 – *Recommandations concernant la conception, le calcul, l'exécution et le contrôle des tirants d'ancrage*. Eyrolles, 123 p.
- T.A. 95 – *Tirants d'ancrage. Recommandations concernant la conception, le calcul, l'exécution et le contrôle*. Eyrolles, 151 p.
- TALRE, 2005, TALREN 4 – Manuel d'utilisation. Société Terrasol, 128 p.
- Terzaghi – *Verankerte Spundwände*. VEB Verlag Technik Berlin, 1957 (traduction de Transactions of ASCE, 1953).
- Verdeyen J., Nuyens J. – Vérification expérimentale des méthodes de calcul des rideaux d'ancrage de palplanches simplement ancrées. *Symposium Rhéologie et mécanique des sols*, Grenoble 1-4/1964, sous la direction de J. Kravtchenko et P.M. Sirieys, Springer, 1966, p. 416-428.
- Verdeyen J., Roisin V., Nuyens J. – Applications de la mécanique des sols, volume 2, Vander, Louvain, Dunod, Paris, 1971, 463 p.
- Verdeyen J., Roisin V. – Relation entre les effets des surcharges extérieures concentrées et les caractéristiques des écrans souples. *Comptes rendus du 5<sup>e</sup> congrès international de Mécanique des Sols et des Travaux de Fondations*, Pais, 17-22 juillet 1961, tome 2, Dunod, p. 501-508.
- Weißbach A. – Gelbdruck DIN 1054. Sicherheitsnachweise im Erd und Grundbau. *Der Prüfingenieur*, n° 20, 2002, p. 17-25.

# Formules pour le calcul du tassement des sols compressibles par la méthode œdométrique

**O. COMBARIEU**

*Ingénieur ESTP*

*HDR université de Caen  
591 E, rue de Strasbourg  
76320 Caudebec-lès-Elbeuf*

## Résumé

Cet article fournit, pour les principales situations géotechniques courantes, des expressions simples d'utilisation, facilitant le calcul du tassement des couches de sols compressibles à partir des résultats œdométriques classiques. Quelques exemples numériques sont traités, qui montrent, tout particulièrement dans le cadre des techniques d'amélioration des sols, l'importance de la surconsolidation et des nappes d'eau avec la nécessité, pour ces dernières, d'en cerner au mieux les variations.

*Mots-clés* : œdomètre, tassement, gonflement, nappe, sol compressible, amélioration des sols, inclusions rigides.

## Expressions for compressible soils settlement by oedometric method

## Abstract

This article gives for the main usual geotechnical situations simple expressions, which facilitate the settlement calculation of compressible soil layers, from classical oedometer tests. Some numerical examples are given that show importance of water table's variation, especially in case of use of soil improvement technics.

*Key words* : oedometer test, settlement, swelling, water table, compressive soil, ground improvement, stiff inclusions.

*NDLR : Les discussions sur  
cet article sont acceptées  
jusqu'au 1<sup>er</sup> septembre 2009.*

## Introduction

Cet article n'a pas pour objet de rappeler la pertinence de la méthode œdométrique ni la nécessité de l'utiliser pour prévoir le tassement à long terme des sols compressibles sous des charges de grande étendue. C'est la seule qui peut le permettre sérieusement. Malheureusement, en France, beaucoup l'ont perdue de vue, et quelques raisons expliquent ce constat.

Cette méthode demande une technicité et un soin particulier, puisqu'elle oblige à prélever des sols mous, dans les meilleures conditions possibles. La plus ou moins bonne qualité des carottes ainsi obtenues influe sur le résultat des essais réalisés au laboratoire ; en particulier, le souvenir de contraintes anciennes, que le massif de sol a déjà supportées, peut être estompé si toutes les précautions ne sont pas remplies le long de la chaîne des opérations successives, depuis le terrain jusqu'à l'essai en laboratoire.

Ce respect des règles de l'art a un coût, considéré comme logique autrefois, mais que le développement d'essais concurrents, très rapides et peu chers, tend à faire considérer comme prohibitif. Ainsi, l'essai pressiométrique possède effectivement ces qualités, mais n'est malheureusement pas adapté au problème posé. De nombreux exemples (Combarieu, 2006 ; Lavis et Schmitt, 2004) montrent les très grandes différences entre les deux approches, en faveur de celle utilisant l'œdomètre. On peut d'ailleurs dire qu'un bon géotechnicien, n'ayant pas d'essais œdométriques à sa disposition, n'a pas besoin d'essais pressiométriques et peut, néanmoins, prévoir un ordre de grandeur raisonnable du tassement.

Aussi, devant la grande et trompeuse simplicité de l'expression  $s = \alpha q H / E_M$  (où  $\alpha$  est le coefficient rhéologique,  $E_M$  le module pressiométrique,  $q$  la contrainte apportée par la surcharge et  $H$  l'épaisseur de la couche concernée), il est donné dans cet article des expressions analytiques simples, adimensionnelles, facilitant le calcul du tassement œdométrique pour un certain nombre de situations géotechniques et mécaniques fréquemment rencontrées. Ces expressions, qui ont des formes assez remarquables, sont rapidement et aisément calculables avec une simple calculatrice scientifique.

Si certaines peuvent paraître un peu « lourdes », elles s'avèrent en réalité plus faciles d'emploi que la méthode usuelle et simplificatrice qui consiste à découper le massif en tranches successives pour lesquelles la valeur de la contrainte, au milieu de chacune d'elles, est considérée comme uniforme sur toute l'épaisseur de cette dernière. Comme il est montré plus loin, cette procédure introduit des erreurs très variables suivant le découpage réalisé ; les expressions présentées éliminent ces erreurs.

## Notations utilisées

Le sol est caractérisé, quant à sa compressibilité, par  $C_c$  indice de compressibilité,  $C_s$  indice de gonflement et  $e_0$  indice initial des vides en place.

On pose  $k = 0,435 \frac{C_c}{1 + e_0}$  et  $k' = 0,435 \frac{C_s}{1 + e_0}$ , car

on utilise les logarithmes népériens, notés  $\ln$ .

Les poids volumiques sont  $\gamma$  pour le sol saturé ou le sol humide non saturé (poids volumique apparent) ;  $\gamma'$  est le poids volumique déjaugé et  $\gamma_w$  le poids volumique de l'eau.

On a  $\gamma \text{ saturé} = \gamma' + \gamma_w$ .

Les épaisseurs sont notées  $H$  ou  $h$  (indicés ou non) pour les valeurs discrètes, et la profondeur  $z$  (ou  $z'$  en cas de changement d'origine) de manière générale, l'axe des  $z$  étant orienté vers le bas.

Les contraintes appliquées, généralement uniformes sur de grandes surfaces et provoquant les tassements, sont notées  $q$  (indiqué si nécessaire) et sont appelées indifféremment surcharges ou surcontraintes. Elles peuvent être variables avec  $z$ , comme ce sera le cas lors de l'utilisation d'inclusions rigides qui provoquent une variation.

Les contraintes ayant existé puis disparu (surconsolidation) sont notées  $\sigma'_c$ . Elles étaient, lors de leur existence, des surcontraintes ; elles peuvent être également variables avec  $z$ , comme dans le cas de fluctuation de la nappe. Les fluctuations d'une nappe d'eau sur l'épaisseur partielle d'un sol compressible, génèrent, en effet, une surconsolidation particulière.

Les tassements notés  $s(z)$  et  $s'(z)$  représentent ceux de la couche d'épaisseur  $z$ , comprise entre 0 et  $z$  ;  $s$  est le tassement, dépendant de  $C_c$  et  $s'$  celui dépendant de  $C_s$ . Ce sont des tassements de consolidation primaire, au sens de la théorie de Terzaghi, utilisée ici.

Par ailleurs,  $s$  et  $s'$  pourront être indicés ( $s_A, s'_B, \dots$ ) en fonction des couches notées  $A, B$  indiquées sur les différentes figures.

Pour les expressions donnant  $s$  ou  $s'$ , elles sont repérées par un numéro d'ordre d'apparition croissant, éventuellement indicé avec un « bis » dans la mesure où l'expression est une variante.

Les expressions donnant le tassement sont d'abord calculées pour une première série de cinq configurations classiques où le sol reçoit une surcharge  $q$  uniforme et constante avec la profondeur  $z$ .

Une seconde série de configurations correspond à l'utilisation d'inclusions rigides pour le renforcement de sol compressible, où ce dernier, surchargé en tête, se trouve progressivement déchargé en profondeur du fait de la présence des inclusions.

Dans un but de simplification, les valeurs de tassement étant toutes fournies par une formule générale unique, les expressions donnant ces valeurs n'ont pas toutes été écrites ; seuls les éléments, comme explicité au paragraphe 3, permettant les calculs, sont fournis.

Le tassement total à déterminer est souvent la somme de plusieurs termes, dont certains, tels ceux affectant les tassements de recompression, s'avèrent souvent dans la pratique très faibles et donc négligeables. C'est au géotechnicien à juger de l'intérêt ou non de les calculer en fonction des incertitudes affectant les tassements de compression qui sont, eux, prépondérants.

Enfin, dans les situations où la nappe peut fluctuer, les calculs sont menés pour une nappe en position haute, étant entendu qu'il est tenu compte de sa variation dans la détermination des tassements.

## Principe de calcul des tassements

Il va de soi que la qualité des calculs repose sur l'établissement d'un modèle géotechnique représentatif sur une détermination correcte des diagrammes de contraintes.

Les expressions élémentaires bien connues donnant les tassements sont les suivantes.

Au niveau  $z$ , sur une couche d'épaisseur  $dz$ , règne une contrainte effective  $\sigma'_0(z)$  et où a régné une contrainte  $\sigma'_c + \sigma'_0(z)$  (surconsolidation) ; on applique la surcontrainte  $q(z)$ .

Si  $q(z) > \sigma'_c$  un tassement élémentaire de compression  $ds$  se manifeste, tel que :

$$\frac{1}{k} \frac{ds}{dz} = \ln \frac{q(z) + \sigma'_0(z)}{\sigma'_c + \sigma'_0(z)} \quad (1)$$

auquel s'ajoute un tassement élémentaire de recompression  $ds'$  tel que :

$$\frac{1}{k'} \frac{ds'}{dz} = \ln \frac{\sigma'_c + \sigma'_0(z)}{\sigma'_0(z)} \quad (2)$$

Si  $q(z) < \sigma'_c$  seul un tassement de recompression se manifeste, tel que :

$$\frac{1}{k'} \frac{ds'}{dz} = \ln \frac{q(z) + \sigma'_0(z)}{\sigma'_0(z)} \quad (3)$$

Au sein d'une couche homogène d'épaisseur  $z$  donnée, on a le plus souvent  $\sigma'_c(z) = \sigma'_0 + \gamma'z$  où  $\sigma'_0$  représente au sommet de la couche, la contrainte effective en place. Les relations 1, 2 et 3 permettent, après intégration sur l'épaisseur de la couche dans laquelle les inégalités reliant  $q(z)$  et  $\sigma'_c$  sont partout respectées, de calculer les tassements. La surcharge  $q(z)$  peut être variable avec  $z$ , ce qui est le cas dans la technique de renforcement par inclusions rigides. De même,  $\sigma'_c$  peut être variable avec  $z$ , c'est le cas, comme déjà indiqué, lorsque la nappe fluctue régulièrement.

Les expressions auxquelles on a abouti résultent des propriétés de la fonction logarithme. On remarque que si  $A, B, C, D$  sont des constantes, on peut écrire successivement :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H} \int_0^H \ln \frac{A+Bz}{Bz} dz = \ln \frac{(1+u)^{1+u}}{u^u} \\ \text{et } & \frac{1}{H} \int_0^H \ln \frac{A+Bz}{C+Dz} dz = \frac{1}{H} \int_0^H \ln \left[ \frac{A+Bz}{Bz} \cdot \frac{Dz}{C+Dz} \cdot \frac{B}{D} \right] dz \\ & = \ln \left[ \frac{(1+u)^{1+u}}{u^u} \cdot \frac{v^v}{(1+v)^{1+v}} \cdot \frac{B}{D} \right] \\ & = L \left( u, v, \frac{B}{D} \right), \text{ avec } u = \frac{A}{BH} \text{ et } v = \frac{C}{DH} \end{aligned} \quad (4)$$

Ces transformations de l'intégrale  $L$  ne sont possibles que sous certaines conditions portant sur les signes des valeurs des termes entrant sous le signe somme, auxquels doit satisfaire la fonction logarithme ; il en sera *a priori* toujours ainsi pour les applications traitées.

L'intégrale  $L$  présente la forme générale à laquelle les calculs de tassement mènent, dans la mesure où l'on peut exprimer les contraintes en jeu sous forme linéaire, en particulier pour  $q(z)$  ; si manifestement

cette condition n'est pas remplie, le géotechnicien a la possibilité de linéariser par segments pour lesquels les expressions sont alors applicables. Pour les diverses situations étudiées, on considère que ces conditions de linéarité sont remplies.

Dans les diverses configurations ci-après, les formules donnant les tassements sont écrites explicitement lorsqu'elles sont simples ; seules les valeurs  $u, v$  et  $B/D$  à appliquer à l'intégrale  $L$  sont données dans les autres cas. Certains cas de figures mènent à  $u$  et/ou  $v = 0$ , donnant  $(1+u)^{1+u}/u^u = 1$  et/ou  $(1+v)^{1+v}/v^v = 1$ , ou bien  $B/D = 1$ .

On convient de maintenir l'écriture symbolique de  $L$  avec les trois valeurs  $u, v$  et  $B/D$ , figurant entre parenthèses, tant que  $B/D$  diffère de 1. Cette convention évite toute ambiguïté, car les lettres  $u, v$  et  $B/D$  peuvent avoir, dans le texte, des appellations différentes. On trouvera donc les notations  $L(0, 0, B/D = \ln B/D)$ ,  $L(u, 0, B/D)$ ,  $L(u, v, B/D)$ ... Par contre, si  $B/D$  vaut 1, on supprime son écriture dans  $L$ , ceci dans un but de simplification. Ainsi, on rencontrera  $L(u, v)$ ,  $L(u, 0)$ ... si  $B/D = 1$ .

## Couche de sol normalement consolidée, surchargée sous $q$

Le sol d'épaisseur  $H$  est considéré comme saturé dès la surface ; si ce n'est pas le cas,  $\gamma'$  est remplacé par  $\gamma$ . Ce cas correspond dans la pratique à celui du sol naturel noyé.

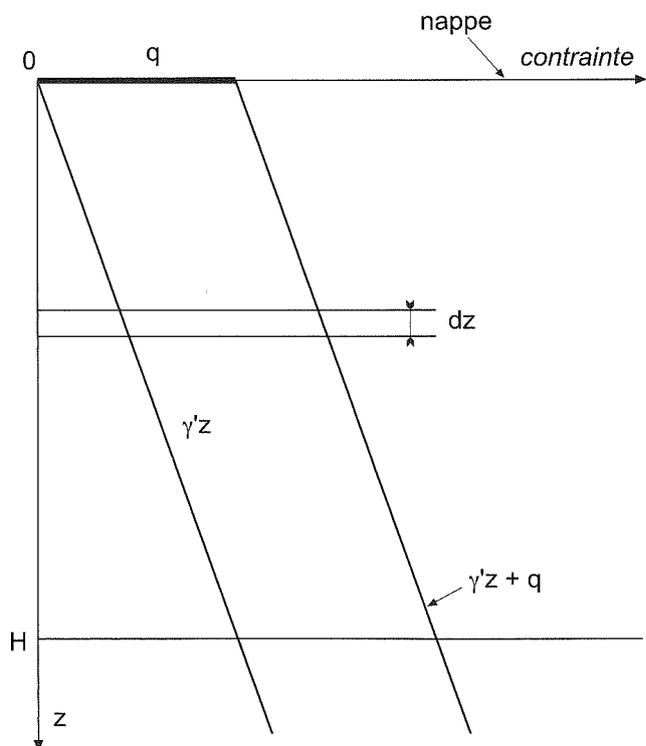


FIG. 1 Sol normalement consolidé, surchargé par  $q$ .  
Normally consolidated soil, with surcharge  $q$ .

Le tassement  $ds(z)$  de la couche élémentaire d'épaisseur  $dz$  est donné par :

$$\frac{ds(z)}{kdz} = \ln \frac{q + \gamma'z}{\gamma'z} \quad (5)$$

ce qui peut s'écrire après intégration, en posant  $u = q/\gamma'H$  sous la forme simple :

$$\frac{s(H)}{kH} = \ln \frac{(1+u)^{1+u}}{u^u} = L(u, 0) \quad (6)$$

On a souvent l'habitude, justifiée lorsque  $H$  est faible, de choisir pour l'intégrale définie entre 0 et  $H$  une valeur moyenne pour le terme  $\gamma'z$ , qui est celle à mi-couche, soit  $\gamma' \frac{H}{2}$ ; cette pratique fournit une valeur

approchée  $s_{ap}(H) = k H \ln(1 + 2u)$ , inférieure à  $s(H)$ .

On oublie souvent cette condition sur  $H$ , qui fait que l'on sous-estime dans des proportions variables le véritable tassement, comme le montrent les valeurs suivantes du rapport  $s(H)/s_{ap}(H)$  en fonction de  $u$  (Tableau I).

TABLEAU I Rapport  $s/s_{ap}$  pour différentes valeurs de  $u$ .  
s/s<sub>ap</sub> ratio for different values for u

u	5	3	2	1	0,5	0,25	0,17
s/s <sub>ap</sub>	1,13	1,16	1,19	1,26	1,38	1,54	1,70

Pour tout ce qui suit, on utilisera la valeur exacte obtenue par intégration.

On peut être amené à calculer le tassement  $s(z)$  de la tranche comprise entre 0 et  $z < H$ , ce que l'on peut faire de la même manière en introduisant  $u(z) = \frac{q}{\gamma'z}$ .

Mais il peut s'avérer intéressant d'exprimer  $s(z)$  en fonction de  $H$ , sous la forme :

$$\frac{s(z)}{kH} = \ln \frac{(z/H+u)^{z/H+u}}{(z/H)^{z/H} \cdot u^u} = L_{z/H}(u, 0) \quad (7)$$

où  $u$  est défini précédemment (éq. 6). Cette écriture symbolique sera expliquée au paragraphe 5.

5

## Couche de sol normalement consolidée, chargée en tête sous $\sigma'_0$ surchargée sous $q$

Ce cas correspond à celui d'un sol de surface d'épaisseur  $H$ , déjà chargé, ou d'une couche plus profonde pour laquelle la charge est celle due à la présence du massif sus-jacent.

Le tassement provoqué par  $q$ ,  $s(H) = k \int_0^H \ln \frac{q + \sigma'_0 + \gamma'z}{\sigma'_0 + \gamma'z} dz$

s'écrit également :

$$\frac{s(H)}{k} = \int_0^H \ln \frac{q + \sigma'_0 + \gamma'z}{\gamma'z} dz - \int_0^H \ln \frac{\sigma'_0 + \gamma'z}{\gamma'z} dz \quad (8)$$

C'est donc la différence entre les tassements tels que définis au paragraphe 4, d'abord sous une contrainte équivalente à une surcharge :  $q + \sigma'_0$  puis sous la seule contrainte, également assimilable à une surcharge  $\sigma'_0$ .

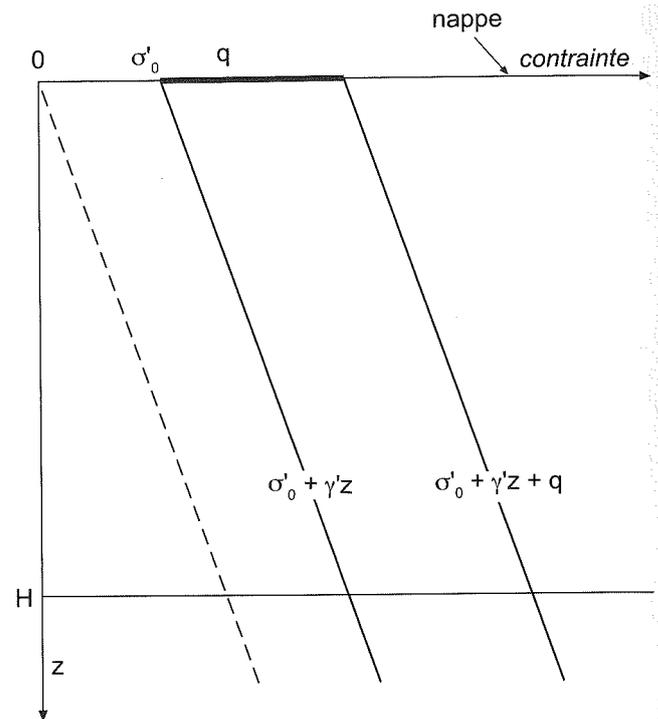


FIG. 2 Sol normalement consolidé, chargé et surchargé par  $q$ .  
Normally consolidated loaded soil, with surcharge  $q$ .

Le tassement  $s_{(H)}$  est donc l'accroissement dû à  $q$ , du tassement qui s'est manifesté autrefois sous  $\sigma'_0$ . C'est cet accroissement qui intéresse l'ouvrage à construire.

On peut donc écrire :

$$\frac{s(H)}{kH} = \ln \left[ \frac{(1+u)^{1+u}}{u^u} \cdot \frac{v^v}{(1+v)^{1+v}} \right] = L(u, v) \quad (9)$$

avec  $u = (q + \sigma'_0)/\gamma'H$  et  $v = \sigma'_0/\gamma'H$ .

$s(z)$ , tassement de la tranche comprise entre 0 et  $z$ , s'exprime directement en fonction de  $H$  par :

$$\frac{s(z)}{kH} = \ln \left[ \frac{(z/H+u)^{z/H+u}}{u^u} \cdot \frac{v^v}{(z/H+v)^{z/H+v}} \right] = L_{z/H}(u, v) \quad (10)$$

Expression identique à (9), mais dans laquelle on remplace les valeurs 1 par  $z/H$ .

Si  $\sigma'_0 = 0$ , les relations (9) et (10) redonnent bien (6) et (7) du cas de figure précédent du paragraphe 4.

6

## Couche de sol surconsolidée, chargée en tête et surchargée sous $q$

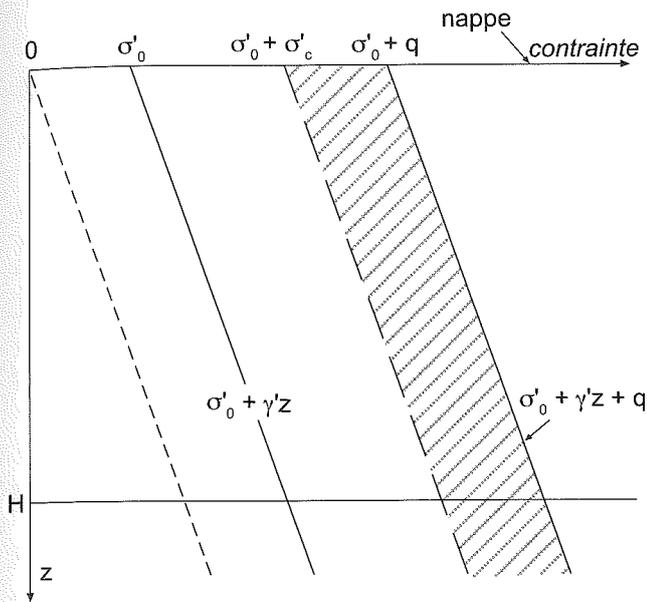
Le massif a été autrefois surchargé par  $\sigma'_c$  contrainte aujourd'hui disparue. Deux expressions différentes s'établissent suivant que  $q$  est supérieur ou inférieur à  $\sigma'_c$ .

Si  $q > \sigma'_c$ , le tassement  $s$  est la somme de deux tassements  $s_1$  et  $s'_1$  défini pour  $s_1$  par :

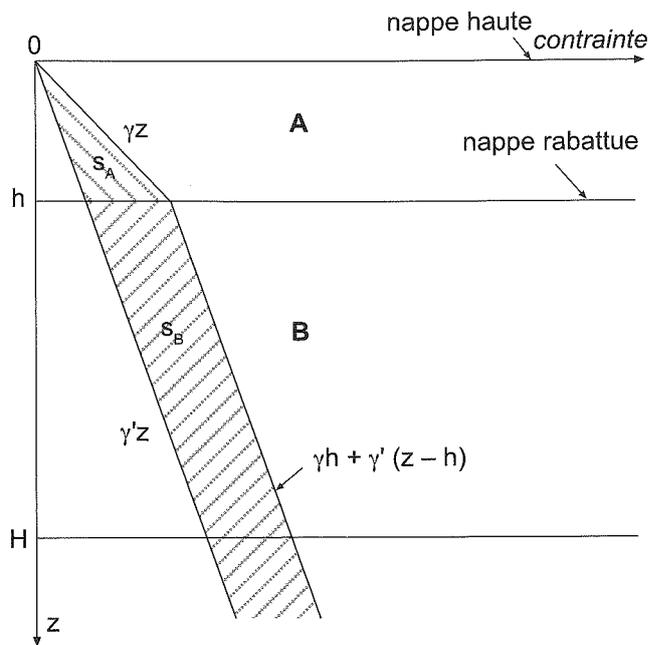
$$\frac{ds_1}{kdz} = \ln \frac{q + \sigma'_0 + \gamma'z}{\sigma'_c + \sigma'_0 + \gamma'z}$$

qui conduit au tassement de compression

$$\frac{s_1}{kH} = L(u, v') \quad (11)$$



**FIG. 3 Sol surconsolidé, chargé et surchargé par q.**  
Overconsolidated loaded soil, with surcharge q.



**FIG. 4 Sol normalement consolidé et saturé, avec rabattement.**  
Normally consolidated saturated soil, with lowering water table.

et de même au tassement de recompression, lié au rechargement jusqu'à  $\sigma'_c$

$$\frac{s'_1}{k'H} = L(v', v) \quad (12)$$

avec  $u = \frac{q + \sigma'_0}{\gamma'H}$ ,  $v' = \frac{\sigma'_c + \sigma'_0}{\gamma'H}$  et  $v = \frac{\sigma'_0}{\gamma'H}$ .

Si  $q < \sigma'_c$  ; il y a uniquement rechargement, et le tassement par recompression vaut simplement :

$$\frac{s'}{k'H} = L(u, v) \quad (13)$$

On tire de ces trois expressions, celles correspondant à  $\sigma'_0 = 0$ , pour laquelle  $v = 0$  et  $v' = 1$ .

Si l'on souhaite calculer les tassements de la tranche de sol entre 0 et  $z < H$ , on applique les mêmes formules, mais en remplaçant 1 par  $z/H$ ,  $u$ ,  $v'$  et  $v$  étant toujours définis par rapport à  $H$ , et donc inchangés. On retrouve alors les expressions (6) et (7).

## 7

### Couche de sol normalement consolidée, saturée et objet d'un rabattement de nappe

La nappe a toujours été au niveau 0. On suppose maintenant qu'elle est abaissée pour raison de travaux par exemple.

Le rabattement est supposé être suffisamment long pour entraîner la consolidation complète des couches compressibles et les tassements associés. L'épaisseur globale  $H$  est soumise à ce rabattement sur une hauteur limitée  $h \leq H$ .

Vis-à-vis des tassements provoqués par ce rabattement, il existe deux zones du massif, qui sont à distinguer : entre 0 et  $h$ , où la contrainte engendrée est linéaire avec  $z$  et vaut  $(\gamma - \gamma')z$ , et entre  $h$  et  $H$ , où cette contrainte est constante, et vaut  $(\gamma - \gamma')h$ . Le poids volumique  $\gamma$  à prendre en compte est celui non saturé de la tranche de sol (0 à  $h$ ) après baisse de la nappe. A défaut de connaître précisément cette valeur, on peut faire l'hypothèse que  $\gamma = \gamma_w + \gamma'$  ce qui revient à dire que l'on ne désature pratiquement pas le sol. C'est légèrement sécuritaire, dans le cas de figure étudié ici, puisque cela conduit à calculer un tassement un peu plus fort que la réalité.

Pour la zone A, entre 0 et  $h$ , on écrit :

$$\frac{ds_A}{kdz} = \ln \frac{(\gamma' + \gamma_w)z}{\gamma'z}$$

d'où  $\frac{s_A}{kh} = \ln \frac{\gamma}{\gamma'}$  (14)

Pour la zone B, on peut, avec un changement d'origine des  $z$ , calculer son tassement en la considérant comme une couche d'épaisseur  $H - h$ . Cette couche est chargée en tête par  $\gamma'h$ , et surchargée par  $\gamma_w h$ . On

pourra alors appliquer l'expression (9) avec  $u = \frac{\gamma h}{\gamma'H}$  et

$$v = \frac{\gamma'h}{\gamma'H} \text{ et donnant : } \frac{s_B}{k'H} = L(u, v) \quad (15)$$

Si la nappe, après rabattement, retrouve son niveau 0 d'origine, puis est l'objet de mouvements d'amplitude  $h$ , le massif peut être considéré comme l'objet de gonflements et recompressions  $s'_A$  et  $s'_B$ , donnés par (14) et (15), mais où  $k'$  remplace  $k$ .

## Couche de sol saturée, normalement consolidée, chargée en tête et objet d'un rabattement de nappe

Comme dans le cas précédent, deux zones A et B sont à distinguer.

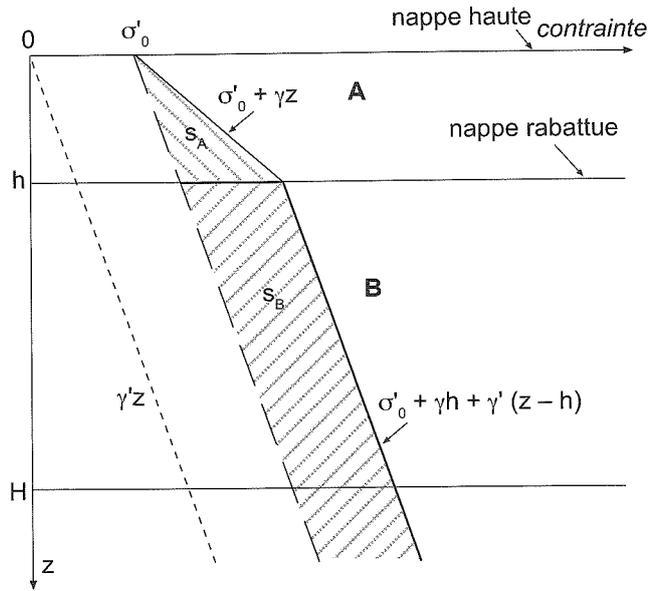


FIG. 5 Sol saturé normalement consolidé, chargé, avec rabattement.  
Normally consolidated saturated and loaded soil, with lowering water table.

On montre pour la zone A qu'on peut écrire en

fonction du seul paramètre  $v = \frac{\sigma'_0}{\gamma'h}$  :

$$\frac{s_A}{kh} = L\left(v \frac{\gamma'}{\gamma}, v, \frac{\gamma'}{\gamma}\right) \quad (16)$$

Si  $\sigma'_0 = 0$ , on retrouve le cas de figure 4 précédent.

Pour la zone B, la configuration est celle de la figure 2 ; en changeant l'origine des  $z$  et en introduisant l'épaisseur  $H' = H - h$ , on obtient :

$$\frac{s_B}{k(H-h)} = L(u, v) \quad (17)$$

avec  $u = \frac{(\sigma'_0 + \gamma h)}{\gamma'H'}$  et  $v = \frac{(\sigma'_0 + \gamma'h)}{\gamma'H'}$ .

Les remarques précédentes sur les fluctuations de la nappe sont applicables pour estimer les amplitudes  $s'_A$  et  $s'_B$  des déformations des zones A et B.

## Couche H de sol, saturée, chargée, surchargée en tête et surconsolidée du fait d'une baisse périodique de la nappe

On ne s'intéresse ici qu'à la seule couche d'épaisseur  $h < H$  d'un massif homogène  $H$  plus épais, soumise à des variations de la nappe, sur toute cette épaisseur  $h$ . La durée cumulée de la situation en nappe basse est suffisante pour produire les mêmes tassements qu'une nappe basse permanente. Par ailleurs, les variations de la nappe sont considérées être antérieures à l'application de la charge  $q$ .

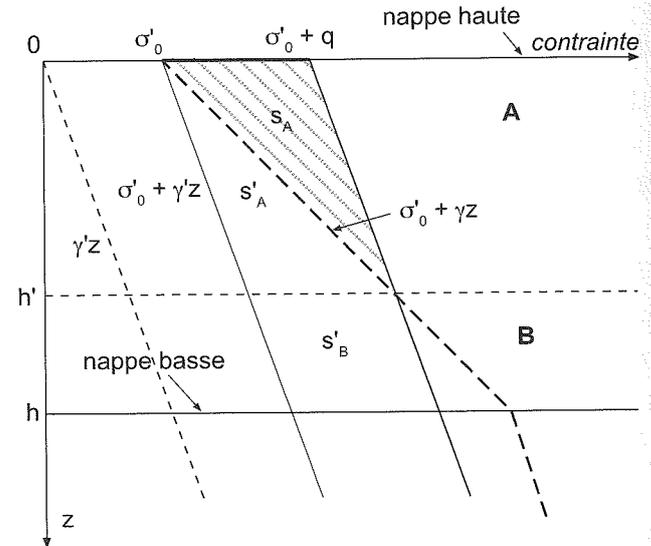


FIG. 6 Sol saturé chargé, avec baisse périodique de la nappe, et surchargé.  
Saturated loaded soil, with episodic dewatering, with surcharge.

Le calcul est effectué en position de nappe haute, au niveau 0. Le tassement élémentaire de compression est :

$$\frac{ds}{kdz} = \ln \frac{q + \sigma'_0 + \gamma'z}{\sigma'_0 + \gamma'z + \gamma_w z} \quad \text{tant que } q > \gamma_w z.$$

Si  $q > \gamma_w h$ , l'intégration est faite sur toute la hauteur  $h$ .

Si  $q < \gamma_w h$ , on peut définir une zone A d'épaisseur  $h' < h$ , telle que  $q = \gamma_w h'$ , l'intégration portant alors sur la hauteur  $h'$  de la zone A.

On obtient pour la zone A, avec  $u = \frac{q + \sigma'_0}{\gamma'h'}$

et  $v = \frac{\sigma'_0}{\gamma'h'}$  un tassement de compression :

$$\frac{s_A}{kh'} = L\left(u, v, \frac{\gamma'}{\gamma}\right) \quad (18)$$

auquel on ajoute un tassement de recompression  $s'_A$

tel que  $\frac{ds'_A}{k'dz} = \ln \frac{\sigma'_0 + \gamma'z}{\sigma'_0 + \gamma'z}$ , soit :

$$\frac{s'_A}{k'h'} = L\left(v, v \frac{\gamma}{\gamma'}, \frac{\gamma}{\gamma'}\right) \quad (19)$$

Pour la zone B d'épaisseur  $h - h'$ , le tassement  $s'$  est donné par :

$$\frac{s'_B}{k'(h-h')} = L(u, v) \quad (20)$$

avec  $u = \frac{q + \sigma'_0 + \gamma'h'}{\gamma'(h-h')}$  et  $v = \frac{\sigma'_0 + \gamma'h'}{\gamma'(h-h')}$ .

Pour le sol situé au-delà de la profondeur  $h$ , le problème est celui de la figure 3 où la contrainte de surconsolidation est  $\sigma'_c = \gamma_w h$ . Avec un changement d'origine des  $z$ , on applique les expressions (11), (12) ou (13) en fonction des valeurs relatives de  $q$  et  $\gamma_w h$ .

Si  $\sigma'_0 = 0$ , les formules se simplifient.

10

## Amélioration d'un sol compressible par groupe d'inclusions rigides

Ce principe de construction d'ouvrages de grandes dimensions sur sols mous, schématisé sur la figure 7, consiste à fortement réduire la surcharge apportée (remblai, radier souple, dallage) par la mise en œuvre d'éléments rigides verticaux reportant en très grande partie cette surcharge sur des niveaux de sol résistants et peu déformables. La disposition d'un organe de transition entre l'ouvrage et les têtes d'inclusions, qui est le plus souvent un matelas sablo-graveleux de bonne qualité, favorise le transfert des efforts.

Par ce dispositif, la surface du sol se trouve finalement peu surchargée sous une contrainte résiduelle ; l'effet bénéfique provoqué en tête se poursuit cependant au sein du sol compressible, qui tasse sous cette contrainte résiduelle. Les inclusions sont donc soumises au frottement négatif, ce qui décharge le sol et diminue encore la contrainte verticale induite en profondeur. Il existe donc, le plus souvent, « un point neutre » au contact de l'inclusion, à une profondeur  $z = h_c$ , où cette contrainte induite est nulle. Du fait du phénomène d'accrochage le long du fût de l'inclusion, il persiste cependant, dans le massif à ce niveau  $h_c$ , une contrainte induite moyenne, généralement très faible, appliquée au massif sur toute la surface d'influence de l'inclusion.

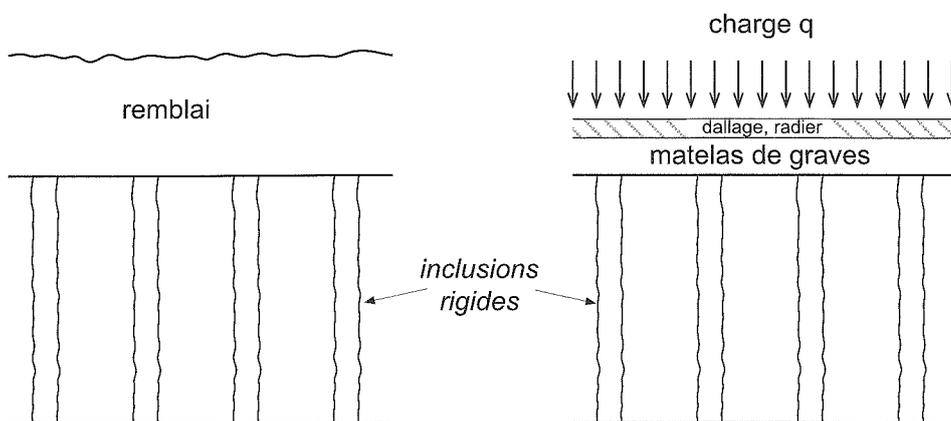


FIG. 7 Principe de renforcement par inclusions rigides. Soil reinforcement by rigid inclusions.

En résumé, lorsqu'un groupe d'inclusions est correctement dimensionné, la surcharge  $q$  appliquée par l'ouvrage, entraîne à la surface du sol une surcharge résiduelle  $q'$ , valant de 15 à 10 % de  $q$ , puis, au niveau du point neutre, une surcharge  $q''$  valant de 10 à 5 % de  $q$ . C'est ce jeu de contraintes qui détermine le tassement sous l'ouvrage après traitement du massif par les inclusions. Pour ce calcul, on peut, et l'erreur est négligeable, admettre que la variation de  $q'$  à  $q''$ , sur l'épaisseur  $h_c$  est linéaire. Par ailleurs, les faibles valeurs de  $q'$  et  $q''$ , auxquelles on cherche volontairement à parvenir, montrent, de ce fait, l'importance et donc la nécessité de savoir si le massif est surconsolidé, ne serait-ce que légèrement. Aussi, la variation du niveau de la nappe, entre le printemps et la fin de l'été par exemple, peut générer de telles contraintes de surconsolidation, qui peuvent éventuellement être supérieures aux contraintes résiduelles  $q'$  et  $q''$ . La surconsolidation par dessiccation de couches superficielles peut augmenter, en termes de surconsolidation, l'effet du seul phénomène de battement de la nappe. Les surcharges  $q'$  et  $q''$  peuvent être déterminées par la méthode développée pour le calcul des inclusions rigides (Combarieu, 1988) ou mieux par cette même méthode améliorée (Combarieu, 2008). Sont fournies, ci-après, les expressions des tassements pour plusieurs cas de figures qui peuvent être rencontrés.

11

## Couche normalement consolidée, surchargée par le diagramme $q'-q''$ , nappe en surface, invariable

La contrainte due à la surcharge est  $q(z) = q' - az$

avec  $a = \frac{q' - q''}{h_c}$ , ce qui conduit aux expressions suivantes.

Pour la zone A, de 0 à  $h_c$  :

$$\frac{s_A}{kh_c} = L\left(u, 0, \frac{\gamma' - a}{\gamma'}\right) \quad (21)$$

en posant  $u = \frac{q'}{(\gamma' - a)h_c}$ .

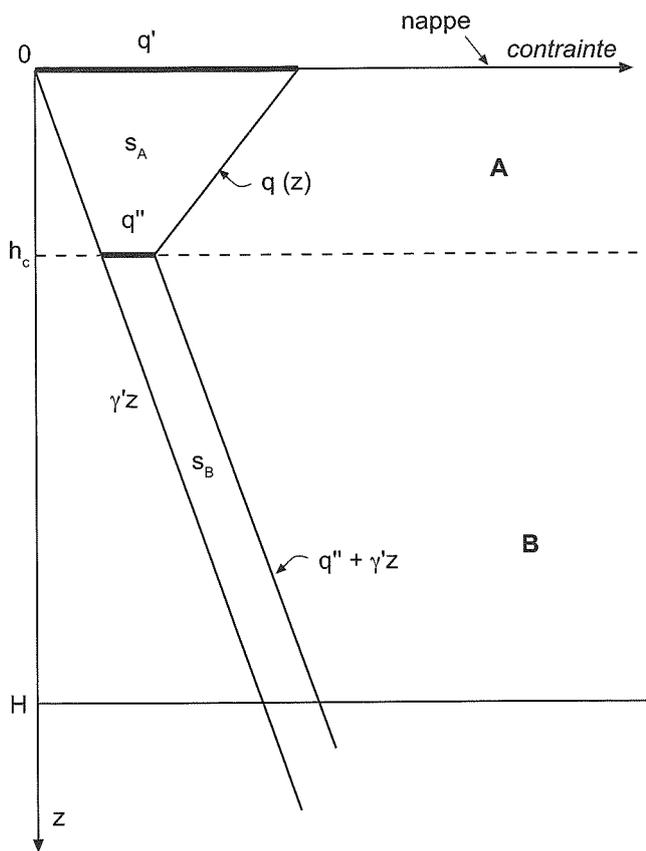


FIG. 8 Sol saturé normalement consolidé surchargé par  $q(z)$ .  
Normally consolidated saturated soil, with surcharge  $q(z)$ .

Pour la zone B, de  $h_c$  à  $H$ , le sol est soumis en tête à la charge  $\gamma'h_c$  et à la surcharge  $q''$ . On obtient donc, comme pour la relation (9) :

$$\frac{s_B}{k(H-h_c)} = L(u, v) \quad (22)$$

avec  $u = \frac{q'' + \gamma'h_c}{\gamma'(H-h_c)}$  et  $v = \frac{\gamma'h_c}{\gamma'(H-h_c)}$ .

12

### Couche surconsolidée sous $\sigma'_c$ , surchargée par le diagramme $q'-q''$ sur une hauteur $h_c$ ; nappe en surface invariable

Il est important de pouvoir analyser précisément cette situation géotechnique. Pour le renforcement par inclusions rigides, la confrontation entre  $\sigma'_c$  et les valeurs du diagramme de la surcharge  $q(z)$  influe directement sur la densité du renforcement, déterminée par les critères de tassement. Ainsi, si le maillage des inclusions est tel qu'il conduise à une valeur  $q'$  et, *a fortiori*,  $q''$  inférieure ou égale à  $\sigma'_c$ , le tassement vertical est pratiquement éliminé.

Cette surconsolidation, relativement fréquente dans les sols compressibles, n'intéresse généralement

qu'une frange supérieure du massif. Son effet bénéfique peut se cumuler avec celui d'une variation de la nappe provoquant également une surconsolidation dans l'ensemble du massif.

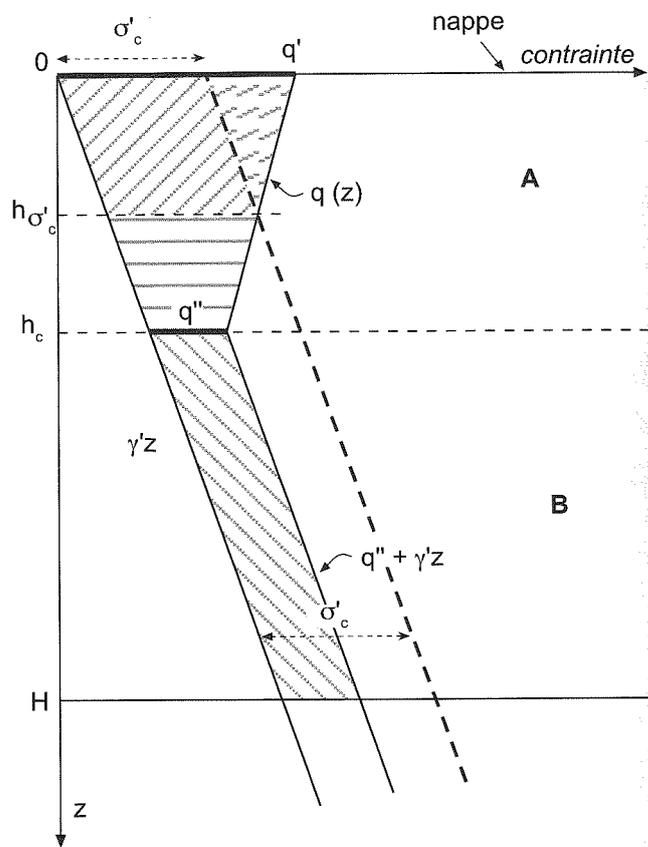


FIG. 9 Sol saturé, surchargé par  $q(z)$ , et surconsolidé.  
Overconsolidated saturated soil, with surcharge  $q(z)$ .

Dans cette situation, il y a trois cas à considérer :

- Si  $\sigma'_c > q'$ , le tassement comporte alors deux termes :  
– un tassement de recompression sur l'épaisseur  $h_c$  :

$$\frac{s'_A}{k'h_c} = L\left(u, 0, \frac{\gamma'-a}{\gamma'}\right) \quad (23)$$

avec  $u = \frac{q'}{(\gamma'-a)h_c}$  ;

- un tassement de recompression sur l'épaisseur  $H - h_c$  :

$$\frac{s'_B}{k'(H-h_c)} = L(u, v) \quad (24)$$

avec  $u = \frac{q' + \gamma'h_c}{\gamma'(H-h_c)}$  et  $v = \frac{\gamma'h_c}{\gamma'(H-h_c)}$ .

- Si  $q' > \sigma'_c > q''$ , cette configuration détermine une profondeur  $h_{\sigma'_c}$  telle que  $h_{\sigma'_c} = \frac{q' - \sigma'_c}{a}$ , cela conduit aux tassements suivants :

- entre 0 et  $h_{\sigma'_c}$ , un tassement de compression

$$\frac{s}{kh_{\sigma'_c}} = L\left(u_1, x, \frac{\gamma'-a}{\gamma'}\right) \quad (25)$$

et un tassement de recompression

$$\frac{s'}{k'h_{\sigma'_c}} = L(x,0) \quad (26)$$

avec  $u_1 = \frac{q'}{(\gamma'-a)h_{\sigma'_c}}$  et  $x = \frac{\sigma'_c}{(\gamma'-a)h_{\sigma'_c}}$

– entre  $h_{\sigma'_c}$  et  $h_c$ , un tassement de recompression

$$\frac{s'}{k'(h_c - h_{\sigma'_c})} = L\left(x', v', \frac{\gamma'-a}{\gamma}\right) \quad (27)$$

avec  $v' = \frac{\gamma'h_{\sigma'_c}}{\gamma'(h_c - h_{\sigma'_c})}$  et  $x' = \frac{\sigma'_c + \gamma'h_{\sigma'_c}}{\gamma'(h_c - h_{\sigma'_c})}$  ;

– enfin, entre  $h_c$  et  $H$ , un tassement de recompression

$$\frac{s'}{k'(H - h_c)} = L(u, v) \quad (28)$$

avec  $u = \frac{q' + \gamma'h_c}{\gamma'(H - h_c)}$  et  $v = \frac{\gamma'h_c}{\gamma'(H - h_c)}$  .

• Si  $q'' > \sigma'_c$  :

– entre 0 et  $h_c$ , on a un tassement de compression

$$\frac{s}{kh_c} = L\left(u, x, \frac{\gamma'-a}{\gamma'}\right) \quad (29)$$

et un tassement de recompression

$$\frac{s'}{k'h_c} = L(x,0) \quad (30)$$

avec  $x = \frac{\sigma'_c}{\gamma'h_c}$  et  $u = \frac{q'}{(\gamma'-a)h_c}$  ;

– entre  $h_c$  et  $H$ , un tassement de compression

$$\frac{s}{k(H - h_c)} = L(u, v') \quad (31)$$

et un tassement de recompression

$$\frac{s'}{k'(H - h_c)} = L(v', v) \quad (32)$$

avec  $u = \frac{q' + \gamma'h_c}{\gamma'(H - h_c)}$ ,  $v = \frac{\gamma'h_c}{\gamma'(H - h_c)}$  et  $v' = \frac{\gamma'h_c + \sigma'_c}{\gamma'(H - h_c)}$  .

## Couche chargée en tête, surchargée sous le diagramme $q'-q''$ sur une hauteur $h_c$ et surconsolidée sur une hauteur $h$ par une baisse alternée de la nappe

C'est un cas relativement courant dans le domaine du renforcement par inclusions rigides. La charge  $\sigma'_0$  correspond soit à du matériau mis en œuvre préalablement à la réalisation des inclusions et considéré comme ayant totalement provoqué le tassement du sol compressible (plate-forme de travail par exemple), soit simplement à une couche superficielle de sol naturel hors d'eau.

Six cas de figure différents peuvent théoriquement se présenter, en fonction des valeurs relatives de  $h$ ,  $h_c$  et  $H$ , d'une part, et de  $q'$ ,  $q''$  et  $h_{w'}$ , d'autre part. Il faut, cependant, remarquer que les tassements de recompression (notés « prime ») seront, en général, extrêmement faibles, compte tenu de la modicité de la surcharge  $q''$ .

Pour ces six situations, définies sur les figures 10 à 15, les tassements sont calculés pour chacune des couches A, B, C, voire D, à partir des trois expressions élémentaires (1), (2) et (3). On donne, sous forme de tableaux, pour chaque figure et chaque niveau, les valeurs de  $u$ ,  $v$  et  $B/D$  conformément à l'intégrale  $L$  (4) (pour  $u$  et  $v$ , afin d'alléger les tableaux, on donne leur produit par l'épaisseur correspondante de chacune des couches concernées).

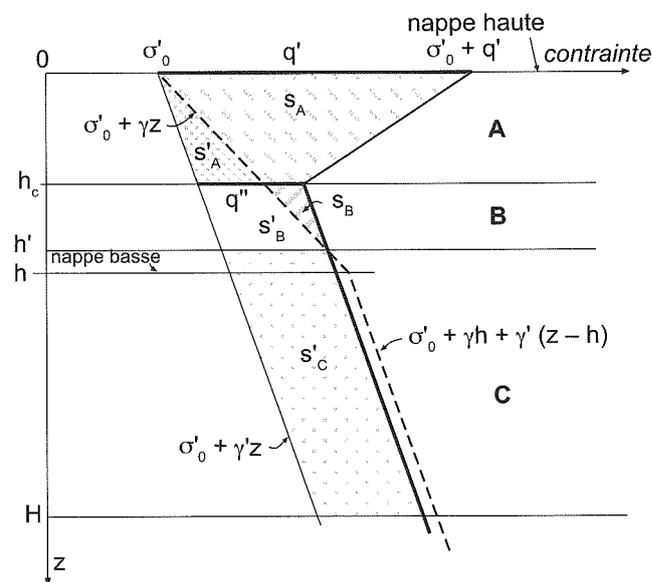
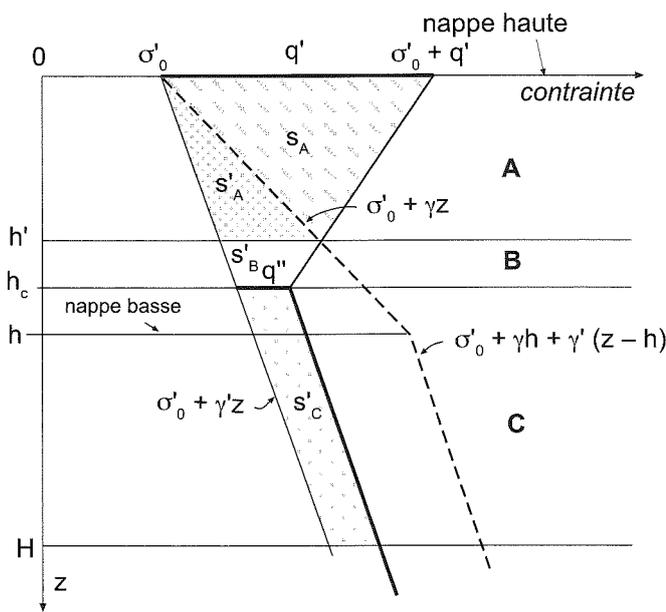


FIG. 10 Sol saturé chargé, surchargé par  $q(z)$ , avec nappe variable.  
Saturated loaded soil, with periodic dewatering and surcharge  $q(z)$ .

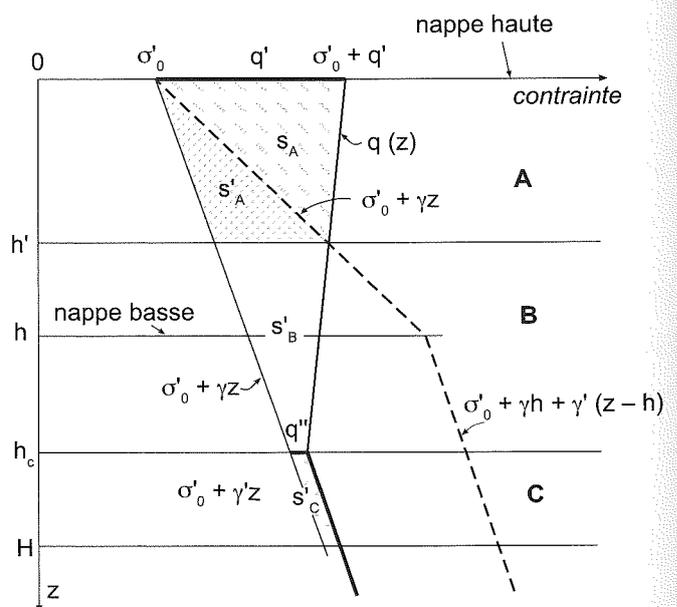
Le cas de la figure 10 est celui d'une valeur de  $h_c$  pour le point neutre, inférieure à  $h$ , niveau bas de la nappe et avec  $\gamma_w h_c < q'' < \gamma_w h$  ; ce qui conduit à une valeur  $h'$  telle que  $\gamma_w h' = q''$  avec  $h_c < h' < h < H$ .

**TABLEAU II** Expressions des tassements d'après la figure 10.  
Expressions for settlements from figure 10.

Couche	Épaisseur	Tassement	u x épaisseur	v x épaisseur	B/D
A	$h_c$	$S_A$	$\frac{(q' + \sigma'_0)}{(\gamma' - a)}$	$\frac{\sigma'_0}{\gamma}$	$\frac{(\gamma' - a)}{\gamma}$
		$S'_A$	$\frac{\sigma'_0}{\gamma}$	$\frac{\sigma'_0}{\gamma'}$	$\frac{\gamma}{\gamma'}$
B	$h' - h_c$	$S_B$	$\frac{q' + \sigma'_0 + \gamma' h_c}{\gamma'}$	$\frac{(\sigma'_0 + \gamma' h_c)}{\gamma}$	$\frac{\gamma'}{\gamma}$
		$S'_B$	$\frac{(\sigma'_0 + \gamma h_c)}{\gamma}$	$\frac{(\sigma'_0 + \gamma h_c)}{\gamma'}$	$\frac{\gamma}{\gamma'}$
C	$H - h'$	$S'_C$	$\frac{q' + \sigma'_0 + \gamma' h'}{\gamma'}$	$\frac{(\sigma'_0 + \gamma' h')}{\gamma'}$	1



**FIG. 11** Sol saturé chargé, surchargé par  $q(z)$ , avec nappe variable,  $q'' < \gamma_w h'$  et  $h' < h_c < h < H$ . Saturated loaded soil, with periodic dewatering and surcharge  $q(z)$ .



**FIG. 12** Sol saturé chargé, surchargé par  $q(z)$ , avec nappe variable,  $h' < h < h_c < H$  et  $q'' < \gamma_w h'$ . Saturated loaded soil, with periodic dewatering and surcharge  $q(z)$ .

TABLEAU III

Expressions des tassements d'après les figures 11 et 12.  
Expressions for settlements from figures 11 and 12.

Couche	Épaisseur	Tassement	u x épaisseur	v x épaisseur	B/D
A	h'	$S_A$	$\frac{(q'+\sigma'_0)}{(\gamma'-a)}$	$\frac{\sigma'_0}{\gamma}$	$\frac{(\gamma'-a)}{\gamma}$
		$S'_A$	$\frac{\sigma'_0}{\gamma}$	$\frac{\sigma'_0}{\gamma'}$	$\frac{\gamma}{\gamma'}$
B	$h_c - h'$	$S'_B$	$\frac{q'+\sigma'_0+(\gamma'-a)h'}{\gamma'-a}$	$\frac{(\sigma'_0+\gamma'h')}{\gamma'}$	$\frac{(\gamma'-a)}{\gamma'}$
C	$H-h_c$	$S'_C$	$\frac{q'+\sigma'_0+\gamma'h_c}{\gamma'}$	$\frac{(\sigma'_0+\gamma'h_c)}{\gamma'}$	1

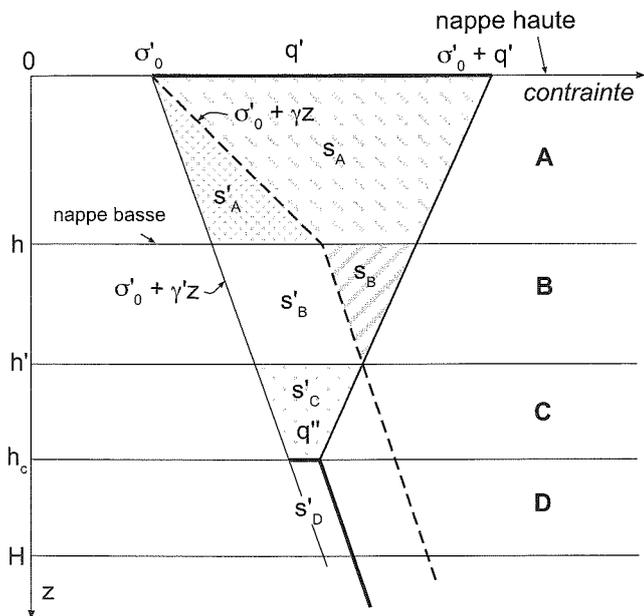


FIG. 13 Sol saturé chargé, surchargé par  $q(z)$ , et nappe variable  $h < h' < h_c < H$ .  
Saturated loaded soil, with periodic dewatering and surcharge  $q(z)$ .

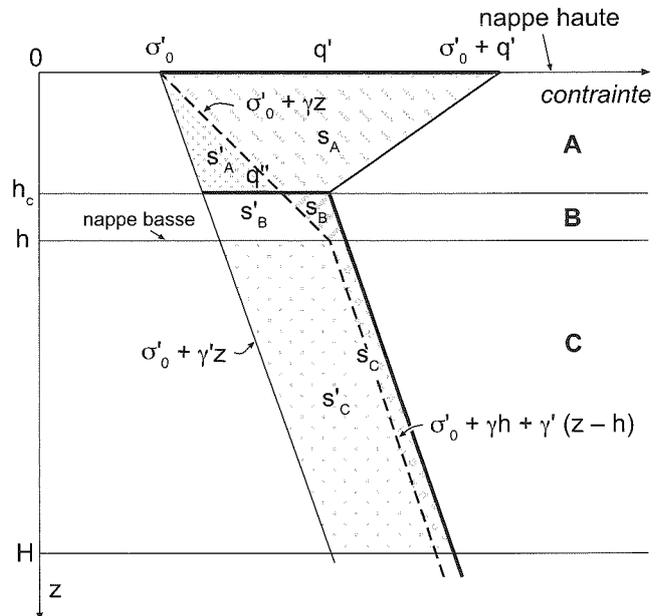


FIG. 14 Sol saturé chargé, surchargé par  $q(z)$ , et nappe variable  $h_c < h < H$ .  
Saturated loaded soil, with periodic dewatering and surcharge  $q(z)$ .

**TABEAU IV** Expressions des tassements d'après la figure 13.  
Expressions for settlements from figure 13.

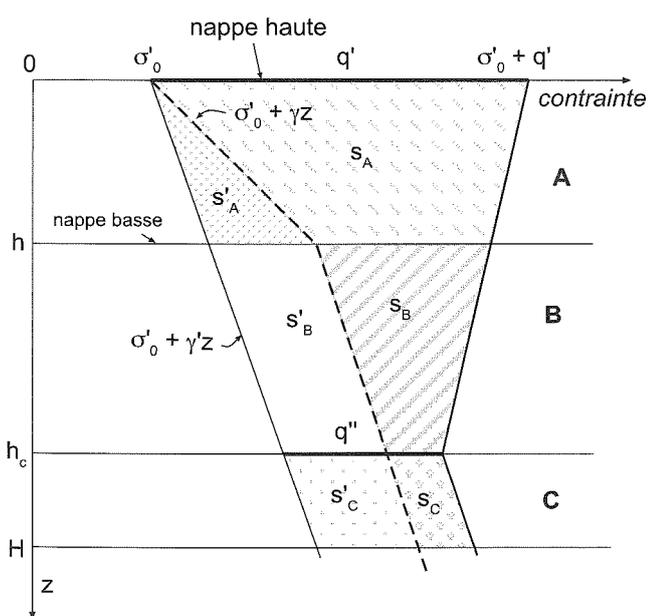
Couche	Épaisseur	Tassement	u x épaisseur	v x épaisseur	B/D
A	h	$S_A$	$\frac{(q'+\sigma'_0)}{(\gamma'-a)}$	$\frac{\sigma'_0}{\gamma}$	$\frac{(\gamma'-a)}{\gamma}$
		$S'_A$	$\frac{\sigma'_0}{\gamma}$	$\frac{\sigma'_0}{\gamma'}$	$\frac{\gamma}{\gamma'}$
B	h' - h	$S_B$	$\frac{q'+\sigma'_0+(\gamma'-a)h}{\gamma'-a}$	$\frac{(\sigma'_0+\gamma h)}{\gamma'}$	$\frac{\gamma'-a}{\gamma'}$
		$S'_B$	$\frac{(\sigma'_0+\gamma h)}{\gamma'}$	$\frac{(\sigma'_0+\gamma' h)}{\gamma'}$	1
C	$h_c - h'$	$S'_C$	$\frac{q'+\sigma'_0+(\gamma'-a)h'}{\gamma'-a}$	$\frac{(\sigma'_0+\gamma' h')}{\gamma'}$	$\frac{\gamma'-a}{\gamma'}$
D	$H - h_c$	$S'_D$	$\frac{q'+\sigma'_0+\gamma' h_c}{\gamma'}$	$\frac{(\sigma'_0+\gamma' h_c)}{\gamma'}$	1

**TABEAU V** Expressions des tassements d'après la figure 14.  
Expressions for settlements from figure 14.

Couche	Épaisseur	Tassement	u épaisseur	v épaisseur	B/D
A	$h_c$	$S_A$	$\frac{(q'+\sigma'_0)}{(\gamma'-a)}$	$\frac{\sigma'_0}{\gamma}$	$\frac{(\gamma'-a)}{\gamma}$
		$S'_A$	$\frac{\sigma'_0}{\gamma}$	$\frac{\sigma'_0}{\gamma'}$	$\frac{\gamma}{\gamma'}$
B	$h - h_c$	$S_B$	$\frac{q'+\sigma'_0+\gamma' h_c}{\gamma'}$	$\frac{(\sigma'_0+\gamma' h_c)}{\gamma}$	$\frac{\gamma'}{\gamma}$
		$S'_B$	$\frac{(\sigma'_0+\gamma' h_c)}{\gamma}$	$\frac{(\sigma'_0+\gamma' h_c)}{\gamma'}$	$\frac{\gamma}{\gamma'}$
C	$H - h$	$S_C$	$\frac{q'+\sigma'_0+\gamma' h}{\gamma'}$	$\frac{(\sigma'_0+\gamma h)}{\gamma'}$	1
		$s'_C$	$\frac{(\sigma'_0+\gamma h)}{\gamma'}$	$\frac{(\sigma'_0+\gamma' h)}{\gamma'}$	1

**TABEAU VI** Expressions des tassements d'après la figure 15.  
Expressions for settlements from figure 15.

Couche	Épaisseur	Tassement	u x épaisseur	v x épaisseur	B/D
A	$h_c$	$S_A$	$\frac{(q'+\sigma'_0)}{(\gamma'-a)}$	$\frac{\sigma'_0}{\gamma}$	$\frac{(\gamma'-a)}{\gamma}$
		$S'_A$	$\frac{\sigma'_0}{\gamma}$	$\frac{\sigma'_0}{\gamma'}$	$\frac{\gamma}{\gamma'}$
B	$h_c - h$	$S_B$	$\frac{q'+\sigma'_0+(\gamma'-a)h}{\gamma'-a}$	$\frac{(\sigma'_0+\gamma h)}{\gamma'}$	$\frac{(\gamma'-a)}{\gamma'}$
		$S'_B$	$\frac{(\sigma'_0+\gamma h)}{\gamma'}$	$\frac{(\sigma'_0+\gamma' h)}{\gamma'}$	1
C	$H - h_c$	$S_C$	$\frac{q'+\sigma'_0+\gamma' h_c}{\gamma'}$	$\frac{(\sigma'_0+\gamma h_c)}{\gamma'}$	1
		$s'_C$	$\frac{(\sigma'_0+\gamma h_c)}{\gamma'}$	$\frac{(\sigma'_0+\gamma' h_c)}{\gamma'}$	1



**FIG. 15** Sol saturé chargé, surchargé par  $q(z)$ , et nappe variable,  $q'' > \gamma_w h$  et  $h < h_c \leq H$ .  
Saturated loaded soil, with periodic dewatering and surcharge  $q(z)$ .

Si on ne tient pas compte de la variation de la nappe, et si on applique la formule approchée  $s_{ap} = kH \ln(1 + 2u)$ , avec  $k = 0,07$ ;  $u = q/\gamma'H = 30/40$  et  $100/40$  respectivement, on obtient les tassements apparents de 32 cm pour  $h_r = 1,5$  m et 63 cm pour  $h_r = 5$  m.

En appliquant l'expression exacte (6), les valeurs de tassement deviennent respectivement 42 cm et 73 cm.

Si on tient compte de la baisse de la nappe,  $h = 1$  m, on se situe dans le cas de la figure 6, avec pour la valeur  $q$  la plus faible, à savoir  $1,5 \times 20 = 30$  kPa, une valeur  $h' = 30/\gamma_w = 3$  m supérieure à  $h$ .

On applique les expressions (18) et (19) simplifiées, puisque  $(\sigma'_0 = 0)$  et portant sur la valeur  $h$ , soit :

$$\frac{S_A}{kh} = L\left(u_1, 0, \frac{\gamma'}{\gamma}\right) \text{ avec } u_1 = \frac{q}{\gamma'h}$$

$$\frac{S'_A}{k'h} = \ln \frac{\gamma}{\gamma'} = L\left(0, 0, \frac{\gamma}{\gamma'}\right)$$

donnant les tassements de 12 et 20 cm respectivement pour la couche  $h$ , soumise à la fluctuation de la nappe, dont un tassement de recompression très faible, inférieur au cm.

Il faut ajouter à ces valeurs, les tassements des quatre mètres inférieurs, pour lesquels on applique les expressions adaptées (11) et (12) avec  $\sigma'_0 = \gamma'h$ , puisque  $q > \gamma_w h$ ;

$$u = \frac{q+\gamma'h}{\gamma'(H-h)}, \quad v = \frac{\gamma'h}{\gamma'(H-h)} \text{ et } v' = \frac{\gamma h}{\gamma'(H-h)}$$

soit  $u = 1,187$  puis  $3,375$ ,  $v = 0,25$  et  $V = 0,563$ .

On obtient pour ces quatre mètres des tassements de 15 cm et 39 cm, dont 1,5 cm de recompression  $s'$ .

D'où le tassement total des deux couches : 27 cm pour  $h_r = 1,5$  m et 59 cm pour  $h_r = 5$  m.

Si pour le remblai de 5 m, on prévoit un réseau d'inclusions rigides composé d'éléments forés de diamètre 45 cm et équipés d'une tête carrée de 80 cm de côté

14

## Exemple d'application

On considère un sol compressible d'épaisseur  $H = 5$  m, de caractéristiques suivantes :  $C_c/(1 + e_0) = 0,16$ ;  $C_s/(1 + e_0) = 0,02$ ;  $\gamma' = 8$  kN/m<sup>3</sup>. La nappe est en surface et baisse en période d'étiage de  $h = 1$  m. Deux projets conduisent à prévoir des remblais d'épaisseur  $h_r = 1,5$  m et 5 m respectivement, de poids volumique 20 kN/m<sup>3</sup>, avec des impératifs de tassement très faibles.

l'espacement étant de 1,50 m, le calcul de la contrainte résiduelle sur le sol compressible, mené suivant la méthode de Combarieu (2008), conduit à  $q' = 11,5$  kPa soit 11,5 % de la contrainte apportée par le remblai. Cette contrainte résiduelle engendre un frottement négatif le long des inclusions, qui atteint sa valeur maximale à la profondeur  $h_c$  de 3,5 m (point neutre), profondeur où, au bord de l'inclusion, la surcontrainte verticale induite est nulle. La valeur moyenne calculée de la surcontrainte verticale induite  $q''$  à cette profondeur est de 3,5 kPa sur toute la surface d'influence de l'inclusion.

Dans ces conditions, le diagramme des contraintes montre que l'on se situe dans le cas de la figure 12, avec  $h' = h = 1 \text{ m} < h_c = 3,5 < H = 5 \text{ m}$ .

Le paramètre  $a = \frac{q' - q''}{h_c}$  vaut 2,29.

On peut donc appliquer les expressions du tableau III qui conduisent à  $s_A = 5,3$  cm.

On vérifie que les termes complémentaires de type  $s'$  sont extrêmement faibles, le tassement global atteignant 6 cm contre 59 cm sans le traitement par inclusions.

Si l'on ne tenait pas compte de la baisse de la nappe, le tassement calculé serait très largement supérieur, puisque le calcul conduit à une valeur de 16 cm. La connaissance des variations de niveau de nappe est donc importante, car elle a une influence directe sur le dimensionnement du réseau. Les contraintes résiduelles sont en effet, au moins dans cet exemple, d'un ordre de grandeur de la contrainte de surconsolidation due à la variation de la nappe.

15

## Conclusion

Pour calculer les tassements des sols compressibles sous charge de grande dimension, la méthode œdométrique est celle qu'il faut privilégier. Elle passe nécessairement par l'établissement de diagrammes, découpant le sol en couches homogènes horizontales, et comportant le tracé des contraintes, en place, passées et appliquées. Dans ces conditions, l'application des expressions fournies dans cet article permet un calcul rapide, simple, tant au niveau d'un prédimensionnement que d'un dimensionnement. L'application aux groupes d'inclusions montre la grande importance, pour le dimensionnement de ceux-ci, de la connaissance des variations du niveau de la nappe.

## Bibliographie

- Combarieu O. – Amélioration des sols par inclusions rigides verticales. Application à l'édification des remblais sur sols médiocres. *Revue française de géotechnique* n° 44, 1988.
- Combarieu O. – L'usage des modules de déformation en géotechnique. *Revue française de géotechnique* n° 114, 2006.

- Combarieu O. – Remblais sur sol compressible et inclusions rigides. Amélioration de l'approche du dimensionnement. *Revue française de géotechnique* n° 122, 2008.

- Lavis J., Schmitt P. – Interprétation des mesures de tassement sous des remblais de préchargement au port de Rouen. *Symposium international ASEP-GI 2004*, Presses de l'ENPC/LCPC, p. 437-445.

# Comportement mécanique à très long terme des mines et cavernes dans le sel gemme : loi de Norton-Hoff ou loi de Lemaître ?

**P. BÉREST**

**M. KARIMI-JAFARI**

Laboratoire  
de Mécanique des solides  
École polytechnique  
91128 Palaiseau Cedex  
Berest@  
lms.polytechnique.fr

**B. BROUARD**

Brouard Consulting  
101, rue du Temple  
75003 Paris  
Contact@  
Brouard-Consulting.com

## Résumé

Pour rendre compte de l'évolution observée pendant les essais de fluage réalisés au laboratoire sur des éprouvettes de sel gemme, deux modèles de comportement sont couramment utilisés : le modèle de Lemaître-Menzel-Schreiner (L-M-S) et le modèle de Norton-Hoff (N-H). Le premier suppose que la vitesse de déformation sous chargement constant décroît indéfiniment au cours du temps, alors que le second admet que cette vitesse tend vers une valeur constante. L'analyse des micromécanismes à l'origine des déformations penche en faveur de la loi de N-H ; en revanche les essais de laboratoire ne permettent pas de trancher entre les deux hypothèses, car les incertitudes dues aux fluctuations de la température, de l'hygrométrie ou de la charge appliquée sont du même ordre de grandeur que les vitesses observées en fin d'essai. Les observations faites dans des ouvrages souterrains intéressent parfois des durées plus longues, mais leur interprétation est compliquée par la géométrie de l'ouvrage, la présence de phases transitoires mécaniques bien plus longues que celles observées au laboratoire et le rôle que prennent les phénomènes autres que mécaniques. On montre pourtant qu'à long terme les deux modèles prédisent pour une caverne souterraine abandonnée des comportements qualitativement différents, ce qui suggère de retenir, au cas par cas, le modèle qui donne les prévisions les plus pessimistes.

*Mots-clés* : comportement mécanique du sel gemme, loi de fluage de Lemaître-Menzel-Schreiner, loi de fluage de Norton-Hoff, loi de fluage de Munson-Dawson.

## Long term mechanical behaviour of salt mines and salt caverns : Norton-Hoff constitutive law versus Lemaître constitutive law

## Abstract

In order to account for the results of creep tests performed on salt samples, two mechanical constitutive laws are considered: the Lemaître-Menzel-Schreiner (L-M-S) law and the Norton-Hoff (N-H) law. The former implies that the strain rate becomes constant some time after a constant load has been applied on the sample; the latter assumes that the strain rate gradually decreases and vanishes to zero after an infinite period of time. The analysis of the micro-physical processes in which deformation at sample scale originates supports the first assumption. However laboratory tests do not allow to discriminate these two assumptions, as uncertainties due to temperature, hygrometry or the applied load are of the same order of magnitude than the strain rates observed at the end of the test.

NDLR : Les discussions sur cet article sont acceptées jusqu'au 1<sup>er</sup> septembre 2009.

Observations performed in underground mines or caverns can be significantly longer than laboratory tests; however they are difficult to interpret, as transient phases generally are much longer and various phenomena other than mechanical often play a significant role in the observed evolutions. However, in the long term, the two models lead to different prediction when long term behaviour of a cavern is considered which strongly suggests selection of the model whose predictions are more unfavourable.

*Key words* : mechanical behaviour of salt, Lemaître-Menzel-Schreiner mechanical constitutive law, Norton-Hoff mechanical constitutive law, Munson-Dawson mechanical constitutive law.

1

## Introduction

Dans les régions densément peuplées d'Europe, l'extraction à grande échelle du fer, du sel gemme, de la potasse, du charbon ou des hydrocarbures appartient largement au passé. Elle a laissé des vides souterrains dont la stabilité et l'étanchéité suscitent parfois des inquiétudes. De nouveaux projets sont apparus, dans lesquels le sous-sol est utilisé pour stocker ou enfouir des hydrocarbures, des déchets, radioactifs ou non, du dioxyde de carbone. Le public demande à juste titre que la sûreté de ces ouvrages, mines abandonnées ou stockages, soit assurée de façon certaine et, s'il y a lieu, pendant de très longues périodes de temps. Un exemple est constitué par l'abandon des mines sèches de sel (Bérest *et al.*, 2004) ou des cavités réalisées par dissolution dans une formation salifère (Bérest, 2008). Ce dernier sujet a suscité des recherches nombreuses, notamment celles coordonnées par un organisme qui rassemble la profession à l'échelle mondiale, le SMRI (Ratigan, 2003).

Un aspect important de ces recherches est le comportement mécanique à long terme (plusieurs siècles) des ouvrages abandonnés. La prévision est fondée sur l'observation des ouvrages et surtout sur l'extrapolation des résultats d'essais de laboratoire conduits pendant des durées inévitablement limitées (quelques mois à quelques années).

On observe que, lorsqu'une charge constante est appliquée sur une éprouvette de sel pendant plusieurs mois, la vitesse de déformation décroît régulièrement, quoique de plus en plus lentement. Il y a une vingtaine d'années certains auteurs ont conclu que cette vitesse devait s'annuler après un temps *fini*. Cette conclusion conduisait, du point de vue du dimensionnement des mines, à des propositions extrêmement optimistes, et contredites par les faits ; elle a été abandonnée. Aujourd'hui la plupart des auteurs estiment que, sous charge constante, la vitesse de déformation tend vers une valeur constante non nulle (Langer, 1984 ; Munson et Dawson, 1984 ; Lux et Heuserman, 1983 ; Cristescu et Hunsche, 1998). En France plusieurs auteurs considèrent au contraire que cette vitesse doit continuer à décroître pour s'annuler après un temps *infini* (Vouille *et al.*, 1984 ; voir aussi Aubertin *et al.*, 1998). Aït Chalal (1996) a montré que ces points de vue, illustrés par les lois de Munson-Dawson, d'une part, et Lemaître-Menzel-Schreiner, d'autre part, permettaient, au prix d'un ajustement des paramètres des deux lois, des descriptions pratiquement indiscernables des résultats d'un essai de fluage multipaliers d'un mois et demi de durée. Durup et Xu (1996) arrivent à la même conclusion mais montrent que les deux descriptions conduisent à des résultats notablement différents lorsqu'on considère le comportement d'une caverne de stockage exploitée pendant 10 000 jours. Le présent article a pour objet de poursuivre cette discussion.

2

## Essais de fluage sur des éprouvettes de sel

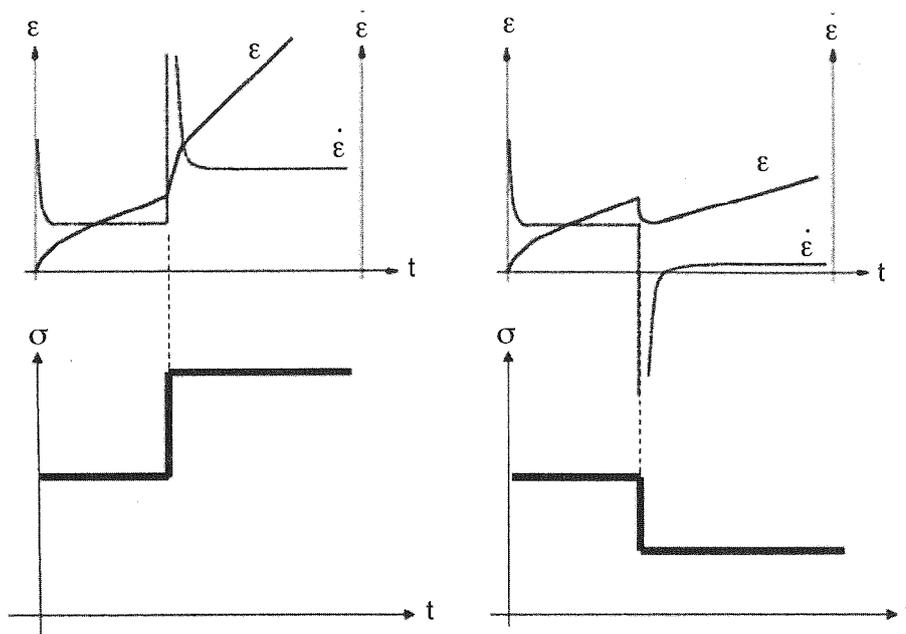
L'essai de fluage uniaxial consiste à appliquer sur une éprouvette cylindrique pendant une durée assez longue une force constante axiale (compression) et à mesurer l'évolution au cours du temps de la déformation axiale (variation relative de la hauteur) et de la déformation diamétrale (variation relative du diamètre). On s'efforce parfois (Wawersik et Preece, 1984) d'appliquer une contrainte axiale constante (en corrigeant la force appliquée de la variation d'aire de la section) mais c'est une procédure plus compliquée et dont on peut discuter le bien-fondé (la déformation diamétrale n'est pas toujours la même sur toute la hauteur de l'éprouvette). Elle a aussi l'inconvénient de compliquer la comparaison entre les résultats obtenus par des laboratoires différents.

Surtout lorsque les propriétés du matériau provenant d'un même horizon géologique varient sensiblement d'une éprouvette à l'autre, on effectue souvent des essais multipaliers en appliquant successivement des charges différentes, laissées constantes pendant chaque palier, afin d'étudier sur une même éprouvette l'effet de l'intensité de la charge appliquée en évitant la dispersion qui affecte les essais conduits sur des éprouvettes distinctes.

On peut également effectuer des essais de fluage dits triaxiaux en appliquant, en plus de la charge axiale, une pression de fluide dite « de confinement » transmise à la surface latérale de l'éprouvette par une membrane souple.

Dans le cas du sel gemme – sans doute la roche qui a fait l'objet du plus grand nombre d'expérimentations de laboratoire – (et aussi de la potasse) ces essais conduisent aux conclusions suivantes :

- 1) le comportement mécanique est en général isotrope (il ne dépend pas, ou faiblement, de l'orientation initiale au sein du massif de l'éprouvette prélevée). Ce résultat est toutefois inexact dans des gisements de sel en couche comportant de très nombreux lits de matériaux argileux ou anhydritiques ;
- 2) lorsqu'une charge est appliquée instantanément puis laissée constante sur une éprouvette, la déformation évolue au cours du temps : elle comporte une déformation élastique instantanée suivie d'une déformation différée qui s'effectue à vitesse décroissante ;
- 3) hormis la déformation élastique initiale, la transformation s'effectue à volume constant à condition que l'état de contrainte appliqué reste à l'intérieur d'un domaine de l'espace des contraintes dit « domaine contractant » (Spiers *et al.*, 1988). Le domaine contractant est limité par le critère d'apparition de la dilatance. Ce domaine contient les états de contrainte isotropes.



**FIG. 1** Fluage transitoire pendant un essai uniaxial : cas de l'accroissement de charge (gauche) et de la réduction de charge (droite) ;  $\epsilon$  est la valeur absolue de la déformation axiale.

Transient creep during a uniaxial creep test : load increase (left) and load decrease (right) ;  $\epsilon$  is the absolute (positive) axial strain.

Une expression très simple pour l'étendue du domaine contractant a été proposée par Ratigan *et al.* (1991),  $\sqrt{J_2} < C|I_1|$ , où  $J_2$  est le second invariant du tenseur déviateur des contraintes,  $I_1$  est le premier invariant du tenseur des contraintes (en général  $I_1 < 0$ , les contraintes dans le massif rocheux étant des compressions) et  $C$  est une constante pour un sel donné,  $C = 0,27$  pour les sels du Golfe du Mexique (des expressions plus précises, tenant compte de la distinction extension-compression et du cas particulier des charges uniaxiales, ont été proposées par DeVries *et al.* (2003). Quand le critère de dilatance est dépassé, la vitesse du son chute, la perméabilité et la porosité augmentent, la résistance diminue (Popp *et al.*, 2007) ;

4) dans le domaine contractant, la déformation obtenue pour un chargement donné ne dépend que de l'écart entre la contrainte axiale appliquée et la contrainte de confinement ; autrement dit, pour le chargement considéré, elle ne dépend que du second invariant du tenseur déviateur des contraintes, qui coïncide dans ce cas avec cet écart ;

5) si on se place à des temps identiques (et suffisamment longs) après le début d'essais de fluage réalisés sous des charges mécaniques différentes, la vitesse de déformation varie comme l'écart entre la charge axiale appliquée et la contrainte de confinement élevée à une puissance de l'ordre de  $n = 3$  à 6 suivant le sel considéré (Brouard et Bérest, 1998) ;

6) la vitesse de déformation croît très vite avec la température de l'éprouvette ;

7) un changement de palier avec augmentation de la force appliquée engendre d'abord, hormis une (petite) déformation élastique instantanée, des vitesses de déformation rapides qui décroissent progressivement pour atteindre, après des temps comparables, des valeurs plus grandes que lorsque la force appliquée était plus faible ;

8) un changement de palier avec diminution de la force appliquée engendre d'abord, si la diminution est suffisamment importante ( $-30\%$  typiquement), un accroissement de hauteur de l'éprouvette (« fluage inverse »). Après un certain temps la vitesse de déformation change de signe pour atteindre des valeurs plus faibles, après des temps comparables, que lorsque la charge appliquée était plus grande.

Dans la décennie 1970-1980, certains auteurs ont cru pouvoir conclure que, non seulement la vitesse de déformation sous charge constante était décroissante, mais que de plus, au cours d'un essai de laboratoire comme dans un ouvrage souterrain, la déformation tendait à long terme vers une valeur finie. Le sel était donc, dans cette conception, un solide visqueux plutôt qu'un fluide. Cette thèse, parfois dite du *strain-hardening*, est illustrée par un article de Serata (1968, p. 305), cité par Baar (1977) : « Any opening made in a salt media at a depth below 3000 ft (900 m) will suffer a large amount of plastic closure. However, regardless of the initial rate of closure, the creep rate also decreases exponentially to virtually zero as the opening reaches a stable condition ». Cette thèse a été critiquée par plusieurs auteurs (Langer, 1984), parfois avec une certaine virulence (Baar, 1977) : d'une part, elle est infirmée par les essais même très longs, d'autre part, elle n'est pas confirmée par les observations faites dans les mines où les piliers des quartiers exploités par chambres et piliers continuent à se déformer plusieurs décennies ou même plus d'un siècle après qu'ils ont été ouverts. De plus un tel point de vue conduisait à justifier un dimensionnement très optimiste des mines, « rock mechanics is not a magic wand which can be waved over a 50-ft pillar to turn it into a 150-ft pillar » (Abel, 1970, p. 207). Ce point de vue est abandonné aujourd'hui et tous les auteurs contemporains considèrent le sel comme un fluide visqueux (non newtonien et thermo-sensible) (Tijani *et al.*, 1983).

## Description des essais uniaxiaux et écriture d'une loi de comportement

## 3.1

### Description des essais uniaxiaux

On s'intéresse surtout par la suite à la description de la déformation observée au cours du temps lors d'un essai uniaxial d'un seul palier et de durée assez longue (plusieurs mois). La déformation thermo-élastique peut être décrite comme (les contraintes de compression sont négatives) :

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_{11}^{el} + \dot{\varepsilon}_{11}^{th} &= \dot{\sigma} / E + \alpha_{th} \dot{T} \\ \dot{\varepsilon}_{22}^{el} + \dot{\varepsilon}_{22}^{th} &= \dot{\varepsilon}_{33}^{el} + \dot{\varepsilon}_{33}^{th} = -\nu \dot{\sigma} / E + \alpha_{th} \dot{T}\end{aligned}$$

où  $\sigma$  est la contrainte appliquée dans la direction 1,  $E$ ,  $\nu$  sont le module d'élasticité et le coefficient de Poisson,  $\alpha_{th}$  est le coefficient de dilatation thermique linéaire,  $T$  est la température (absolue). Cette formulation doit être complétée par une description de la déformation viscoplastique. Deux types de description sont couramment utilisés :

## 3.1.1

#### Description de Lemaître-Menzel-Schreiner (L-M-S)

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= \dot{\varepsilon}^{el} + \dot{\varepsilon}^{th} + \dot{\varepsilon}^{vp} \\ \dot{\varepsilon}_{11}^{vp} &= -A^*(T, \Phi) |\sigma|^{n^*} t^{\alpha^*} \\ \dot{\varepsilon}_{11}^{vp} + \dot{\varepsilon}_{22}^{vp} + \dot{\varepsilon}_{33}^{vp} &= 0\end{aligned}\quad (1)$$

où  $t$  est le temps et  $\Phi$  est l'hygrométrie relative ambiante (quand l'éprouvette n'est pas isolée de l'atmosphère de la pièce). Pour exprimer la dépendance de  $A^*$  avec la température, à  $\Phi$  constant, on utilise souvent l'expression :  $A^* = A_0^* \exp(-Q/RT)$ .

## 3.1.2

#### Description de Norton-Hoff (N-H)

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= \dot{\varepsilon}^{el} + \dot{\varepsilon}^{th} + \dot{\varepsilon}^{vp} (+\dot{\varepsilon}_{tr}^{vp}) \\ \dot{\varepsilon}_{ss,11}^{vp} &= -A(T, \Phi) |\sigma|^n \\ \dot{\varepsilon}_{ss,11}^{vp} + \dot{\varepsilon}_{ss,22}^{vp} + \dot{\varepsilon}_{ss,33}^{vp} &= 0\end{aligned}\quad (2)$$

La description de L-M-S décrit la totalité du comportement viscoplastique au moyen de trois constantes seulement,  $A^*$ ,  $n^*$  et  $\alpha^*$  (pour une évolution isotherme). La description de N-H utilise deux constantes ( $A$  et  $n$ ) mais elle ne décrit que le fluage établi et il est nécessaire de la compléter par une formulation de l'évolution transitoire initiale (ou  $\dot{\varepsilon}_{tr}^{vp}$ ). La différence essentielle est que L-M-S prédit une diminution indéfinie – quoique progressivement très lente, car  $\alpha^* < 1$  – de la vitesse de déformation, alors que N-H prédit que la vitesse de déformation tend vers une valeur constante pour un essai dans lequel la contrainte appliquée (et les autres paramètres qui peuvent influencer la vitesse) restent constants. L'article est consacré à une comparaison de ces deux hypothèses.

## 3.2

### Formulation d'une loi de comportement

Les relations proposées plus haut décrivent un essai particulier mais ne constituent pas un modèle de comporte-

ment. La description de L-M-S fait intervenir explicitement le temps : elle est donc relative à un choix de l'instant initial. Les deux descriptions concernent un essai dans lequel l'état de contrainte est uniforme dans l'éprouvette et invariable au cours du temps. Il faut étendre ces descriptions à des situations moins particulières. Pour cela, on dispose des observations faites pendant les essais et de quelques guides heuristiques. Le matériau étant supposé isotrope, la vitesse de déformation viscoplastique ne peut dépendre du tenseur des contraintes que par l'intermédiaire des trois invariants scalaires de celui-ci. On suppose aussi qu'il existe un potentiel viscoplastique : le tenseur des vitesses de déformation est proportionnel à une dérivée d'un potentiel par rapport à l'état de contrainte. Cette hypothèse présente l'avantage de fournir un certain nombre de résultats généraux sur les évolutions de structures réalisées dans ce matériau. Ce potentiel viscoplastique ne peut dépendre du premier invariant du tenseur des contraintes, ou  $I_1$ , puisque les déformations se font à volume constant. Il ne dépend donc que des invariants  $J_2$  et  $J_3$  du tenseur déviateur des contraintes. On suppose en général qu'il ne dépend que de l'invariant  $J_2$ . C'est évidemment une hypothèse assez forte ( $A$  la suite d'un essai *in situ* effectué avec un grand soin sur un piler dans une chambre souterraine du WIPP, au Nouveau-Mexique, dont les résultats s'écartaient notablement des prévisions, cette hypothèse avait été réexaminée. Des essais de laboratoire sur tube, dans lesquels l'état de contrainte n'est pas homogène, et qui permettent donc de mieux discriminer les lois de comportement proposées pour rendre compte des essais, avaient permis de montrer qu'un potentiel construit à partir du critère de Tresca – plutôt que du critère de Von Mises, qui ne dépend que de l'invariant  $J_2$  – donnait un meilleur accord avec les observations (Munson et Fossum, 1989). Toutefois, cette formulation, plus délicate à mettre en œuvre dans les calculs numériques, n'est guère utilisée). Les formulations les plus souvent retenues sont le modèle de Lemaître-Menzel-Schreiner et le modèle de Norton-Hoff.

## 3.2.1

#### Modèle de Lemaître-Menzel-Schreiner

Le temps est éliminé entre la déformation et la vitesse de déformation en introduisant une variable interne notée  $\zeta$  :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \frac{\partial}{\partial t} (\zeta^{\alpha^*}) \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} (\sqrt{3J_2}) \quad \zeta = (A^{*1/n^*} \sqrt{3J_2})^{n^*/\alpha^*} \quad (3)$$

## 3.2.2

#### Modèle de Norton-Hoff

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{ss} = A (\sqrt{3J_2})^n \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} (\sqrt{3J_2}) \quad (4)$$

Cette loi est un cas particulier de la loi de Lemaître quand  $\alpha^* = 1$ .

## 3.2.3

#### Modèle de Munson-Dawson

Comme la loi de N-H ne décrit que la déformation viscoplastique stationnaire, elle doit être complétée par une formulation de la déformation viscoplastique transitoire. Un exemple est la loi de Munson-Dawson (1984) :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{tr} = (F - 1) \dot{\varepsilon}_{ij}^{ss} \quad \begin{aligned} F &= e^{\Delta(1-\zeta/\varepsilon_t^*)^2} \quad \text{si } \zeta \leq \varepsilon_t^* \\ F &= e^{-\delta(1-\zeta/\varepsilon_t^*)^2} \quad \text{si } \zeta \geq \varepsilon_t^* \end{aligned}$$

$$\zeta = (F - 1)\epsilon^{ss}, \quad \epsilon^{ss} = A \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) (\sqrt{3J_2})^n \quad (5)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{ss} = \frac{3\epsilon^{ss}}{2\sqrt{3J_2}} S_{ij} \quad \epsilon_i^* = K_0 e^{\alpha T} (\sqrt{3J_2})^m \text{ and } \Delta = \alpha + \beta \text{Log}_{10}(\sqrt{3J_2})/\mu$$

où  $\mu$  est le module de cisaillement ; cette loi signifie que, sous chargement constant, la déformation viscoplastique tend vers l'asymptote  $\epsilon^{vp} = \epsilon_1^* + t \dot{\epsilon}_{ss}^{vp}$ .

## Identification des paramètres

On peut considérer par exemple le cas du modèle de L-M-S. Gérard Vouille (communication personnelle) indique la procédure suivante d'identification des paramètres : on utilise la formulation (3), au début de l'essai le paramètre interne est nul ; on peut, pour un jeu donné des paramètres de la loi de comportement et pour l'historique réel des contraintes appliquées et de la température, intégrer numériquement l'évolution  $\xi = \xi(t)$  du paramètre interne, qui est continu même en cas de saut de la charge appliquée. La déformation totale pour sa part n'est pas continue mais il est facile de calculer le petit « saut » élastique de déformation engendré par un changement rapide de charge en fonction des paramètres élastiques  $E$  et  $\nu$ . On obtient ainsi une réponse « calculée » de l'éprouvette pour une histoire donnée des charges appliquées et des températures,  $\epsilon_{calc} = \epsilon_{calc}(t; \alpha^*, n^*, A_0^*, E, \nu, Q/R)$ , qui est fonction des paramètres de la loi de comportement. On compare alors cette réponse à la réponse mesurée « vraie » soit  $\epsilon_{mes} = \epsilon_{mes}(t)$  et on cherche le meilleur choix de paramètres en minimisant la fonctionnelle :

$$F(\alpha^*, n^*, A_0^*, E, \nu, Q/R) = \int_0^T (\epsilon_{calc} - \epsilon_{mes})^2 dt$$

où  $T$  est la durée totale de l'essai. L'algorithme de problème inverse donnant le jeu de valeurs des paramètres qui minimise la fonctionnelle a été mis au point par M. Tijani.

## Un commentaire sur les lois de comportement

Un atout de la loi de L-M-S réside dans son économie remarquable de moyens : elle permet de décrire un essai de fluage isotherme de son début à sa fin au moyen de trois paramètres seulement (hormis les paramètres élastiques  $E$  et  $\nu$ ). Gérard Vouille (communication personnelle) fait d'ailleurs remarquer qu'elle rend compte de chargements complexes : lors d'un essai comportant l'application de paliers successifs avec charge croissante suivie de paliers successifs avec charge décroissante, il est d'observation constante que pour la même charge appliquée et après des temps comparables après le début du palier, la vitesse de déformation de l'éprouvette est plus lente à la « descente » (quand les charges décroissent) qu'à la « montée » (quand les charges successives croissent). La loi de L-M-S rend bien compte de cet effet. La loi de N-H complétée par M-D aussi, mais c'est au prix d'un nombre plus élevé de paramètres.

La contrepartie de la simplicité est qu'on recherche un jeu de paramètres qui rende compte aussi bien du début de l'essai (pendant lequel les vitesses varient rapidement) que de la fin de celui-ci (quand les vitesses deviennent lentes). Or c'est surtout la fin de l'essai

qui est susceptible de fournir une information utile du point de vue du comportement à long terme, sauf à supposer que la loi de L-M-S n'est pas un simple ajustement mais traduit des phénomènes mécaniques plus profonds, ce qu'aucune étude microphysique ne suggère à ce jour.

En revanche aucune des deux lois ne rend compte du fluage « inverse » (changement de signe transitoire de la vitesse de déformation à la suite d'une réduction substantielle de la contrainte appliquée) qui joue pourtant un rôle important pour l'interprétation des essais d'étanchéité des cavernes (Karimi-Jafari, 2007) marqués par un accroissement rapide et important de la pression de la caverne au début de l'essai et une augmentation transitoire de son volume, dont un exemple est donné au paragraphe 6.2.

4

## Conséquence pour un ouvrage du choix de la loi de comportement

Un programme d'essais de laboratoire est nécessairement d'ampleur limitée. Il faut donc l'adapter aux conditions concrètes de contraintes, de température et d'hygrométrie attendues dans l'ouvrage. Toutefois, pour évaluer précisément les contraintes dans l'ouvrage, il faut déjà disposer d'une loi de comportement mécanique. Par ailleurs, le comportement mécanique d'une structure réalisée dans un matériau au comportement non linéaire peut présenter des caractères généraux notablement distincts de ceux présentés par une éprouvette au cours d'un essai triaxial, notamment parce que l'état de contrainte n'est ni homogène dans la structure ni constant au cours du temps.

La définition d'un programme d'essais de laboratoire est donc un processus itératif : les résultats des premiers essais et l'étude de la littérature suggèrent une première formulation de la loi de comportement qui permet de vérifier par un calcul d'ouvrage que les essais de laboratoire sont effectués dans la fenêtre de sollicitations (notamment de contraintes) auxquelles l'ouvrage souterrain sera effectivement soumis.

4.1

## Exemple d'une cavité sphérique

On doit donc examiner le comportement mécanique d'une cavité souterraine pour les modèles de comportement envisagés. Pour un matériau élasto-viscoplastique dont le potentiel viscoplastique ne dépend que de l'état de contraintes, Mandel (1960) a montré, de manière en partie heuristique, que l'état de contrainte dans une structure soumise à un chargement mécanique constant tendait vers une distribution indépendante du temps. Pouya (1991) a généralisé ce résultat pour une famille de lois de comportement qui inclut les lois de L-M-S et N-H. Par exemple, le problème le plus simple posé par le comportement mécanique d'une cavité souterraine est celui dans lequel la pression intérieure, ou  $P_c$ , plus faible que la pression géostatique, ou  $P_g$ , est maintenue constante au cours du temps (cette pression est souvent, dans une mine, la pression nulle ou, dans une caverne, la pression dite halmostatique engendrée par une colonne de saumure saturée contenue dans le puits d'accès). On considère le cas idéalisé

d'une caverne de forme sphérique, de rayon  $a$ , soumise à la pression intérieure  $P_c$ , et réalisée à une profondeur telle que l'état de contrainte naturel  $y$  est isotrope et égal à  $\sigma_{ij}^\infty = -P_\infty \delta_{ij}$ . On a d'abord :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} > \sigma_{\theta\theta} &= \sigma_{\varphi\varphi} \\ \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) &= 0 \\ \sigma_{rr}(\infty) &= -P_\infty \quad \sigma_{rr}(a) = -P_\infty + (P_\infty - P_c)H(t) \end{aligned} \quad (6)$$

La première équation est une conséquence de la forme du chargement, et notamment de la condition  $P_c < P_\infty$  ; la seconde relation est l'équation d'équilibre ; la troisième décrit les conditions à la limite. On doit de plus exprimer la loi de comportement élasto-viscoplastique. Du fait de la symétrie sphérique, les équations dans les deux directions orthoradiales sont identiques. Dans le cas de la loi de Norton-Hoff on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{u}}{\partial r} &= \frac{1}{E} \{ \dot{\sigma}_{rr} - 2\nu \dot{\sigma}_{\theta\theta} \} + A(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^n \\ \dot{u} &= \frac{1}{r} \{ (1-\nu) \dot{\sigma}_{\theta\theta} - \nu \dot{\sigma}_{rr} \} - \frac{A}{2} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^n \end{aligned} \quad (7)$$

La solution stationnaire de ce problème pour les contraintes, atteinte après un temps très long sous chargement constant, peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -P_\infty + (P_\infty - P_c) \left(\frac{a}{r}\right)^{3/n} \\ \sigma_{\theta\theta} &= -P_\infty + \left(1 - \frac{3}{2n}\right) (P_\infty - P_c) \left(\frac{a}{r}\right)^{3/n} \\ \sqrt{3J_2} &= 3(P_\infty - P_c) \left(\frac{a}{r}\right)^{3/n} / 2n \\ \dot{V} / V \Big|_{t=\infty} &= -3 \frac{\dot{u}}{r} = -\frac{3}{2} A \left[ \frac{3}{2n} (P_\infty - P_c) \right]^n \end{aligned} \quad (8)$$

où  $V$  est le volume de la caverne.

## 4.2

### Conséquences pour un programme d'essais de laboratoire

Il est intéressant de comparer la solution viscoplastique *stationnaire* (avec  $n > 1$ ) avec la solution élastique (obtenue en faisant  $n = 1$ ), car cette dernière donne la distribution *initiale* de contraintes dans le cas limite d'une création très rapide de la caverne (à l'instant initial, la pression dans la caverne passe instantanément de  $P = P_\infty$  à  $P = P_c < P_\infty$ ) :

- les perturbations à l'état naturel de contrainte, induites par le creusement de la cavité, s'étendent beaucoup plus profondément au sein du massif dans le cas viscoplastique que dans le cas élastique (l'exposant du rayon est  $-3/n$  au lieu de  $-3$ , et  $n$  vaut typiquement de 3 à 6) ;

- pour une valeur fixée du rayon, le second invariant du tenseur des contraintes est divisé par un facteur  $n$ . Les contraintes déviatoriques sont donc nettement plus faibles que dans la solution élastique. Par exemple dans le cas d'une cavité creusée à 1 000 m de profondeur et remplie de saumure, la pression géostatique est  $P_\infty = 22$  MPa et la pression halmostatique dans la caverne est  $P_c = 12$  MPa. Dans un massif élastique, la contrainte déviatorique à la paroi serait  $\sqrt{3J_2}(a) = 15$  MPa ; dans un massif de Norton-Hoff avec  $n = 3$ , cette contrainte ne vaut plus, pour la solution stationnaire, que  $\sqrt{3J_2}(a) = 5$  MPa.

Le programme expérimental doit privilégier l'étude des effets de ces contraintes modérées. Les essais réalisés avec des valeurs plus élevées du déviateur ne sont toutefois pas inutiles, puisque de telles valeurs sont représentatives de l'évolution transitoire de la caverne, évolution qui peut être longue.

## 4.3

### Caractéristiques de l'épisode transitoire

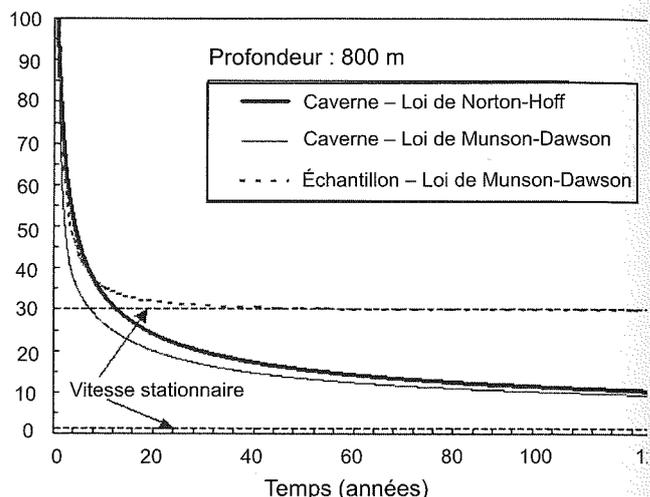


FIG. 2 Comparaison de la durée des transitoires pour une éprouvette de laboratoire et pour une caverne souterraine (d'après Karimi-Jafari, 2007).

Comparison of the transient period duration during a laboratory test and in an actual underground cavern (after Karimi-Jafari, 2007).

## 4.3.1

### Vitesse initiale de convergence

Pour une caverne dont la pression intérieure est laissée constante au cours du temps, l'épisode transitoire compris entre la création de la caverne et le moment où la distribution stationnaire de contraintes est atteinte doit être discuté car il couvre pratiquement toute la durée de vie de l'ouvrage avant son abandon. On peut remarquer d'abord que, pour la loi de N-H, il existe un potentiel  $\psi$  pour les déformations viscoplastiques :

$$\varepsilon_{ij}^{ss} = A(\sqrt{3J_2})^n \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} (\sqrt{3J_2}) = \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \left[ A \frac{1}{n+1} (\sqrt{3J_2})^{n+1} \right] = \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \psi(J_2) \quad (9)$$

On considère alors pour une évolution isotherme l'intégrale étendue à la totalité du massif :

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij}^a d\Omega + \int_{\Omega} \frac{d\psi}{dt} d\Omega \quad (10)$$

On montre facilement par une intégration par parties que l'intégrale de gauche est nulle, puisque les conditions en contrainte à la limite du domaine d'intégration sont invariables et que l'équation d'équilibre est évidemment vérifiée à tout instant. Or la première intégrale du membre de droite est manifestement positive ou nulle, de sorte que la seconde intégrale est négative ou nulle ;  $\psi$  étant une fonction croissante du déviateur, celui-ci ne peut que décroître *au moins en moyenne dans tout le massif*. La démonstration s'étend au cas de L-M-S et de N-H complété par M-D.

On peut être un peu plus précis dans le cas d'une caverne sphérique lorsqu'on choisit pour simplifier  $\nu = 1/2$  (incompressibilité élastique) car on a alors  $\dot{u}/r = \dot{a}^2/r^3$  et la troisième relation du système (7) prend la forme :

$$\frac{a^2 \dot{a}}{r^3} = -\frac{1}{2E}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) - \frac{A}{2}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})^n \quad (11)$$

Mais, à l'instant initial, le déviateur de contrainte suit la distribution élastique :

$$\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} \Big|_{t=0^+} = \frac{3}{2}(P_\infty - P_c) \frac{a^3}{r^3} \quad (12)$$

De sorte qu'on peut, compte tenu de la condition d'équilibre, intégrer (11) à l'instant initial par rapport à  $r$  entre l'infini et le rayon courant  $r$ . En particulier en choisissant  $r = a$ , où la contrainte radiale est égale au signe près à la pression intérieure invariable dans la caverne, on peut calculer la vitesse de convergence initiale :

$$\dot{V}/V \Big|_{t=0^+} = 3\dot{a}/a \Big|_{t=0^+} = -\frac{3}{2n} A \left[ \frac{3}{2}(P_\infty - P_c) \right]^n \quad (= n^{n-1} \dot{V}/V \Big|_{t=\infty})$$

Celle-ci est beaucoup plus rapide que la vitesse de convergence associée à la solution stationnaire. Pendant l'épisode transitoire, cette vitesse diminue et la distribution de contrainte évolue de la distribution élastique initiale vers la distribution stationnaire.

Revenant alors au cas du point courant  $r$ , il est facile de voir que le déviateur des contraintes décroît à l'instant initial entre  $r = a$  et  $r = an^{\frac{1}{3(n-1)}}$  et qu'il croît au-delà, comme le laisse d'ailleurs attendre la comparaison des déviateurs calculés pour l'état stationnaire et pour l'état élastique initial, respectivement. La démonstration s'étend facilement au cas de N-H complété par M-D, au moins dans le cas particulier où  $\beta = 0$ .

#### 4.3.2

### Durée de l'épisode transitoire

A la fois pour le comportement de N-H et pour le comportement de L-M-S, Nguyen Minh et Pouya (1992) ont étudié l'évolution transitoire dans le cas d'une cavité sphérique soumise à une pression intérieure constante. Karimi-Jafari (2007) a examiné le cas de cavernes de forme quelconque. Ils ont établi que, pour les deux types de comportement, la solution « stationnaire » ou « établie » n'est atteinte qu'après un temps très long. La figure 2 donne un exemple. On a représenté l'évolution de la vitesse de déformation axiale d'une éprouvette sur laquelle une charge de  $\sigma = -8$  MPa était appliquée, pour la loi de N-H complétée par la modélisation du fluage transitoire de M-D. Pour la même loi de comportement on a représenté la vitesse de variation du volume relatif d'une caverne creusée à 800 mètres de profondeur et dans laquelle s'applique la pression halmostatique (en d'autres termes l'écart entre la pression géostatique et la pression dans la caverne est  $P_\infty - P_c = 8$  MPa). On a également représenté la solution du même problème quand la loi de N-H n'est pas complétée par la formulation de M-D (aucun transitoire rhéologique n'est alors pris en compte). Les valeurs du module élastique et du coefficient de Poisson sont les mêmes pour tous les modèles,  $E = 25\,000$  MPa et  $\nu = 0,25$ . Les paramètres du modèle de N-H sont  $A = 2 \times 10^{-11}$  /MPa<sup>4</sup>/jour et  $n = 4$ ; les paramètres du modèle transitoire de M-D sont  $m = 3$ ,  $K_0 e^{cT} = 10^{-7}$  /MPa<sup>3</sup>,  $\delta = 0,58$ , et  $\alpha = \Delta = 10$ .

On observe d'abord que l'épisode transitoire initial est beaucoup plus court pour l'éprouvette que pour la caverne ; il dure une quarantaine d'années pour l'éprouvette et plusieurs siècles pour la cavité. Dans le cas de la loi de N-H seule, il n'y aurait pas d'épisode transitoire pour une éprouvette alors qu'il en existe dans le cas de la caverne. Autrement dit, pour les temps courts, le choix de la loi rhéologique stationnaire de N-H conduit à un comportement non stationnaire d'une structure telle qu'une cavité souterraine. Ce phénomène est appelé « transitoire géométrique », parce qu'il tient à la lente redistribution des contraintes au sein du massif, par opposition au « transitoire rhéologique », qui tient à l'introduction d'une composante transitoire dans l'écriture du modèle de comportement (Karimi-Jafari, 2007). On remarque aussi que, passé le premier siècle, il n'y a pas de différence très notable entre les évolutions de la caverne pour la loi de N-H et pour la loi de N-H complétée par M-D.

#### 4.4

### Effets des grandes variations de volume

On a vu qu'aux temps courts, l'évolution du volume de la caverne est transitoire, même si l'on retient le modèle de N-H. Considérons maintenant les temps très longs : si la cavité est un tant soit peu profonde, les déformations cumulées sont importantes et on ne peut se satisfaire de l'hypothèse des petites transformations. L'équation (8) doit alors être intégrée en tenant compte des modifications du volume de la cavité soit :

$$V(t)/V(0) = \exp\left\{-\frac{3}{2} A \left[ \frac{3}{2}(P_\infty - P_c) \right]^n t\right\} \quad (13)$$

et, si la distribution de contrainte reste stationnaire, la vitesse de diminution du volume est une fonction décroissante du temps.

Le comportement mécanique d'une cavité souterraine présente donc certains caractères qualitatifs qui le distinguent du comportement d'une éprouvette de laboratoire ; ce point sera repris au paragraphe 6.

#### 5

### Apport des essais de laboratoire

Les essais de fluage au laboratoire durent en général de trois mois à un an. Lorsqu'il s'agit d'essais multipaliers, la durée de chaque palier est de l'ordre de un à deux mois. Pour de telles durées, la vitesse de déformation est constamment décroissante. Ceci ne peut constituer en soi seul un argument décisif en faveur du modèle L-M-S. En effet le modèle de N-H doit être complété par une description du comportement transitoire rhéologique telle que celle de Munson-Dawson ; celle-ci prévoit aussi que l'épisode transitoire qui suit une modification de la contrainte appliquée a une durée au moins de l'ordre de celle de l'essai.

#### 5.1

### Changement de forme de l'éprouvette

L'éprouvette utilisée pour les essais est soigneusement rectifiée ; sa forme initiale est cylindrique, et on peut attendre que l'état de contrainte soit homogène dans l'éprouvette, au moins à une échelle supérieure à celle des grains. Toutefois, lorsque les déforma-

tions cumulées deviennent importantes, il est difficile d'assurer que le glissement au contact entre les faces inférieure et supérieure et les talons est parfait et les contraintes peuvent cesser d'être homogènes dans l'éprouvette. Cet effet a été discuté par Wawersick et Preece (1984). De même, Tijani (1987) a montré que dans un essai à vitesse de déformation contrôlée cet effet engendrait des contraintes de traction au voisinage du contact avec les talons. Une éprouvette au cours d'un essai réel de laboratoire est déjà une structure, siège d'effets complexes susceptibles de faire apparaître des non linéarités dans la relation déformation fonction du temps, même dans l'hypothèse de N-H.

## 5.2

### Effets de la température

Pour discuter l'effet des fluctuations de température, on peut considérer l'ajustement des essais de Charpentier (1988) proposé par Pouya (1991) pour du sel de la formation supérieure d'Étrez (Ain) dans laquelle Gaz de France exploite des cavités de stockage de gaz. Pouya utilise un ajustement par une loi de Norton-Hoff,

$$\dot{\epsilon}^{vp} = -A_0 \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right) |\sigma|^n \quad \text{avec } A_0 = 0,64 \text{ MPa}^{-n} \text{ an}^{-1},$$

$Q/R = 4100 \text{ K}$ ,  $n = 3,1$ . Avec cette loi, un essai de fluage uniaxial pour une contrainte axiale appliquée de  $\sigma = -10 \text{ MPa}$  doit conduire après deux à trois mois (durée des essais de Charpentier qui ont servi à l'ajustement) à une vitesse de déformation axiale de  $\dot{\epsilon}_{11} = -2 \cdot 10^{-4} \text{ an}^{-1}$ , soit environ  $-0,6 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-1}$  ou  $-5,5 \cdot 10^{-7} \text{ jour}^{-1}$ . Le coefficient de dilatation thermique du sel est de l'ordre de  $\alpha_{th} = 4 \cdot 10^{-5} / ^\circ\text{C}$ . Il n'est pas facile, même dans une pièce fermée, d'éviter des fluctuations journalières de température de l'ordre du degré Celsius. Autrement dit les fluctuations de la vitesse de déformation d'origine thermo-élastique sont de l'ordre de  $\dot{\epsilon}^{th} = \alpha_{th} \dot{T} \approx 10^{-5} \text{ jour}^{-1}$ , et sont beaucoup plus grandes que la vitesse moyenne de déformation en fin d'essai. On peut évidemment, lorsque l'essai est assez long, mesurer la température de la salle d'essai (ou mieux, de l'éprouvette) et rechercher une corrélation entre température et déformation pour quantifier les effets thermo-élastiques et corriger de ces effets la déformation observée. Ce n'est pas très facile. D'une part il existe un décalage temporel entre variation de température extérieure et déformation, la conduction thermique n'étant pas instantanée (pour une éprouvette de diamètre  $D = 10 \text{ cm}$ , le temps caractéristique pour l'uniformisation de la température dans l'éprouvette est de l'ordre de  $\tau = D^2/k$ , où  $k = 3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$  est la diffusivité thermique du sel, soit  $\tau = 1 \text{ h}$ ). D'autre part une variation de la température a également un effet sur la vitesse de déformation viscoplastique,  $\delta\dot{\epsilon}^{vp}/\dot{\epsilon}^{vp} = Q\delta T/RT^2$ . Avec  $Q/R = 4100 \text{ K}$ , un accroissement de température de  $\delta T = 1^\circ\text{C}$  de la température moyenne, par exemple  $T = 286 \text{ K}$ , entraîne un accroissement relatif  $\delta\dot{\epsilon}^{vp}/\dot{\epsilon}^{vp} = 5 \%$  de la vitesse de fluage stationnaire. Enfin il est assez difficile, sauf conditions spéciales, de mesurer la température moyenne d'une éprouvette avec une résolution meilleure que  $\delta T = 1/10^\circ\text{C}$ , de sorte que l'incertitude pour le calcul de la vitesse sur une durée de  $\delta t = 30 \text{ jours}$  (par exemple) sera  $2 \alpha \delta T / \delta t = 2,7 \cdot 10^{-7} \text{ jour}^{-1}$ , c'est-à-dire la moitié de la vitesse qu'on souhaite mesurer : le risque est d'interpréter par de « l'écrouissage » une faible variation non détectée de la température moyenne.

D'une manière plus générale un changement de température de l'environnement de l'éprouvette peut affecter d'autres processus (par exemple l'hygrométrie relative) et influencer indirectement les phénomènes de fluage ; il n'est donc pas facile de distinguer tous les effets des variations de température, qui peuvent ne pas se réduire aux effets thermo-élastiques et à l'accélération de la vitesse de déformation viscoplastique, pris en compte pour leur part dans l'écriture du modèle de comportement.

## 5.3

### Effet de l'hygrométrie

Les effets de l'hygrométrie sur la vitesse de fluage du sel sont également importants, comme l'ont souligné Horseman (1988) et Hunsche et Schulze (1996, 2002). Dans un essai uniaxial, l'éprouvette n'est pas toujours isolée de l'atmosphère de la pièce. Pour fixer les idées, sur le plateau de Saclay en région parisienne l'hygrométrie extérieure passe de  $\Phi = 70 \%$  –  $75 \%$  RH l'été à  $\Phi = 80 - 90 \%$  RH l'hiver. L'hygrométrie est sensiblement inférieure dans une galerie isolée d'une mine de sel, et probablement élevée dans une caverne de stockage de gaz. Hunsche et Schulze (2002) ont proposé une relation entre vitesse de déformation stationnaire et humidité relative sous la forme :

$$\dot{\epsilon}_s = \dot{\epsilon}_{s0} (1 + w \text{sh}(q \Phi)) \quad (13)$$

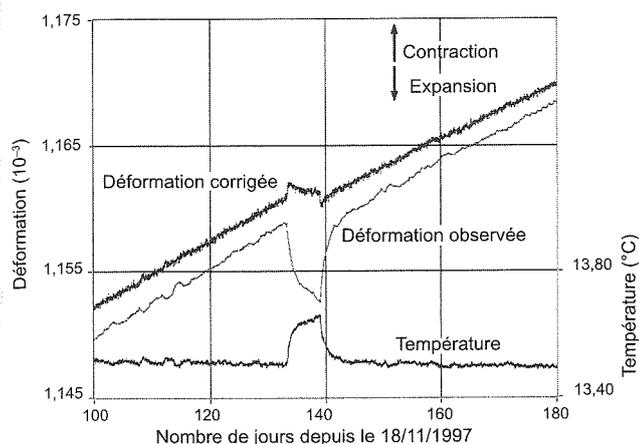
où  $\Phi$  est l'humidité relative (en %RH) ;  $q$  et  $w$  sont deux constantes respectivement égales à  $q = 0,1$  et  $w = 0,1$ . Si on se place à une humidité relative moyenne de  $\Phi_0 = 55 \%$  RH (cas de l'essai décrit à la figure 3), une variation d'humidité relative de  $\delta\Phi = 1 \%$  engendre une variation relative de la vitesse de déformation  $\delta\dot{\epsilon}/\dot{\epsilon} = 0,09$  : il serait prématuré au vu des résultats bruts d'un essai de conclure à un écrouissage sans avoir soigneusement mesuré l'humidité relative. Dans un essai triaxial, l'éprouvette est isolée de l'atmosphère extérieure et il est vraisemblable que la petite quantité d'air piégée entre l'éprouvette et la jaquette se mette à l'hygrométrie d'équilibre avec la saumure saturée contenue dans les pores de l'éprouvette, qui est de l'ordre de  $75 \%$  RH et varie peu avec la température.

## 5.4

### Charge appliquée

On peut faire une remarque analogue pour la charge appliquée. Celle-ci résulte du fonctionnement d'un système hydraulique qui applique sur un piston une pression de fluide pilotée pour rester égale à une pression de consigne. Wawersick et Preece (1984) estiment, pour les essais (reconnus comme de très grande qualité) qu'ils ont effectués aux Sandia National Laboratories, que la contrainte déviatorique appliquée est contrôlée avec une précision de l'ordre de  $\pm 2 \%$  ; cette valeur est relativement grande puisqu'elle doit être multipliée par l'exposant  $n$  de la loi puissance pour obtenir l'incertitude induite sur la vitesse de déformation stationnaire. On doit de plus craindre que, sur une longue durée, ces systèmes connaissent une dérive du fait du vieillissement de l'électronique ou d'un grip-page.

## Un exemple



**FIG. 3** Variations de la déformation et de la température observées et déformation corrigée des effets thermo-élastiques pendant l'essai n° 1 dit de Varangéville. La charge appliquée était 0,108 MPa. Un décalage arbitraire de  $2,5 \cdot 10^{-6}$  de la déformation corrigée est appliqué pour faciliter la lecture (Bérest *et al.*, 2005).

As-observed axial strain and temperature variations during the Varangéville Test n° 1, together with the strain variations corrected for temperature variations. The applied load was 0,108 MPa. An arbitrary strain offset of  $2,5 \cdot 10^{-6}$  was applied to the corrected strain curve to make the figure easier to read (Bérest *et al.*, 2005).

Un exemple est présenté sur la figure 3. Le bâti de fluage à charge morte avait été placé, avec l'aimable concours de la société CSME, dans une galerie souterraine profonde (160 m) éloignée du système de ventilation de la mine pour bénéficier d'une température et d'une hygrométrie aussi constantes que possible (Bérest *et al.*, 2005). La figure représente 80 jours d'essai. Les températures sont enregistrées toutes les deux minutes avec une résolution de l'ordre du millième de degré Celsius. Les fluctuations de température sont de l'ordre de un à quelques centièmes de degré Celsius (ces fluctuations sont vraisemblablement dues aux variations de pression atmosphérique qui engendrent une compression ou une détente de l'air contenu dans la galerie (Perrier *et al.*, 2001)). De plus, au jour 132, une lampe est restée allumée par erreur, provoquant un accroissement de température de l'ordre de 0,15 °C jusqu'à ce que la lampe brûle, six jours plus tard. On note la corrélation inverse très nette, due au comportement thermo-élastique, entre déformation et température. La correction thermo-élastique permet d'obtenir une courbe nettement plus régulière. On ne réussit pas toutefois à effacer complètement les effets de l'épisode de la lampe allumée, sans doute à cause de l'influence de la température sur les déformations viscoplastiques, ou des variations de l'humidité relative. On observe pendant la période considérée (hiver) un lent refroidissement (de l'ordre de 0,01 °C en 80 jours) qui rend la déformation observée (contraction) un peu plus grande que la déformation d'origine purement mécanique.

On retiendra en conclusion qu'il est important, pour la présentation des résultats d'un essai de fluage, de donner, en plus du tracé de la déformation au cours du temps, le tracé de l'évolution de la vitesse de déformation, de la température et de l'hygrométrie, et de préciser la date du début de l'essai.

## Apport des observations en place

Pour trancher entre les formulations de N-H et de L-M-S, des essais très longs pourraient être utiles. Toutefois, il est difficile de mobiliser un bâti pendant une dizaine d'années, et le risque d'un incident qui ruine tous les efforts consentis est d'autant plus probable que l'essai est plus long. En revanche les ouvrages réels (caverne, mine, sondage) restent en général ouverts pendant plusieurs dizaines d'années et on peut, souvent à coût faible, y faire des observations pendant des durées longues. Celles-ci pourraient, en principe, permettre de discriminer les lois de comportement. En fait il n'en est rien.

La forme géométrique d'une chambre ou d'une caverne est moins simple que celle d'une éprouvette cylindrique, l'état de contraintes n'y est pas homogène, il n'atteint pas immédiatement une valeur constante (qui, au contraire, est réalisée instantanément dans un essai de fluage de laboratoire – au moins idéalement) et le massif contient en général de multiples hétérogénéités naturelles. On a établi ainsi au paragraphe 4.3 que, même lorsqu'on retient la loi de N-H qui ne décrit aucun fluage transitoire, une cavité dont la pression est portée à l'instant initial de la pression géostatique à une valeur constante plus basse est le siège d'un comportement global transitoire lié à la lente redistribution des contraintes dans le massif.

Plus généralement, un ouvrage est le siège de multiples phénomènes transitoires, dont les phénomènes transitoires mécaniques ne sont qu'un exemple ; la qualité des mesures, ou même la connaissance que l'on a des autres phénomènes, n'est pas toujours suffisante pour qu'on puisse extraire du signal enregistré la part qui revient à chacun d'entre eux.

## Essais à caverne fermée (Shut-in pressure test)

Dans le cas des cavernes l'essai le plus simple consiste à fermer la caverne, remplie de saumure, et à suivre l'évolution naturelle de la pression au cours du temps. Même si cette évolution n'était régie que par des phénomènes mécaniques, l'interprétation serait délicate. En effet dans une caverne fermée le fluage du sel engendre une diminution de volume de la caverne, une contraction de la saumure contenue dans la caverne fermée et un accroissement de sa pression. La vitesse de fermeture décroît donc au cours du temps, quelle que soit la loi de comportement mécanique retenue, en raison de l'augmentation de la pression dans la caverne. L'évolution de la structure constituée par la caverne fermée étant transitoire par nature, il est difficile de distinguer nettement la part qu'y prend le comportement transitoire du matériau.

De plus, sauf peut-être pour une caverne laissée longtemps au repos, ou pour une caverne très profonde, l'évolution de la pression est en fait déterminée par l'essentiel par le retour à l'équilibre thermique de la saumure contenue dans la caverne (les cavernes sont créées au moyen d'eau froide provenant de la surface ; la saumure qu'elles contiennent est donc initialement hors d'équilibre thermique avec le massif environnant ; le réchauffement est très lent, il dure plusieurs décennies dans une caverne de volume supérieur

à 100 000 m<sup>3</sup>). Ce réchauffement engendre une dilatation de la saumure, et un accroissement de sa pression quand la caverne est fermée. Ce phénomène d'origine thermique est souvent prépondérant et masque le phénomène mécanique, dont la part est difficile à préciser. La figure 4 présente un exemple. Le 15 septembre 2005, la pression de la caverne fermée SPR2 du site de Carresse (exploitée par Total) est portée de 4,63 MPa à 4,83 MPa par injection d'huile dans l'espace annulaire (Brouard Consulting *et al.*, 2006) (l'augmentation de la pression en tête de puits, représentée sur la figure 4, est bien entendu plus grande, la colonne d'huile formée étant plus légère que la colonne de saumure qu'elle remplace).

Pendant un mois environ la pression diminue, sous des effets déclenchés par l'accroissement initial de pression (les effets les plus importants sont la dissolution additionnelle : la concentration de la saumure à saturation est une fonction croissante de la pression et de la température et la dissolution s'effectue avec diminution de volume ; et le fluage « inverse » : le volume de la caverne augmente pendant quelques semaines, bien que la pression y soit plus faible que la pression géostatique. Une estimation de ces effets peut être trouvée dans Bérest *et al.*, 2007). Puis la pression dans la caverne atteint un plateau avant de croître de nouveau (la courbe est tracée jusqu'en mars 2007) : cette croissance est due à l'échauffement de la saumure, qu'on a pu évaluer à 0,1 °C/an pendant cette phase.

En l'absence d'échauffement, la pression chuterait car le volume de saumure perdu par perméation dans le massif est un peu plus grand que la perte de volume des cavernes par fluage (Brouard Consulting *et al.*, 2006). Il est difficile dans ce contexte d'inférer une conclusion assurée quant à l'écriture de la loi de comportement mécanique pour les temps très longs bien que la perturbation thermique, source des incertitudes, soit très faible.

Lorsque les phénomènes thermiques sont devenus négligeables (c'est le cas après quelques années dans une petite caverne, par exemple de volume inférieur à 10 000 m<sup>3</sup>, pour fixer les idées) les phénomènes de perméation (écoulement de la saumure vers le massif ou micro-fuites par la cimentation du puits) peuvent acquérir à leur tour une importance décisive et rendre difficile l'interprétation (Bérest *et al.*, 2001).

## 6.2

### Essai à cavité ouverte (Liquid outflow test)

On peut aussi envisager de réaliser un essai « à pression constante dans la caverne » en laissant la tête de puits ouverte et en recueillant la saumure (ou l'hydrocarbure, dans certains cas) que le puits expulse naturellement. De manière équivalente, on peut laisser la tête de puits fermée et soutirer périodiquement de la cavité le volume de liquide nécessaire pour maintenir la pression dans la cavité égale à une valeur de consigne. De tels essais sont plus contraignants qu'un essai à cavité fermée, car il faut recueillir et mesurer au moins une fois par jour le débit de saumure (ou d'hydrocarbure) expulsé ; ils ont l'avantage de présenter une certaine analogie avec un essai de fluage au laboratoire, pendant lequel la contrainte appliquée est maintenue constante, en évitant notamment certains phénomènes transitoires. De tels essais ont été décrits par Clerc-Renaud et Dubois (1980), Hugout (1984), Gaulke *et al.* (2007). L'essai décrit par Hugout a été réalisé sur la petite (8000 m<sup>3</sup>) caverne EZ53 du site d'Etrez (Ain) exploité par Gaz de France (Fig. 5). Le puits contient un tube rempli de saumure saturée, ouvert en tête de puits ; l'annulaire, fermé en tête de puits, est rempli d'un hydrocarbure liquide, plus léger que la saumure, et dont la pression en tête de puits est donc supérieure à la pression atmosphérique. Trois mois après la fin du

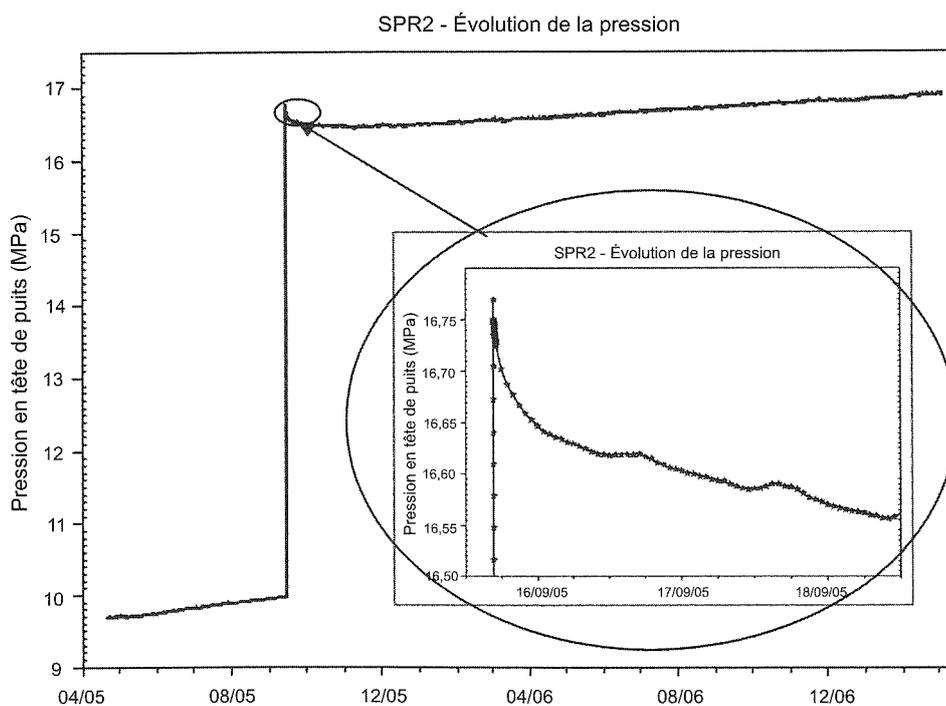


FIG. 4 Essai à caverne fermée sur la cavité SPR2 de Total à Carresse (Pyrénées-Atlantiques).

Shut-in Pressure Test in the SPR2 cavern of the Carresse site (Pyrénées-Atlantiques) operated by Total.

lessivage, au jour 93, le débit de saumure expulsé est de l'ordre de 100 litres/jour. On ouvre alors l'annulaire à la surface du sol : la pression dans la caverne chute de 11,4 MPa à 8,4 MPa, l'interface air/saumure descend dans le tube central, et de l'hydrocarbure est progressivement expulsée par l'annulaire (Fig. 6, cartouche de gauche). L'essai consiste à compter ce débit d'hydrocarbure. On observe un accroissement initial violent du débit expulsé, qui doit être attribué pour l'essentiel au fluage transitoire. Puis le débit décroît, mais il n'est pas aisé de faire la part respective du transitoire mécanique rhéologique, du transitoire mécanique géométrique et du ralentissement du réchauffement. Ce dernier est certainement important car après le jour 254 on rétablit la pression initiale, un débit négatif est d'abord observé (dû au fluage « inverse » et à la dissolution complémentaire) puis le débit se stabilise à une valeur de l'ordre de 50 l/jour, soit sensiblement la moitié de la valeur observée avant l'essai : la mesure de la température dans la caverne montre que le réchauffement s'est considérablement ralenti (une analyse complète peut être trouvée dans Van Sambeek *et al.*, 2005).

6.3

### Essai en sondage

Un essai en sondage (ne débouchant pas dans une caverne) présente l'avantage d'éliminer pratiquement les effets thermiques : l'équilibre entre le massif et la saumure dans le sondage est très vite atteint compte tenu des faibles dimensions horizontales du trou (il s'agit d'un équilibre global, la saumure est le siège d'une convection naturelle due au gradient géothermique). Le même argument de dimension indique toutefois que les effets de perméation prennent un poids important : alors que la perte relative de volume par fluage est indépendante des dimensions, le débit relatif de perméation de saumure varie comme l'inverse du carré de celles-ci.

Dans un sondage fermé dont le découvert est creusé dans un milieu peu perméable et visqueux comme le sel, la pression converge en quelques années vers une pression constante, plus élevée que la pression halmotatique et dont la valeur résulte d'un équilibre entre la perméation, réglée par les propriétés hydrauliques, et

la convergence, réglée par les propriétés mécaniques, de sorte qu'il ne renseigne qu'indirectement sur ces dernières.

Dans un sondage ouvert, comme dans une cavité ouverte, les effets de perméation sont moindres. À 1 000 m de profondeur, on peut attendre une vitesse de déformation du découvert de l'ordre de  $\dot{V}/V = -3.10^{-11} s^{-1}$ , ou  $5,5 \cdot 10^{-7} jour^{-1}$ , soit un débit de saumure en tête de puits de l'ordre de 1,2 cl/jour si le découvert a un volume de 4 m<sup>3</sup>. C'est un débit faible mais tout à fait mesurable, et l'essai mériterait d'être conduit. Le signal serait perturbé par les marées terrestres, dont la période est un peu supérieure à 12 heures, et qui engendrent des déformations de l'ordre de  $\epsilon = 10^{-8}$  à  $10^{-7}$ .

6.4

### Mines

Dans une mine exploitée par chambres et piliers on peut attendre, dans un quartier qui a cessé d'être exploité depuis plusieurs années, que la charge sur les piliers devienne constante. On peut ainsi bénéficier, en mesurant la hauteur des piliers et leur évolution, d'un essai « naturel » dans des conditions géométriques apparemment assez simples (et en bénéficiant d'une très grande constance de la température et de l'hygrométrie, si le quartier est éloigné de l'exploitation actuelle et du circuit de ventilation). Un ajustement de la loi de fluage des piliers d'une mine de potasse suivant la description de L-M-S a été proposé récemment par Campos de Orellana (1996). Dans une vieille mine comme celle de Varangéville, près de Nancy, exploitée par la compagnie CSME, on dispose de plus d'une estimation assez fiable de la hauteur initiale des piliers, creusés pour certains il y a plus d'un siècle. Mais ici aussi les conditions sont moins idéales que dans un laboratoire. Les piliers sont « encastrés » dans le toit et dans le mur, et ne réalisent donc pas les conditions de glissement parfait au contact entre l'éprouvette et les plateaux de la presse qu'on s'efforce de réaliser au laboratoire. De ce fait les piliers se déforment « en tonneau », et la distribution de contraintes est complexe au sein du pilier, Van Sambeek (1996), Laouafa et Ghoreychi (2006).

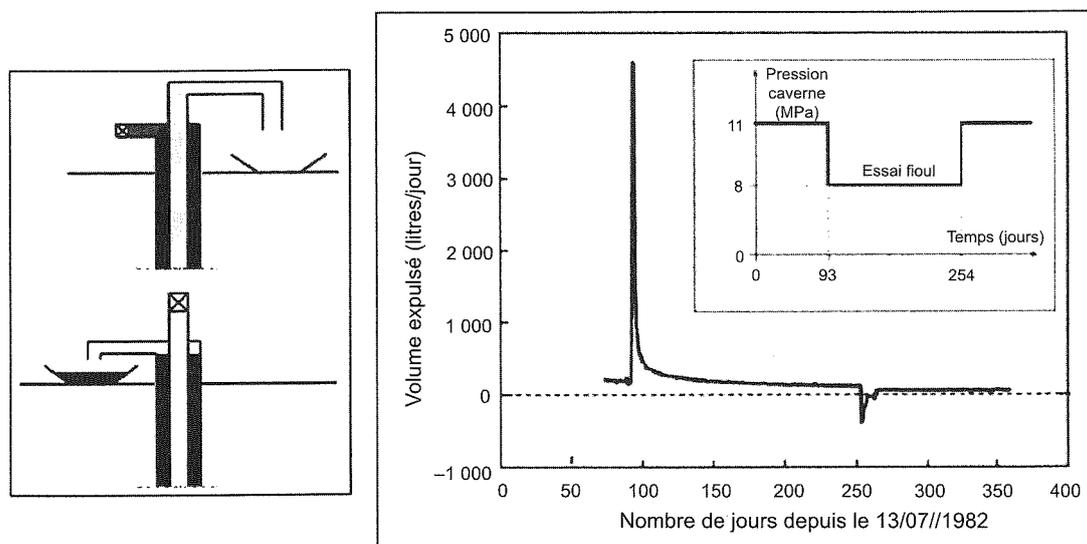


FIG. 5 Essai à cavité ouverte dans la caverne EZ53 de Gaz de France, d'après Hugout, 1984. Liquid outflow test in the Gaz de France EZ 53 cavern, after Hugout, 1984.

## Apport des observations géologiques

Les observations géologiques peuvent apporter des indications, d'autant que les formations salifères sont souvent affectées de déformations importantes. Notamment des dômes de sel se forment fréquemment à partir de couches qui étaient horizontales au moment du dépôt, sous l'effet des seules forces gravitaires : la compaction progressive des terrains sus-jacents rend leur poids volumique sensiblement plus grand que celui du sel, engendrant ainsi une situation instable : une intumescence quelconque au toit de la formation salifère tend à croître spontanément, et le sel remonte vers la surface du sol avec des vitesses qui peuvent être de l'ordre du mm/an ou même du cm/an. Les déplacements verticaux cumulés peuvent être d'ordre kilométrique. Il est toutefois difficile de tirer des conclusions définitives quant à la loi de comportement mécanique du sel, pour la même raison que dans le cas d'un ouvrage souterrain : on est très loin du cas élémentaire d'une éprouvette de laboratoire soumise à un chargement constant. Lorsque le dôme commence son ascension, les déséquilibres dus aux forces gravitaires, qui sont de l'ordre de grandeur de l'écart entre les poids volumiques multipliés par la hauteur du dôme, croissent avec le temps ; le dôme rencontre des obstacles divers (couches raides par exemple) qui peuvent ralentir pour un temps son développement. A supposer qu'on puisse reconstituer exactement la chronologie de la formation du dôme, il resterait des incertitudes quant à la part que prennent dans les étapes de cette chronologie la rhéologie du sel, l'accroissement des dimensions du dôme, la poursuite de la compaction, l'histoire des distributions de température et les circonstances extérieures comme l'érosion à la surface du sol.

## Micromécanismes

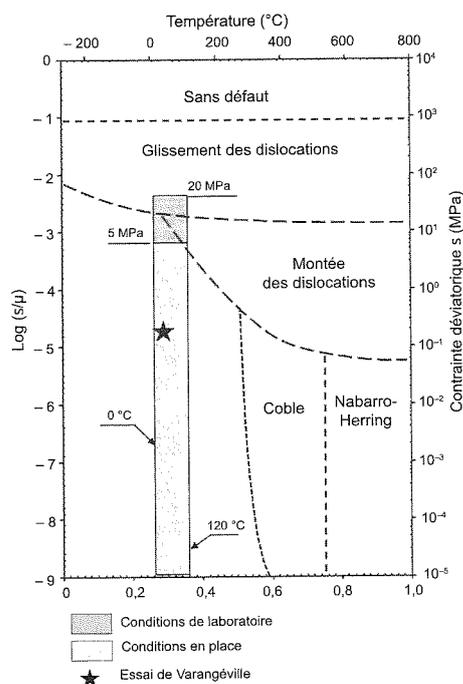


FIG. 6 Carte de mécanismes, d'après Munson et Dawson, 1984.  
Mechanism Map, after Munson and Dawson, 1984.

En principe, les prédictions relatives au comportement à long terme des roches devraient être basées sur une compréhension fine des mécanismes qui gouvernent ce comportement à petite échelle. Comme l'indique Langer (1984) : « *Reliable extrapolation of the creep equations over long period of time and at low deformation rates can only be carried out on the basis of deformation mechanisms. The construction of a deformation-mechanism map is an essential preliminary.* » De telles cartes des mécanismes de déformation sont présentées par Munson et Dawson (1984), Langer (1984), Blum et Fleischmann (1988). La température (absolue) est rapportée à la température de fusion ( $T_f = 1077$  K pour NaCl) et la contrainte déviatorique est rapportée au module de cisaillement ( $\mu$ ). Le sel cristallin en système cubique et un échantillon est constitué d'un très grand nombre de grains : les mécanismes sont *a priori* associés aux mouvements des dislocations, aux glissements suivant les directions données par le réseau cristallin et aux phénomènes affectant les joints de grains. Divers domaines apparaissent sur la carte, à l'intérieur desquels tel ou tel mécanisme de déformation est dominant (les frontières tracées correspondent au lieu des points où deux mécanismes ont une contribution égale à la vitesse de déformation). Les conditions de température et de contrainte dans un stockage de déchets radioactifs ou une caverne de stockage d'hydrocarbures sont inscrites dans le rectangle de la figure 6, limité par 25 °C et 200 °C, d'une part, 0,2 MPa et 20 MPa, d'autre part. Dans ce rectangle le mécanisme de déformation est « indéfini », même si on dispose d'un grand nombre de données empiriques. Les auteurs cités attribuent un modèle de comportement de Norton-Hoff à ce domaine ; Munson et Dawson indiquent qu'il n'y a pas de raison de penser que les mécanismes qui régissent le comportement transitoire soient distincts, de sorte que le fluage établi résulte d'un équilibre entre processus pour lequel aucun argument ne milite en faveur d'une modification au cours du temps. Malgré leur pertinence, ces arguments ne convaincront peut-être pas complètement les ingénieurs, d'autant que d'autres mécanismes ont été proposés par Pennock *et al.* (2006) pour décrire le comportement sous très faible contrainte déviatorique (de l'ordre de 0,1 MPa pour fixer les idées).

## Comportement à très long terme d'une caverne fermée

Hormis les deux paramètres élastiques  $E$  et  $\nu$ , qui sont identiques quel que soit le modèle retenu, à température fixée le modèle de L-M-S comporte trois constantes ( $A^*$ ,  $n^*$ ,  $\alpha^*$ ) et le modèle de N-H deux constantes ( $A$  et  $n$ ) auxquelles il faut ajouter les constantes du modèle transitoire de M-D. Dans un essai uniaxial sans diminution du chargement, quatre constantes de ce modèle jouent un rôle :  $K_{\dot{\epsilon}}$ ,  $m$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ . Il est facile d'ajuster les trois constantes du modèle de L-M-S et les six constantes du modèle de N-H complété par M-D pour que les deux modèles donnent des descriptions pratiquement indiscernables du même essai de fluage. Un exemple est donné à la figure 7 : on a simulé un essai d'une durée de 100 jours, la température est de 45 °C et la charge appliquée est 10 MPa. Le module élastique est  $E = 25\ 000$  MPa, le coefficient de Poisson est  $\nu = 0,25$ . Les paramètres du modèle de L-M-S sont

$A^* = \kappa^{-n^*} 5,6 \times 10^{-8} / \text{MPa}^{4,82} / \text{jour}^{0,058}$ ,  $n^* = 4,82$  et  $\alpha^* = 0,058$ . Pour le modèle de N-H on a retenu  $A = 2,6 \times 10^5 / \text{MPa}^{5,5} / \text{jour}$ ,  $n = 5,5$ . Pour le modèle de M-D on a  $K_0 = 3,3 \cdot 10^{-7}$ ,  $m = 3$ , et  $\beta = -7,74$ .

On a ensuite considéré le problème d'une cavité fermée et abandonnée. Du point de vue de la protection de l'environnement, il est important de prévoir comment la pression de la saumure contenue dans la cavité évoluera au cours du temps. Il ne faut pas, notamment, qu'elle dépasse ou même approche de trop près la valeur de la pression géostatique, afin que soit écarté le risque d'une fracturation du massif de sel qui pourrait conduire à expulser de la saumure saturée vers des horizons aquifères.

Il a été montré qu'à très long terme (plusieurs siècles après la fermeture de la caverne) l'évolution de cette pression résulte de deux phénomènes aux effets antagonistes : la fermeture de la caverne, qui résulte du fluage du sel, d'autant plus lente que la pression dans la caverne est élevée ; et la (micro) perméation de la saumure vers le massif de sel, qui est d'autant plus rapide que la pression est élevée. Lorsque ces deux phénomènes sont exactement équilibrés, la pression reste stationnaire (Bérest *et al.*, 2001).

On admet en général que le débit de (micro) perméation est proportionnel à l'écart entre la pression de la caverne et la pression de pore dans le massif, ou, autrement dit, qu'il suit la loi phénoménologique de Darcy, même si les mécanismes de cette perméation sont incomplètement compris. Durup (1994) a vérifié, au cours d'un long essai dans un puits creusé dans la formation salifère d'Étrez, que cette hypothèse était raisonnable. Dans les calculs décrits plus loin on a retenu une valeur de la perméabilité égale à  $k_{\text{hyd}}^{\text{hyd}} = 6 \times 10^{-22} \text{ m}^2$  et une diffusivité hydraulique de  $k_{\text{hyd}}^{\text{hyd}} = 4 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{jour}$ .

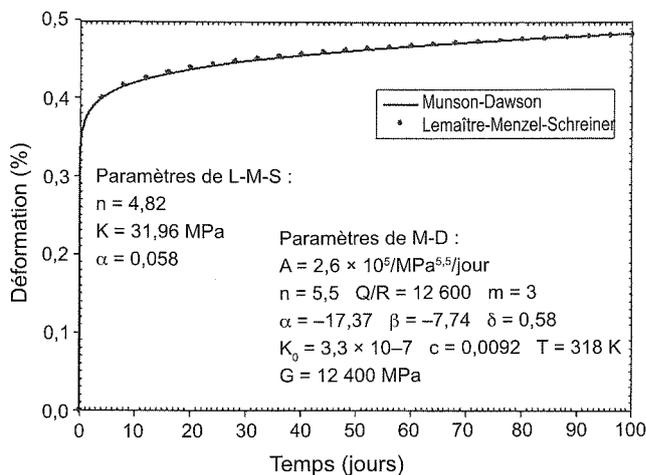
On a alors considéré une caverne de forme sphérique, d'un volume de  $33\,500 \text{ m}^3$  à  $1\,500 \text{ m}$  de profondeur, lessivée en 100 jours, fermée puis abandonnée. On a simulé son comportement de très long terme en utilisant les deux jeux de paramètres qui avaient permis de décrire l'essai uniaxial. A la profondeur de la caverne la température était estimée à  $60^\circ\text{C}$ , avec un gradient géothermique moyen de  $0,03^\circ\text{C}/\text{m}$ . La température du massif n'étant pas la même que celle de l'éprouvette, on a adopté une dépendance identique des paramètres  $A$  et  $A^*$  avec la température :

$$A(T) = A_{35^\circ\text{C}} \exp\left\{-\frac{Q}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{318}\right)\right\} \quad A^*(T) = A_{49^\circ\text{C}}^* \exp\left\{-\frac{Q}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{318}\right)\right\}$$

où  $Q/R = 12\,600 \text{ K}$  a la même valeur pour les deux modèles. De même il a fallu compléter les quatre constantes du modèle de M-D utilisées pour le modèle uniaxial par les deux nouvelles constantes  $c = 0,0092$  (qui décrit l'influence de la température sur la déformation  $\epsilon_s^*$ ) et  $\delta = 0,58$  (qui décrit le comportement au déchargement). Ces deux constantes nouvelles n'ont toutefois pas un très grand poids dans l'évolution à long terme.

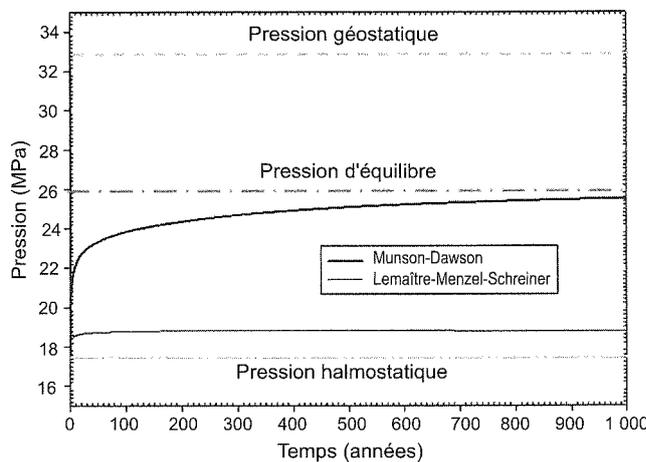
Les deux lois mécaniques de comportement donnent alors au comportement global de la caverne deux allures qualitativement distinctes :

- dans le cas de la loi de N-H (complétée par la loi de M-D pour la description de l'épisode transitoire) la pression dans la caverne croît lentement vers une valeur d'équilibre (un peu inférieure à  $26 \text{ MPa}$ ) comprise entre la pression géostatique ( $P_\infty = 33 \text{ MPa}$ ) et la pression halmostatique ( $P_h = 18 \text{ MPa}$ ). Cette pression



**FIG. 7** Essai de fluage simulé par la loi de L-M-S et la loi de N-H et M-D. La charge sur l'éprouvette est  $10 \text{ MPa}$  et la température est  $45^\circ\text{C}$ .

A creep test simulated by the L-M-S law and the N-H and M-D law. The applied load is  $10 \text{ MPa}$  and the temperature is  $45^\circ\text{C}$ .



**FIG. 8** Comportement à long terme de la pression dans une caverne fermée et abandonnée pour les deux modèles adoptés pour décrire l'essai uniaxial représenté à la figure 7.

Long-term behaviour of a sealed and abandoned cavern. The rheological models are identical to those considered when describing the uniaxial test shown on figure 7.

d'équilibre, atteinte à mi-hauteur de la caverne, peut être considérée comme sûre car même au sommet de la caverne la pression de la saumure est significativement plus faible que les contraintes régnant dans les terrains à la même profondeur : le risque d'une fracturation naturelle peut être écarté. Ce critère serait plus difficilement vérifié par une cavité de grande hauteur et de grandes dimensions ;

- dans le cas de la loi de L-M-S la pression dans la caverne reste beaucoup plus faible et décroît même après une période de 600 ans.

Les essais d'abandon réalisés dans des cavernes souterraines tendent à montrer l'existence d'une pression d'équilibre, comme le prévoit la loi de N-H (Bérest *et al.*, 2001 ; Brouard consulting *et al.*, 2006). Toutefois, ces essais ne constituent, pas plus que les autres essais en place décrits dans les paragraphes précédents, une

preuve décisive : leur durée a été de un an et demi et de quatre ans, respectivement. A la fin de tels essais, les évolutions deviennent suffisamment lentes pour qu'une extrapolation à des durées de plusieurs siècles soit inévitablement incertaine. Le choix ne peut être dicté en définitive, dans l'état actuel des connaissances, que par une considération qui relève de la précaution : en l'absence d'arguments décisifs, il faut essayer les divers modèles et retenir le modèle qui donne les résultats les moins favorables. Pour le problème de l'abandon d'une caverne, c'est donc le modèle de N-H qui doit être retenu.

10

## Conclusion

Il est difficile d'extrapoler à de très longues périodes de temps, de l'ordre du millénaire, les résultats d'essais de fluage conduits pendant une période de l'ordre d'une année. De tels essais peuvent être interprétés de manière également convaincante au moyen de lois de comportement différentes. En effet les essais de laboratoire et les mesures faites dans les ouvrages souterrains, étant affectés d'une incertitude résiduelle dont l'ordre de grandeur est comparable à l'écart entre les prévisions faites par les divers modèles, ne permettent pas de les discriminer. En revanche les modèles peuvent conduire à des conclusions très distinctes quant au comportement à long terme d'une cavité abandonnée.

Cette situation ne laisse pourtant pas complètement désarmé. On peut attendre un progrès régulier dans la qualité des mesures de laboratoire et en place, d'autant que ce problème de l'extrapolation est commun à de nombreux projets nouveaux d'utilisation du sous-sol (enfouissement de déchets, stockage du CO<sub>2</sub>) auxquels des moyens importants sont consacrés. La compréhension des micro-mécanismes à l'origine des déformations des roches, servie par des moyens d'observation à diverses échelles, fait des progrès rapides.

Il faut aussi garder à l'esprit qu'une connaissance parfaite du comportement à long terme n'est pas toujours strictement indispensable. Il faut vérifier, pour chaque ouvrage concret, les conséquences des incertitudes qui subsistent. On observe parfois que les objectifs de sécurité des personnes et de l'environnement peuvent rester satisfaits quand on conduit les calculs en faisant varier dans une très large gamme les valeurs des paramètres des modèles, ou même les modèles eux-mêmes. Les résultats des calculs permettent de pointer les incertitudes qui jouent un rôle majeur et de porter l'effort sur la réduction de celles-ci.

Un tel processus exige la confrontation régulière des opinions, par les publications dans les revues et les réunions internationales. L'ambition du présent article est de contribuer à cette discussion.

### REMERCIEMENTS

*Les auteurs remercient Gérard Vouille qui leur a fait part de nombreuses remarques et les collègues des entreprises CSME, Gaz de France, Geostock et Total avec lesquels ils ont partagé de fructueuses discussions et la conduite de plusieurs essais en place.*

## Bibliographie

- Abel J.-F. – « Rock Mechanics : can it pay its way ? » *Proceedings of the 3rd Symposium on Salt*, Northern Ohio Geological society Inc., 1970, p. 197-207.
- Ait Chalal A. – « A comparison of the responses of the Munson-Dawson and the Lemaître Model ». *Proceedings of the 3rd conference on the mechanical behavior of salt*, Trans Tech Pub, 1996, p. 67-74.
- Aubertin M., Sgaoula J., Servant S., Julien M.R. – « An up-to-date version of Suvic-D for modelling the behaviour of salt ». *Proceedings of the 4th conference on the mechanical behavior of salt*, Trans Tech Pub, 1998, p. 205-220.
- Baar C.A. – *Applied salt-rock mechanics*. Developments in geotechnical engineering. 16-A. Elsevier Science, vol. I, 1977.
- Bérest P., Bergues J., Brouard B., Durup J.G., Guerber B. – « A salt-cavern abandonment test ». *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* n° 38 (2), 2001, p. 343-355.
- Bérest P., Brouard B., Feuga B. – « Abandon des mines de sel : faut-il envoyer ? ». *Revue française de géotechnique*, n° 106-107, 2004, p. 53-71.
- Bérest P., Blum P.A., Charpentier J.-P., Gharbi H., Valès F. – « Very slow creep tests on rock samples ». *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* n° 42, 2005, p. 569-576.
- Bérest P., Brouard B., Karimi-Jafari M., Van Sambeek L. – « Transient behaviour of salt caverns. Interpretation of Mechanical Integrity Tests ». *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, n° 44, 2007, p. 767-786.
- Bérest P. – « Questions on the Prediction of the long-term behaviour of underground openings ». *Proceedings 11th ISRM Congress, Lisbonne*, 2008, vol. 3, p. 1413-1425.
- Blum W., Fleischmann C. – « On the deformation-mechanism map of rock salt ». *Proceedings of the 2nd conference on the mechanical behavior of salt*, Trans Tech Publ., 1988, p. 7-22.
- Brouard B., Bérest P. « A tentative classification of salts according to their creep properties ». *Proceedings of the SMRI Spring Meeting*, New Orleans, Louisiana, 1998, p. 18-38.
- Brouard Consulting, Institute für Unterirdisches Bauen (IUB), École polytechnique, Total E&P France, Géostock – Salt-Cavern Abandonment Field Test in Carresse. SMRI RFP 2003-2-B, Final Report, April 2006.
- Campos de Orellana A.J. – « Pressure solution creep and non-associated plasticity in the mechanical behavior of potash mine openings ». *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, vol. 33, n° 4, 1996, p. 347-370.
- Charpentier J.-P. « Creep of rock salt at elevated temperature ». *Proceedings of the 2nd conference on the mechanical behavior of salt*, Trans Tech Pub., 1988, p. 131-136.
- Clerc-Renaud A., Dubois D. – « Long-term operation of underground storage in salt ». *Proceedings of the 5th Symposium on Salt*, Northern Ohio Geological society Inc., vol. II, 1980, p. 3-10.
- Cristescu N.D., Hunsche U. – *Time Effects in Rock Mechanics*. John Wiley & Sons Ltd., 1998.
- DeVries K.L., Mellegard K.D., Callahan G.D. – « Cavern design using a salt damage criterion : proof-of-concept research final report ». *Proceedings of the SMRI Spring Meeting*, Houston, Texas, 2003, p. 1-18.
- Durup J.G. – « Long term tests for tightness evaluations with brine and gas in salt ». *SMRI Fall Meeting*, Hannover, Germany, 1994.
- Durup G., Xu J. – « Comparative Study of Certain constitutive Laws used to describe the rheological deformation of salts ». *Proceedings of the 3rd conference on the mechanical behavior of salt*, Trans Tech Pub, 1996, p. 75-83.
- Gaulke K, Rokhar R., Staudmeister K., Zander-Schiebenhofer D. – « Reassessment of the creep behaviour of the Rüstringen salt dome for optimization and future development of the crude oil cavern storage facility ». *Proceedings of the SMRI Fall Meeting*, Halifax, Canada, 2007, p. 155-172.
- Horseman S.T. – « Moisture content. A major uncertainty in storage cavity closure prediction ». *Proceedings of the 2nd conference on the mechanical behavior of salt*, Trans Tech Pub, 1988, p. 53-68.
- Hugout B. – « Mechanical behavior of salt cavities -in situ tests- model for calculating the cavity volume evolution ». *Proceedings of the 2nd conference on the mechanical behaviour of salt*, Trans Tech Pub, 1988, p. 291-310.
- Hunsche U., Schultze O. – « Effect of humidity and confining pressure on creep of rock salt ». *Proceedings of the 3rd conference on the mechanical behaviour of salt*, Trans Tech Pub., 1996, p. 237-248.
- Hunsche U., Schultze O. – « Humidity induced creep and its relation to the dilatancy ». *Proceedings of the 5th conference on the mechanical behaviour of salt*, Balkema, 2002, p. 73-87.
- Karimi-Jafari M. – *Sur le comportement transitoire des cavités salines profondes*. Thèse de doctorat de l'École polytechnique, 12 novembre 2007.
- Laouafa F., Ghoreychi M. – « Salt pillar creep analysis ». *Proceedings of Eurock 06, european regional ISRM symposium, Liège, Belgique*, 2006, p. 381-388.
- Langer M. – « The rheological Behaviour of Rock salt ». *Proceedings of the 1st conference on the mechanical behavior of salt*, Trans Tech Pub, 1984, p. 201-240.
- Lux K.H., Heusermann S. – « Creep tests on rock salt with changing load as a basis for the verification of theoretical material laws ». *Proceedings of the 6th International Symposium on Salt*. The Salt Institute, 1983, vol. I, p. 417-35.
- Mandel J. – « Généralisation non linéaire des corps de Maxwell et de Kelvin. Fluage et relaxation ». *Colloque international de rhéologie*, Publications du CNRS, 1960.
- Munson D.E., Dawson P.R. – « Salt constitutive modeling using mechanism maps ». *Proceedings of the 1st Conference on the Mechanical Behavior of Salt*. Trans Tech Pub, 1984, p. 717-737.
- Munson D.E., Fossum A.F. – « Approach to first model prediction of measured WIPP in situ room closure in salt ». *Proceedings of the 30th US symposium on Rock Mechanics*, West Virginia University, 1989.
- Nguyen Minh D., Pouya A. – « Une méthode d'étude des excavations souterraines en milieu viscoplastique. Prise en compte d'un état stationnaire des contraintes ». *Revue Française de Géotechnique*, n° 59, 1992, p. 5-14.
- Pennock G.M., Drury M.R., Peach C.J. et Spiers C.J. « The influence of water on deformation microstructures and textures in synthetic NaCl ». *Journal of Structural Geology*, n° 28, 2006, p. 1-14.
- Perrier F, Morat P, Le Mouél J.-L. – « Pressure induced temperature variations in an underground quarry ». *Earth Planet Science Letters* n° 191, 2001, p. 145-156.
- Popp T, Wiedeman M, Kansy A., Pusch G. – « Gas transport in dry rock salt-implications from laboratory investigations and field studies ». *Proceedings of the 6th conference on the mechanical behavior of salt*, Taylor & Francis Group, 2007, p. 17-26.
- Pouya A. – « Correlation between mechanical behaviour and petrological properties of rock salt ». *Proceedings of the 32nd US Symposium on Rock Mechanics*, Balkema, 1991, p. 385-392.
- Pouya A. – *Comportement rhéologique du sel gemme. Application à l'étude des excavations souterraines*. Thèse de doctorat de l'École nationale des ponts et chaussées, 18 octobre 1991.
- Ratigan J.L., Van Sambeek K.L., De Vries K.L., Nieland J.D. – *The influence of seal design on the development of the disturbed rock zone in the WIPP alcove seal tests, RSI-0400*, Report prepared by RE/SPEC Inc. Rapid City, SD, for Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM, 1991.
- Ratigan J. – « The SMRI cavern sealing & abandonment research program Summary ». *Proceedings of the SMRI Spring Meeting*, Houston, Texas, 2003, p. 141-164.
- Serata S. – « Application of continuum mechanisms to design of deep potash mines in Canada ». *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.*, 1968, p. 293-314.
- Spiers, C.J., Peach C.J., Brzesowsky R.H., Schutjens P.M.T.M, Liezenberg J. L., Zwart H.J. – *Long Term Rheological and Transport Properties of Dry and Wet Salt Rocks*, EUR 11848, prepared for Commission of the European Communities, by University of Utrecht, Utrecht, The Netherlands, 1988.
- Tijani M. – « Zones de traction au cours d'essais de compression ». *Comptes rendus du 6<sup>e</sup> Congrès de la Société internationale de mécanique des roches*, Balkema, vol. 1, 1987, p. 1279-1282.
- Tijani S.M., Vouille G., Hugout B. – « Le sel gemme en tant que fluide visqueux ». *Comptes rendus du 7<sup>e</sup> Congrès de la Société internationale de mécanique des roches*, 1983, p. 241-246.
- Van Sambeek L.L. – « Salt Pillar Design Equation ». *Proceedings of the 4th conference on the mechanical behavior of salt*. Trans Tech Pub, 1996, p. 495-508.
- Van Sambeek L.L., Bérest P., Brouard B. – *Improvements in mechanical integrity tests for solution-mined caverns used for mineral production or liquid-product storage*. SMRI Research Project Report 2005-1. 142 p.
- Vouille G., Tijani S.M., de Grenier F. – « Experimental determination of the rheological behavior of Tersanne rock salt ». *Proceedings of the 1st conference on the mechanical behavior of salt*. Trans Tech Pub, 1984, p. 407-420.
- Wawersik W.R., Preece D.S. – « Creep testing of salt : Procedures, problems and suggestions ». *Proceedings of the 1st conference on the mechanical behavior of salt*. Trans Tech Pub, 1984, p. 421-449.

# Analyse semi-probabiliste de la capacité portante des fondations superficielles

L. BELABED  
M. BENCHEIKH

Laboratoire de Génie civil  
et Hydraulique  
Université de Guelma  
BP 401  
Guelma, Algérie  
DrBelabed@yahoo.de

## Résumé

Les fondations superficielles sont largement utilisées dans le domaine de la construction. L'étude de leur stabilité en particulier vis-à-vis du poinçonnement constitue un aspect primordial dans le but de construire des fondations et des ouvrages plus fiables et économiques. Dans cet article, on propose une analyse semi-probabiliste de la stabilité des fondations superficielles vis-à-vis du poinçonnement à l'état ultime basée sur l'Eurocode 7. Cette nouvelle approche prend en considération le caractère aléatoire des paramètres d'influence (géométrie, sol, surcharge), notamment celui des paramètres de cisaillement du sol. Une comparaison de cette approche semi-probabiliste avec des approches conventionnelles nationales (approches déterministes) est effectuée pour différents cas de chargement et différents types de sol.

*Mots-clés* : fondations superficielles, capacité portante, stabilité, Eurocode 7, probabilité de rupture, indice de fiabilité.

## Semi-probabilistic analysis of the bearing capacity of the shallow foundations

## Abstract

The shallow foundations are largely used in the field of construction. The study of their stability in particular bearing capacity constitutes a fundamental aspect with an aim of building foundations and even works more reliable and economic. In this paper, we propose a semi-probabilistic analysis of the bearing capacity of the shallow foundations at the ultimate state based on the new Eurocode 7. This new approach takes into account the randomness of the parameters of influence (geometry, ground, loads), in particular of the soil strength parameters. A comparison between this semi-probabilistic approach and conventional national approaches (deterministic approaches) is carried out for several cases of loading and types of soil.

*Key words* : shallow foundations, bearing capacity, stability, Eurocode 7, probability of failure, reliability index.

NDLR : Les discussions sur  
cet article sont acceptées  
jusqu'au 1<sup>er</sup> septembre 2009.

## Introduction

Depuis longtemps, on sait dimensionner des fondations et des ouvrages stables en augmentant la section ou la surface des éléments constituant l'interface avec le sol, et ceci à travers l'utilisation de facteurs de sécurité globaux empiriques déterminés arbitrairement par l'expérience. De ce fait, on obtient souvent des constructions surdimensionnées.

La nécessité de construire des ouvrages plus fiables et économiques a amené les ingénieurs à développer un nouveau concept de sécurité basé sur la théorie de la probabilité qui devrait satisfaire ces exigences. On utilise à cette fin des facteurs partiels de sécurité dérivés de méthodes probabilistes pour couvrir la dispersion aléatoire des paramètres influant sur la stabilité de l'ouvrage au lieu d'un facteur global de sécurité (concept conventionnel). La sécurité du système est exprimée par la probabilité de rupture  $P_f$  ou par l'indice de fiabilité  $\beta$  défini par Hasofer/Lind (Späthe, 1987 ; Mignan et Bagheri, 1982). Ce nouveau concept permet en théorie une comparaison objective et rationnelle des différents modes de rupture d'une structure et même des différentes structures à travers un indice de fiabilité homogène et invariable, ce qui n'est pas le cas pour le concept conventionnel (Bencheikh, 2005 ; Belabed, 1995, 1999a et b). La calibration des codes réglementaires semi-probabilistes vise à atteindre cette homogénéité, mais elle n'est que partielle (JCSS, 2001 ; Vrouwenvelder, 2002).

L'objectif de ce travail est l'étude dans un premier temps de la stabilité semi-probabiliste des fondations superficielles vis-à-vis du poinçonnement à l'état ultime d'après l'Eurocode 7 (2004). Une étude comparative avec le concept global conventionnel de sécurité (approche déterministe) a été ensuite effectuée pour valoriser l'analyse semi-probabiliste.

L'étude probabiliste de la stabilité de tout ouvrage en génie civil, en particulier géotechnique (fondations, murs de soutènement, etc.), doit se faire dans l'ordre suivant (Nottrodt, 1990).

### A - Modèles mécaniques

Recherche des différents modèles mécaniques caractérisant les différentes possibilités de rupture d'une structure, basés sur des essais et sur des constatations tirées de l'analyse d'ouvrages réels existants.

Formulation des équations d'état limite correspondant à ces modèles.

### B - Études paramétriques

Dimensionnement de l'élément ou de l'ouvrage.

Identification des paramètres aléatoires et de leurs propriétés statistiques.

Calcul de l'indice de fiabilité  $\beta$  ou de la probabilité de rupture  $P_f$ .

## Principe de l'approche probabiliste

### Définition

Le coefficient (facteur) de sécurité  $F_S$  d'un ouvrage est défini classiquement comme le rapport de la

résistance à la rupture (capacité)  $R$  sur la sollicitation  $S$  appliquée :  $F_S = \frac{R}{S}$ .

Dans les calculs avec l'approche probabiliste, on renonce à la notion classique du facteur global de sécurité  $F_S$  et on considère  $R$  et  $S$  comme deux variables aléatoires possédant chacune une moyenne et un écart-type ( $m_R, \sigma_R$ ) et ( $m_S, \sigma_S$ ). On applique ainsi des facteurs partiels de sécurité sur les sollicitations et sur les résistances. La différence entre les deux variables aléatoires  $Z = R - S$  est appelée *marge de sécurité*. La marge de sécurité est évidemment une variable aléatoire (Belabed, 1996).

Un état limite est atteint lorsque  $Z = R - S = 0$ . Cette équation est appelée *équation d'état limite ou de performance*. Il y a rupture lorsque  $S$  devient supérieur ou égal à  $R$ , c'est-à-dire  $Z \leq 0$ , et on peut définir la probabilité de rupture comme (Späthe, 1987, Belabed, 1996) :

$$P_f = P_f [(R - S) \leq 0] = P_f (R \leq S) \quad (1)$$

Si  $Z > 0$ , ou  $R > S$ , la structure est dite stable.

Lorsque les variables  $R$  et  $S$  suivent des lois normales de Gauss, la marge de sécurité  $Z = R - S$  suit également une loi normale de densité (Fig. 1) :

$$f_z(Z) = \frac{1}{\sigma_z \cdot \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{Z - m_z}{\sigma_z} \right)^2 \right] \quad (2)$$

dont la moyenne  $m_z$  et l'écart-type  $\sigma_z$  sont :

$$m_z = m_R - m_S \quad (3)$$

$$\sigma_z = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2} \quad (4)$$

La forme retenue pour les distributions de  $R$  et  $S$  a une influence non négligeable sur la probabilité de rupture ou de ruine.

La rupture est associée à la portion de la densité de probabilité de la marge de sécurité correspondant à une valeur négative de cette marge, c'est-à-dire à  $Z < 0$  représentée par des hachures sur la figure 1. La surface hachurée est la probabilité de rupture ou de ruine  $P_f$  calculée au moyen de l'intégrale (Späthe, 1987) :

$$P_f = \int_{-\infty}^0 f_z(z) \cdot dz \quad (5)$$

Au lieu de la probabilité de rupture  $P_f$ , Cornell (cité par Späthe, 1987 et Favre, 2004) exprime la sécurité par un indice de fiabilité  $\beta$ , qui se calcule d'après la formule suivante (Fig. 1) :

$$\beta = \frac{m_z}{\sigma_z} \quad (6)$$

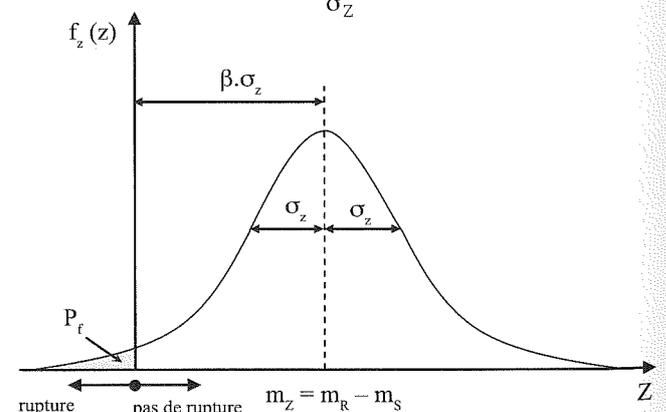


FIG. 1 Densité de probabilité de la marge de sécurité  $Z$  avec l'indice de fiabilité  $\beta$ .  
Probability density of safety margin  $Z$  with reliability index  $\beta$ .

Il existe plusieurs méthodes mathématiques pour résoudre l'équation intégrale (5) : méthode de Rosenbluth, méthode des moments, théorie de la fiabilité de premier ordre (méthode FORM), théorie de la fiabilité de deuxième ordre (méthode SORM), méthode de Monte-Carlo, etc. Dans ce travail, l'analyse de la fiabilité a été effectuée à l'aide de la théorie de la fiabilité de premier ordre dont le principe est expliqué ci-dessous.

## 2.2

### Théorie de la fiabilité de premier ordre (méthode FORM)

L'exemple d'un cas simple de deux variables aléatoires  $R$  et  $S$  de distributions symétriques est illustré sur les figures 2 et 3. Les densités de probabilités,  $f_R(R)$  pour la capacité  $R$  et  $f_S(S)$  pour la sollicitation  $S$ , sont représentées dans un système de coordonnées  $R$ - $S$  (Fig. 2). Les courbes d'équiprobabilité,  $f_R(R) \cdot f_S(S) = \text{constante}$ , ont une forme ellipsoïdale. L'équation d'état limite  $R - S = 0$  est présentée dans le même système de coordonnées (Fig. 2). Elle divise le plan en une zone de sécurité ( $R > S$ ) et une zone de rupture ( $R \leq S$ ) (pour plus de détails, voir Späthe, 1987).

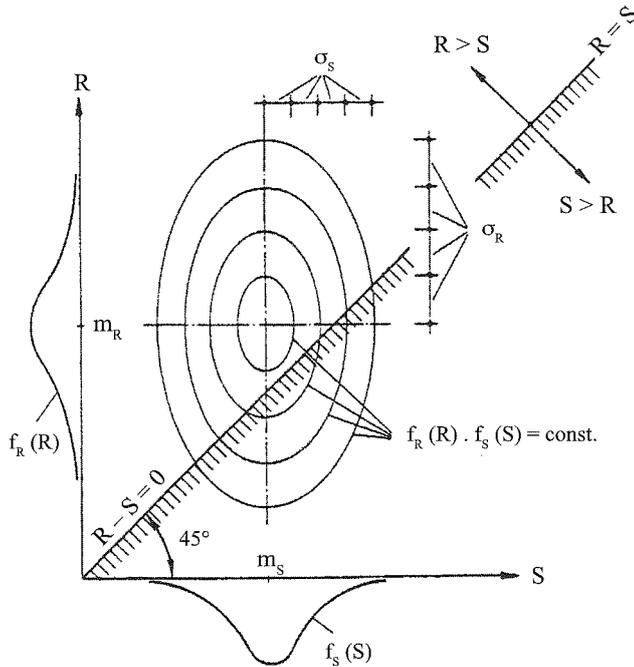


FIG. 2 Représentation de l'équation d'état limite et des densités de probabilité dans le système d'axes originel.

Representation of the limit state equilibrium and densities of probability in the original axis system.

Pour déterminer l'indice de fiabilité  $\beta$ , toutes les variables aléatoires non normales (ici  $R$  et  $S$ ) doivent être normalisées en passant dans le plan réduit ( $m = 0$ ,  $\sigma = 1$ ) par la relation :

$$U = \frac{(X_i - m_{X_i})}{\sigma_{X_i}} \quad (7)$$

où  $U$  est la variable aléatoire réduite ;  $X_i$ , la variable aléatoire ;  $m_{X_i}$ , la valeur moyenne de la variable aléatoire et  $\sigma_{X_i}$ , l'écart-type de la variable aléatoire.

A travers cette transformation, les ellipses deviennent des cercles (Fig. 3).

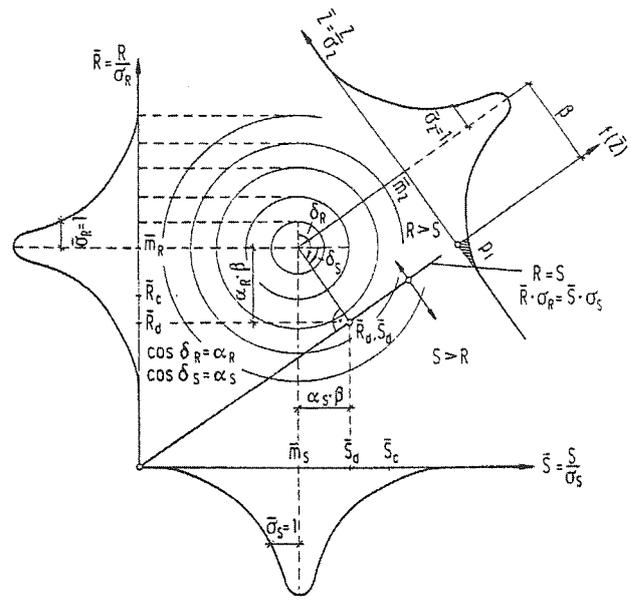


FIG. 3 Indice de fiabilité et valeurs de calcul dans le plan standardisé ou réduit.

Reliability index and computation values in the standard or reduced plane.

L'équation d'état limite, qui est en réalité dans le cas général souvent courbe, est remplacée approximativement par une droite tangentielle (Späthe, 1987). D'après la définition de Hasofer/Lind (1974), citée par Späthe (1987), l'indice de fiabilité  $\beta$  est égal à la plus courte distance entre le milieu du cercle, courbes d'équiprobabilité, et la droite tangentielle approximative de l'équation d'état limite (Späthe, 1987 ; Ditlevsen, 1982 ; JCSS, 2001). Si on projette maintenant les courbes d'équiprobabilité sur un plan perpendiculaire à la droite tangentielle, on obtient une courbe de distribution qui correspond à la densité de probabilité de la marge de sécurité  $Z$  (Fig. 3). De cette projection, on déduit l'indice de fiabilité  $\beta$  et la zone négative correspond à la probabilité de rupture ou de ruine  $P_f$ .

Il existe une relation mathématique entre la probabilité de rupture  $P_f$  et l'indice de fiabilité  $\beta$  :

$$P_f = \Phi(-\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{Z}{\sigma_Z} - \beta\right)^2\right] d\left(\frac{Z}{\sigma_Z}\right) \quad (8)$$

avec  $\Phi()$  la fonction de distribution normale standardisée ou réduite. Des exemples numériques de cette dernière relation sont regroupés dans le tableau I.

TABLEAU I Relation entre l'indice de fiabilité  $\beta$  et la probabilité de rupture  $P_f$  (d'après l'équation 8). Relation between reliability index  $\beta$  and probability of failure  $P_f$  (after equation 8).

$\beta$ [-]	5,2	4,7	4,2	3	2,5	2
$P_f$ [-]	$\approx 10^{-7}$	$\approx 10^{-6}$	$\approx 10^{-5}$	$\approx 10^{-3}$	$\approx 5.10^{-3}$	$\approx 10^{-2}$

L'indice de fiabilité  $\beta$  déterminé par cette méthode correspond à la sécurité minimale. La perpendiculaire abaissée du milieu du cercle donne par intersection avec la droite tangentielle le point le plus dangereux sur la courbe de l'équation d'état limite qui présente la plus grande probabilité de ruine (Fig. 3). Ce point est

appelé le « point de calcul » et ses coordonnées  $R_d$  et  $S_d$  sont appelées « valeurs de calcul » (Belabed, 1996) :

$$R_d = m_R - \beta \cdot \alpha_R \cdot \sigma_R ; S_d = m_S + \beta \cdot \alpha_S \cdot \sigma_S \quad (9)$$

où l'indice « d » signifie design (valeur de calcul) et

$$\alpha_R = \frac{\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} ; \alpha_S = \frac{\sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (10)$$

sont les facteurs de sensibilité ou les cosinus directeurs. Les facteurs de sensibilité  $\alpha_i$  peuvent prendre des valeurs entre -1 et +1. Plus le facteur de sensibilité  $|\alpha_i|$  se rapproche de l'unité, plus la contribution à la probabilité de ruine d'un paramètre de base est importante (Nottrodt, 1990 ; Belabed, 1996). La condition suivante doit être vérifiée :  $\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1$ .

Les résistances et les sollicitations de calcul sont déterminées pratiquement en introduisant les coefficients partiels de sécurité, qui permettent de les calculer simplement à partir des valeurs moyennes  $m_R$  et  $m_S$  :

$$R_d = \frac{m_R}{\gamma_R} ; S_d = \gamma_S \cdot m_S \quad (11)$$

où  $\gamma_R$  et  $\gamma_S$  sont les facteurs partiels de sécurité respectivement de sollicitation et de résistance.

Pour vérifier la sécurité d'une structure quelconque (par exemple : une fondation superficielle), la relation suivante doit donc être satisfaite :

$$R_d \geq S_d \quad (12)$$

A partir des équations (9) et (11), on obtient les facteurs partiels de sécurité :

$$\gamma_S = 1 + \beta \cdot \alpha_S \cdot V_S \quad \text{avec} \quad V_S = \frac{\sigma_S}{m_S} \quad (13)$$

$$\gamma_R = \frac{1}{1 - \beta \cdot \alpha_R \cdot V_R} \quad \text{avec} \quad V_R = \frac{\sigma_R}{m_R} \quad (14)$$

où  $V_R$  et  $V_S$  sont des coefficients de variation respectivement de la résistance  $R$  et de la sollicitation  $S$ .

L'analyse des équations (9) à (14) montre l'influence du coefficient de variation et du type de distribution de la densité de probabilité ( $\sigma$ ,  $m$ ) sur le calcul probabiliste de la sécurité (valeurs de calcul des paramètres et facteurs partiels de sécurité). La détermination de ces paramètres statistiques doit se faire aussi minutieusement que possible, ce qui est souvent difficile en mécanique des sols à cause de l'insuffisance des données géotechniques.

En réalité, dans le cas général, le nombre de variables aléatoires est supérieur à deux, ce qui rend le calcul graphique et manuel de  $\beta$  très complexe et pénible. Le point de calcul est recherché de manière itérative en utilisant des algorithmes de calcul tels que l'algorithme de Späthe (1987) et l'algorithme de Rackwitz/Fiebler (Fiebler *et al.*, 1976 ; Rackwitz, 1978). Ces algorithmes sont intégrés dans le logiciel ZUVAN (Belabed, 1996), utilisé dans ce travail.

Les vérifications de fiabilité des ouvrages sont généralement effectuées suivant deux méthodes : la méthode probabiliste ou la méthode semi-probabiliste.

Avec les méthodes probabilistes, on peut calculer les facteurs partiels de sécurité nécessaires pour la vérification de la sécurité (fiabilité) d'après la méthode semi-probabiliste. La méthode probabiliste est inconnue pour l'ingénieur praticien et nécessite des connaissances approfondies en probabilité, ce qui la rend pra-

tiquement inutilisable. En revanche, dans la méthode semi-probabiliste, le praticien n'a pas besoin d'avoir des connaissances approfondies en probabilité puisque les facteurs partiels de sécurité lui sont donnés directement par des normes spécifiques. Dans notre travail, l'étude de la stabilité des fondations superficielles vis-à-vis du poinçonnement a été effectuée d'après la méthode semi-probabiliste.

3

## Modèles mécaniques

Pour la modélisation mécanique de la rupture des fondations superficielles par poinçonnement, on trouve dans la littérature plusieurs méthodes qui sont en général inspirées de la théorie classique de Prandtl : formation d'un cône rigide solidaire de la fondation (Fig. 4). Dans ce travail, on a étudié deux types de fondation superficielle : la semelle filante et la semelle carrée. On suppose que :

- la semelle repose sur un massif homogène horizontal ;
- l'effet des contraintes de cisaillement au contact sol-fondation est négligé ;
- le sol situé au-dessus de l'horizontale AA' de la base de la fondation agit comme une surcharge verticale constante d'intensité  $\gamma D$  (Figs. 4 et 6) ;
- aucune nappe d'eau n'est présente.

3.1

### Semelle filante

On considère le cas d'une semelle filante de largeur  $B$  enterrée dans le massif à une profondeur  $D$  (Figs. 4 et 6). Trois cas de charge ont été analysés.

#### Charge verticale centrée

Le modèle mécanique classique de rupture est représenté sur la figure 4. L'équation d'état limite générale donnant la contrainte limite de rupture s'écrit :

$$q_L = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot B \cdot N_\gamma + \gamma \cdot D \cdot N_q + c' \cdot N_c \quad (15)$$

où  $\gamma$  est le poids volumique du sol et  $c'$ , la cohésion effective du sol.

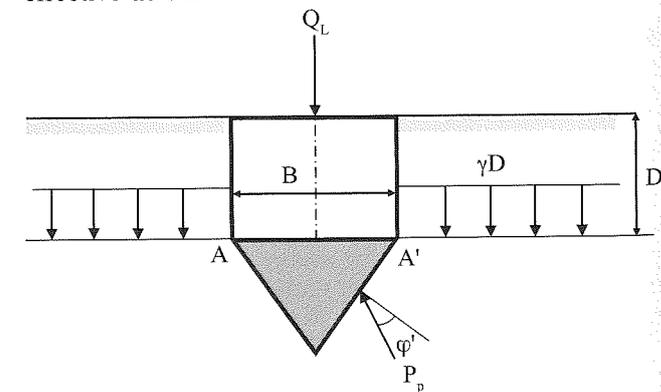


FIG. 4. Équilibre des terres sous la fondation (charge verticale centrée).  
Equilibrium of earth mass under the foundation (vertical centered load).

**TABLEAU II** Facteurs de capacité portante.  
Bearing capacity factors.

Approche	Facteurs de portance	$N_\gamma$	$N_c$	$N_q$
DTU 13.12 (1988)		$1,85 (N_q - 1) \operatorname{tg} \varphi'$	$\operatorname{cotg} \varphi' (N_q - 1)$	$\operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right) e^{\pi \operatorname{tg} \varphi'}$
DIN 1054 (1976 et 2005)		$2 (N_q - 1) \operatorname{tg} \varphi'$	$\operatorname{cotg} \varphi' (N_q - 1)$	$\operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right) e^{\pi \operatorname{tg} \varphi'}$
Eurocode 7 (2004)		$2 (N_q - 1) \operatorname{tg} \varphi'$	$\operatorname{cotg} \varphi' (N_q - 1)$	$\operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right) e^{\pi \operatorname{tg} \varphi'}$

$N_\gamma$ ,  $N_q$  et  $N_c$  sont les facteurs de capacité portante dépendant de l'angle de frottement interne  $\varphi'$ . Le tableau II regroupe les formules de calcul de ces trois facteurs suivant l'approche française DTU 13.12 (1988) et l'approche allemande DIN 1054 (1976 et 2005), ainsi que pour l'Eurocode 7 (2004).

### 3.1.2

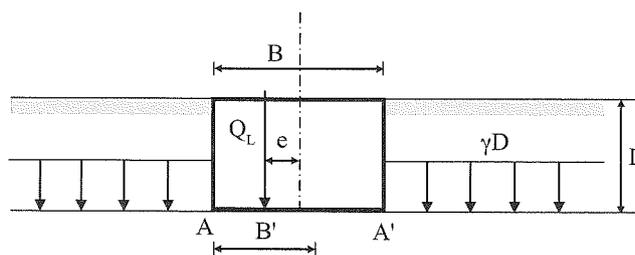
#### Charge verticale excentrée

Des essais sur modèles réduits ont montré qu'en milieu pulvérulent le coin qui se crée sous la fondation à la rupture garde la même forme que pour une charge verticale centrée, mais que ses dimensions se réduisent de manière à ce que la ligne d'action de la charge et l'axe de symétrie du coin coïncident. Dans le cas d'une semelle filante supportant une charge verticale excentrée suivant B (Fig. 5), Meyerhof (1953), cité par Costet et Sanglerat (1983) et Frank (2003), a proposé d'attribuer à cette semelle une largeur fictive centrée sur la charge  $B' = B - 2e$ , où  $e$  désigne l'excentricité de la charge.

L'équation d'état limite générale donnant la charge limite de rupture par mètre de semelle est :

$$Q_L = q_L \cdot B' = B' \left[ \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot B' \cdot N_\gamma + \gamma \cdot D \cdot N_q + c' \cdot N_c \right] \quad (16)$$

Cette équation est valable pour toutes les approches.

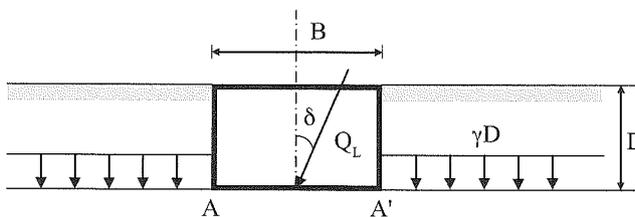


**FIG. 5** Charge verticale excentrée.  
Eccentric vertical load.

### 3.1.3

#### Charge centrée inclinée

L'inclinaison de la charge diminue fortement la capacité portante des fondations (Fig. 6). Meyerhof (1953), cité par Costet et Sanglerat (1983) et Frank (2003), a également résolu le problème de manière approchée en introduisant des coefficients correcteurs



**FIG. 6** Charge centrée inclinée.  
Inclined centered load.

**TABLEAU III** Coefficients correcteurs pour une charge inclinée.  
Correction coefficients for inclined load.

Approche	Coefficient	$i_q$	$i_\gamma$
DTU 13.12 (1988)		$\left( 1 - \frac{2\delta}{\pi} \right)^2$	$\left( 1 - \frac{\delta}{\varphi'} \right)^2$
DIN 1054 (1976)		$(i_q N_q - 1) / (N_q - 1)$	$(1 - 0,7H / (V + B'c' \operatorname{cotg} \varphi'))^3$
DIN 1054 (2005)		$(i_q N_q - 1) / (N_q - 1)$	$(1 - H / (V + B'c' \operatorname{cotg} \varphi'))^3$
Eurocode 7 (2004)		$(i_q N_q - 1) / (N_q - 1)$	$(1 - H / (V + B'c' \operatorname{cotg} \varphi'))^2$

d'inclinaison  $i_\gamma$ ,  $i_q$  et  $i_c$  dans les trois termes de l'expression de la pression de rupture (16).

L'équation d'état limite générale donnant la contrainte limite de rupture est ainsi :

$$\alpha_L = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot B \cdot N_\gamma \cdot i_\gamma + \gamma \cdot D \cdot N_q \cdot i_q + c' \cdot N_c \cdot i_c \quad (17)$$

$i_q$ ,  $i_c$  et  $i_\gamma$  sont les coefficients correcteurs d'inclinaison dépendant de l'inclinaison de la charge  $\delta$  (Fig. 6), de l'angle de frottement interne  $\varphi'$  et de la cohésion  $c'$ . Le tableau III fournit les formules de ces trois coefficients pour les différentes approches de calcul :  $\delta$  est l'angle d'inclinaison de la charge par rapport à la verticale ; H et V, les composantes horizontale et verticale de la charge extérieure Q par mètre de semelle centrée et inclinée de l'angle  $\delta$  par rapport à la verticale (Fig. 6).

### 3.2

## Semelle carrée

Pour tenir compte de la forme géométrique de la semelle (largeur B et longueur L), on utilise la formule donnant la capacité portante de la semelle filante (éq. 15) en affectant chacun des trois facteurs de capacité portante de coefficients correcteurs appelés facteurs de forme  $S_q$ ,  $S_c$  et  $S_\gamma$ . Ces facteurs sont établis de manière empirique à partir de résultats d'essais de laboratoire et de constatations faites sur la capacité portante de semelles réelles. Le tableau IV regroupe les formules de ces trois facteurs de forme pour différentes approches de calcul (pour une semelle carrée faire B = L).

Les mêmes cas de chargement que pour les semelles filantes ont été étudiés pour les semelles carrées. On constate une bonne concordance entre l'Eurocode 7 (2004) et la norme allemande DIN 1054 (1976 et 2005) dans les formules de calcul des différents facteurs

intervenant dans l'estimation de la capacité portante. En revanche, le règlement français DTU 13.12 (1988) propose généralement des formules différentes (voir tableaux II, III et IV).

### 4

## Études paramétriques

### 4.1

## Introduction

L'étude semi-probabiliste de la capacité portante des fondations superficielles est effectuée en deux étapes :

- dimensionner la semelle en déterminant sa largeur minimale d'après différentes approches pour différents cas ;
- évaluer la sécurité correspondante en calculant la probabilité de rupture ou l'indice de fiabilité.

Les études paramétriques ont été effectuées pour une semelle de largeur B et de longueur L, encadrée d'une profondeur D = 1,5 m dans un sol homogène de poids volumique égal à 20 kN/m<sup>3</sup> (tableau V). Le poids volumique du béton est pris égal à 24 kN/m<sup>3</sup>.

Différents cas ont été étudiés en faisant varier les paramètres de calcul suivants :

- caractéristiques du sol (sol cohérent et sol pulvérulent) ;
- types de fondation superficielle (semelle filante, semelle carrée) ;
- intensité et point d'application des charges (charge verticale centrée, charge verticale excentrée et charge inclinée). On suppose qu'aucune charge variable n'est appliquée sur la semelle ( $N_Q = 0$ ).

**TABLEAU IV** Facteurs de forme pour semelles rectangulaire et carrée (B largeur et L longueur d'une semelle).  
Shape coefficients for rectangular and square shallow foundation (width B and length L).

Approche	$S_c$	$S_q$	$S_\gamma$
DTU 13.12 (1988)	$1 + 0,2 \frac{B}{L}$	1	$1 - 0,2 \frac{B}{L}$
DIN 1054 (1976 et 2005)	$\frac{(1 + \frac{B}{L} \sin \varphi') N_q - 1}{N_q - 1}$	$1 + \frac{B}{L} \sin \varphi'$	$1 - 0,3 \frac{B}{L}$
Eurocode 7 (2004)	$\frac{(1 + \frac{B}{L} \sin \varphi') N_q - 1}{N_q - 1}$	$1 + \frac{B}{L} \sin \varphi'$	$1 - 0,3 \frac{B}{L}$

**TABLEAU V** Données statistiques des variables aléatoires.  
Statistical data for random variables.

Paramètre	Type de distribution	Coefficient de variation	Valeur caractéristique
Angle de frottement interne $\varphi'$ [degrés]	Log-normale	10 %	20 à 40
Cohésion $c'$ [kPa]	Log-normale	25 %	0 à 35
Poids volumique du sol $\gamma$ [kN/m <sup>3</sup> ]	Normale	5 %	20
Charge extérieure permanente Q [kN/ml]	Normale	10 %	290 à 800
Inclinaison de la charge $\delta$ [degrés]	Normale	10 %	10

La valeur caractéristique d'un paramètre doit être déterminée avec prudence en tenant compte entre autres de la variabilité naturelle, des incertitudes d'échantillonnage et du volume de sol concerné par le mécanisme de rupture (Eurocode 7, 2004). En géotechnique, le nombre d'essais *in situ* et au laboratoire est généralement insuffisant pour évaluer rigoureusement la valeur caractéristique d'un paramètre de sol à partir de considérations statistiques. Ce fait conduit à recourir à une banque de données pour couvrir le manque d'informations. Le traitement de ces données se fait au moyen de méthodes statistiques telles que celle de Bayes, Student et Schneider (Baguelin et Kovarik, 2000 ; Orr, 2000 ; Favre, 2004).

Le coefficient de variation, la valeur moyenne et l'écart-type (type de distribution de la densité de probabilité) influent grandement sur la valeur caractéristique et la valeur de calcul d'un paramètre (éq. 9 et 14). La valeur caractéristique d'un paramètre  $X$  peut être calculée par la relation suivante :

$$X_{ki} = m_i + K_i(n) \cdot \sigma_i = m_i \cdot (1 + K_i(n) \cdot V_i) \quad (18)$$

où  $V_i$  est le coefficient de variation ;  $m_i$ , la valeur moyenne ;  $\sigma_i$ , l'écart-type ;  $n$ , le nombre d'essais et  $K_i$  un coefficient déterminé en considérant le fractile à 5 % pour les résistances et le fractile à 95 % pour les actions. A titre d'exemple, pour une loi normale de Gauss, ceci correspond à  $K_i = \pm 1,65$ . Ces valeurs caractéristiques sont affectées encore de coefficients pondérateurs (Breitschaft et Hanisch, 1978). Baguelin et Kovarik (2000) font appel à la loi de Student pour définir la valeur caractéristique et mettent en évidence l'influence de la variation spatiale (auto-corrélation) du paramètre sur sa valeur caractéristique.

#### 4.2

### Modèle stochastique

Nottrodt (1990) a pu montrer, dans sa thèse de doctorat, qu'il y a une relation inversement proportionnelle entre les paramètres de cisaillement effectifs du sol ( $\varphi'$  et  $c'$ ) : les petites valeurs de  $\varphi'$  correspondent à des grandes valeurs de  $c'$  et vice versa. Cette relation est exprimée par un coefficient de corrélation négatif élevé. Sur la base de ces résultats et de ceux de Genske et Walz (1987) et Belabed (1996), des calculs ont été réalisés avec des combinaisons de paramètres de cisaillement considérées comme relativement typiques en mécanique des sols (tableau V). De plus, on néglige dans ce travail l'effet de la corrélation entre variables et de l'autocorrélation, et on suppose que les valeurs caractéristiques des paramètres ont été déterminées avec prudence conformément aux recommandations de l'Eurocode 7 (2004).

En se basant sur les études expérimentales et statistiques effectuées entre autres par Nottrodt (1990), Soos (1982) et Pottharst (1982) sur plusieurs échantillons de sols et les études théoriques réalisées par Gäßler (1987) et Genske et Walz (1987), ainsi que les propositions de Meyerhof citées par Favre (2004) (tableau IV, p. 187) et celles d'Abramson *et al.* (2001), on a proposé les distributions aléatoires résumées dans le tableau V pour nos études paramétriques. Pour la cohésion et l'angle de frottement interne, on admet qu'ils suivent tous les deux une loi log-normale, ce qui est physiquement relativement exact, car les valeurs négatives sont ainsi

exclues. On sait que l'angle de frottement interne est moins dispersé que la cohésion. On adopte alors des coefficients de variation moyens de 10 % pour l'angle de frottement interne  $\varphi'$  et de 25 % pour la cohésion  $c'$ . De plus, on admet pour l'angle de frottement interne un seuil de troncature égal à  $\varphi'/2$  (distribution tronquée), ce qui évite d'avoir des valeurs de  $\varphi'$  proches à 0. Cela influe légèrement sur le niveau de sécurité (Genske et Walz, 1987 ; Belabed, 1996). Les paramètres géométriques (encastrement de la semelle D, largeur de la semelle B, etc.) présentent en général une dispersion négligeable par rapport à celle des paramètres de cisaillement du sol et des charges (Nottrodt, 1990 ; Gäßler, 1987). C'est pourquoi on les considère comme des paramètres déterministes. Les calculs probabilistes effectués par Nottrodt (1990), Genske et Walz (1987) et Gäßler (1987) ont montré, d'une part, que le facteur de sensibilité  $\alpha_i$  pour le poids volumique du sol  $\gamma$  est très petit en comparaison des facteurs de sensibilité de l'angle de frottement interne et de la cohésion et, d'autre part, que les facteurs partiels de sécurité dérivés pour le poids volumique du sol sont très proches de 1. Pour cette raison, on admet pour le poids volumique du sol un facteur partiel de sécurité égal à 1 et un coefficient de variation de 5 %. On admet également que la charge extérieure permanente  $Q$ , son inclinaison  $\delta$  et le poids volumique du sol suivent une loi normale (Genske et Walz, 1987 ; Nottrodt, 1990 ; Vrouwenvelder, 2002 ; Sørensen, 2002).

#### 5

### Dimensionnement des semelles et analyse de la fiabilité

On détermine la largeur  $B$  minimale pour différents types de semelles filantes et carrées vérifiant l'équilibre du système suivant deux approches, approche déterministe et approche semi-probabiliste (Eurocode 7, 2004).

Dans le cas général, la justification de la structure est envisagée pour des actions permanentes, variables et transitoires : situations durables, transitoires et accidentelles. Les combinaisons de charge de calcul à l'ELU sont :

- combinaisons fondamentales correspondant à des situations de calcul durables et transitoires ;
- combinaisons accidentelles correspondant à des situations de calcul rares (exemple : séisme).

On ne parle, dans cet article, que des combinaisons fondamentales à l'exclusion des ELU situations accidentelles.

#### 5.1

### Approche déterministe

La sécurité est exprimée par un facteur global de sécurité  $F_S$  qui est égal en général au rapport de la résistance  $R$  sur la sollicitation  $S$  :

$$\frac{R}{S} \geq F_S \quad (19)$$

Les forces et les paramètres du sol ne sont pas pondérés.

### Approche française

La sécurité vis-à-vis du poinçonnement d'une fondation superficielle est exprimée par l'inéquation suivante d'après le DTU 13-12 (1988) :

$$q_{\text{réel}} \leq q_{\text{ad}} \quad (20)$$

où  $q_{\text{réel}}$  est la contrainte réelle non pondérée appliquée à la fondation et  $q_{\text{ad}}$ , la contrainte admissible.

La contrainte réelle se calcule d'après la figure 4 comme suit :

$$q_{\text{réel}} = \frac{Q + \gamma_{\text{béton}} \cdot B \cdot D \cdot L}{B \cdot L} \quad (21)$$

Cette contrainte représente l'action permanente sur la fondation.

La contrainte admissible est la contrainte limite que peut supporter la fondation divisée par un coefficient (facteur) global de sécurité désigné par  $F_S$ , pris égal à 2. Le coefficient de sécurité n'est pas appliqué sur le poids des terres :

$$q_{\text{ad}} = \gamma \cdot D + \frac{\gamma \cdot \frac{B}{2} \cdot N_{\gamma} + \gamma \cdot D \cdot (N_q - 1) + c' \cdot N_c}{F_S} \quad (22)$$

Dans les développements qui suivent, cette approche est nommée approche DTU 13.12.

#### • Exemple numérique

Soit une semelle filante soumise à une charge permanente verticale centrée ( $Q = 290$  kN/m). On suppose une charge (action) variable nulle. Les paramètres de comportement du sol sont :  $\varphi' = 30$  degrés et  $c' = 10$  kPa.

La contrainte réelle exercée sur la semelle filante est calculée d'après l'équation (21) :  $q_{\text{réel}} = \frac{290 + 36B}{B}$ .

Les facteurs de portance sont calculés d'après le tableau II pour  $\varphi' = 30$  degrés. On obtient :  $N_q = 18,4$  ;  $N_{\gamma} = 18,59$  et  $N_c = 30,14$ . Pour  $F_S = 2$ , on peut calculer la contrainte admissible d'après l'équation (22) :

$$q_{\text{ad}} = 92,95 B + 441,7$$

En remplaçant les termes calculés  $q_{\text{réel}}$  et  $q_{\text{ad}}$  dans l'inéquation (20), on obtient une inéquation du deuxième degré :  $92,95B^2 + 405,7B - 290 > 0$

dont la solution fournit la largeur minimale  $B = 0,63$  m (voir tableau VIII, colonne 3, ligne 7).

### Approche traditionnelle allemande

La vérification de la stabilité d'une fondation superficielle vis-à-vis du poinçonnement est effectuée par l'inéquation suivante d'après la norme allemande ancienne DIN 1054 (1976) :

$$\frac{V_b}{V} \geq F_S \quad (23)$$

avec  $V_b = q_L \cdot B$ .

$B$  est la surface de la semelle ;  $F_S$ , le facteur global de sécurité pris égal 2 ;  $V_b$ , la charge limite que peut supporter la fondation ;  $V$ , les charges extérieures appliquées sur la fondation y compris le poids propre.

Dans les calculs qui suivent, cette approche est nommée approche DIN 1054 ( $F_S = 2$ ).

#### • Exemple numérique

On reprend le même exemple que précédemment.

D'après la figure 4, la charge extérieure verticale totale est égale à :

$$V = Q + \gamma_{\text{béton}} \cdot D \cdot B \cdot 1 = 290 + 36 B$$

D'après le tableau II et pour  $\varphi' = 30$  degrés :  $N_q = 18,4$  ;  $N_{\gamma} = 20,09$  et  $N_c = 30,14$ . Ces valeurs sont reportées dans l'équation (15) pour calculer  $q_L$ .

On calcule ensuite la charge limite :  $V_b = q_L \cdot B = (200,9 B + 853,4) \cdot B$ .

Pour  $F_S = 2$  et en remplaçant les expressions de  $V$  et  $V_b$  dans l'inéquation (23), on obtient l'inéquation suivante :  $200,9 B^2 + 781,4B - 580 \geq 0$  qui fournit la largeur minimale de la fondation  $B = 0,64$  m (voir tableau VIII, colonne 2, ligne 7).

## Approche semi-probabiliste

### Généralités

D'après l'Eurocode 7 (2004), on distingue deux états limites : l'état limite ultime et l'état limite de service. Les états limites ultimes suivants doivent être vérifiés lorsqu'ils sont pertinents :

- EQU (Équilibre) : perte d'équilibre statique de la structure ou du terrain, dans lesquels les résistances des matériaux (de la structure ou du terrain) n'apportent pas de contribution significative à la résistance (exemple : renversement) ;
- STR (Structure) : rupture interne ou déformation excessive de la structure ou d'éléments de la structure, dans lesquels la résistance des matériaux de la structure contribue significativement à la résistance (exemple : fondations, ancrages) ;
- GEO (Géotechnique) : rupture ou déformation excessive du terrain, dans lequel la résistance des sols ou des roches contribue de façon significative à la résistance (exemple : glissement des pentes, poinçonnement) ;
- UPL (Soulèvement) : rupture par soulèvement dû à des forces verticales (exemple : poussée d'Archimède) ;
- HYD (Hydraulique) : rupture causée par les gradients hydrauliques dans le terrain (exemple : érosion interne, Renard).

### Principe de la vérification de la résistance pour les états limites de la structure et du terrain

Pour les états limites de rupture ou de déformation excessive d'un élément de structure ou du terrain (STR et GEO), les sollicitations sont majorées et les résistances minorées avec des facteurs partiels de sécurité de telle sorte que :

$$R_d - N_d \geq 0 \quad (24)$$

où  $R_d$  est la résistance de calcul ou capacité portante de calcul et  $N_d$ , la sollicitation (charge) de calcul appliquée à la fondation tenant compte d'éventuels coefficients pondérateurs des charges (généralement supérieurs à 1).

Pour le calcul de la capacité portante (résistance) de calcul, on distingue deux cas.

• **Cas 1**

Si les facteurs partiels de sécurité sont appliqués sur les forces, la capacité portante de calcul est calculée comme suit :

$$R_d = \frac{Q_L}{\gamma_R} \text{ avec } Q_L = q_L \cdot B \quad (25)$$

où  $Q_L$  est la capacité portante caractéristique calculée avec les paramètres caractéristiques du sol et  $\gamma_R$ , le facteur partiel de sécurité appliqué sur la résistance (capacité portante caractéristique), voir tableaux VI et VII.

• **Cas 2**

Si les facteurs partiels de sécurité sont appliqués sur les paramètres du sol ( $\gamma$ ,  $c'$ ,  $\varphi'$ ), la capacité portante de calcul est calculée avec les paramètres de calcul du sol :

$$R_d = Q_L (\varphi'_{d'} c'_{d'} \gamma_d) = q_L (\varphi'_{d'} c'_{d'} \gamma_d) \cdot B \quad (26)$$

avec  $\tan \varphi'_d = \frac{\tan \varphi'_k}{\gamma_{\varphi'}}$  ;  $c'_d = \frac{c'_k}{\gamma_{c'}}$  et  $\gamma_d = \gamma_k$

où  $\gamma_{\varphi'}$  est le facteur partiel de sécurité appliqué sur l'angle de frottement interne effectif et  $\gamma_{c'}$  le facteur partiel de sécurité appliqué sur la cohésion effective. L'indice « k » signifie valeur caractéristique et l'indice « d » valeur de calcul.

La sollicitation ou la charge de calcul est estimée par la combinaison :

$$N_d = \gamma_G N_G + \gamma_Q N_q \quad (27)$$

où  $N_G$  est la sollicitation permanente (charges extérieures + poids propre de la semelle) ;  $N_Q$ , la sollicitation variable (dans cette étude, aucune sollicitation variable n'est prise en compte) ;  $\gamma_{G'}$  le facteur partiel de sécurité appliqué sur les sollicitations permanentes ;  $\gamma_{Q'}$  le facteur partiel de sécurité appliqué sur les sollicitations variables. Les valeurs des facteurs partiels de sécurité sont données dans les tableaux VI et VII.

Pour les vérifications à l'état limite de service, tous les coefficients partiels de sécurité sont généralement égaux à un. Les déplacements de la fondation doivent être calculés et comparés aux valeurs limites admissibles permettant le bon fonctionnement de la structure. Les vérifications à l'état limite de service jouent un rôle important et décisif dans le dimensionnement final des ouvrages.

525

**Cas de l'Eurocode 7 (2004)**

D'après l'Eurocode 7 (2004), il convient de vérifier le dimensionnement des éléments structuraux (fondations superficielles) à l'état limite ultime (STR) soumis à des actions géotechniques, et la résistance du terrain (GEO) en utilisant l'une des trois approches suivantes complétées, pour les actions géotechniques et les résistances, par l'EN 1997 (tableau VI). Ces approches diffèrent par la façon dont elles distribuent les facteurs partiels de sécurité entre les actions, les effets des actions, les propriétés des matériaux et les résistances.

**TABLEAU VI Valeurs des facteurs partiels de sécurité (Eurocode 7, 2004).**  
Values of partial safety factors (Eurocode 7, 2004).

Équilibres STR et GEO (fondations superficielles)				
Approches	Approche 1		Approche 2	Approche 3
Combinaisons	A1+M1+R1	A2+M2+R1	A1+M1+R2	A1 ou A2 + M2 + R3
Facteurs partiels pour les actions ou effets des actions (A)				
Action permanente défavorable $\gamma_G$	1,35	1,00	1,35	1,35 ou 1,00
Action permanente favorable $\gamma_G$	1,00	1,00	1,00	1,00
Action variable défavorable $\gamma_Q$	1,50	1,30	1,50	1,50 ou 1,30
Facteurs partiels pour les paramètres de sol (M)				
Angle de frottement interne $\gamma_{\varphi'}$	1,00	1,25	1,00	1,25
Cohésion $\gamma_{c'}$	1,00	1,25	1,00	1,25
Poids volumique $\gamma_{\gamma}$	1,00	1,00	1,00	1,00
Facteurs partiels de la résistance (R)				
Portance $\gamma_R$	1,00	1,00	1,4	1,00

**TABLEAU VII Valeurs des facteurs partiels de sécurité d'après DIN 1054 (2005).**  
Values of partial safety factors from DIN 1054 (2005).

	$\gamma_{\varphi'}$	$\gamma_{c'}$	$\gamma_{\gamma}$	$\gamma_R$	$\gamma_G$	$\gamma_Q$
Approche 1C	1,25	1,25	1,00	1,00	1,00	1,30
Approche 1B	1,00	1,00	1,00	1,40	1,35	1,50

### • Approche de calcul 1

On doit vérifier qu'aucun état limite de rupture ou de déformation excessive ne sera atteint sous chacune des deux combinaisons de facteurs partiels suivantes :

- combinaison 1 :  $A1 + M1 + R1$  ;
- combinaison 2 :  $A2 + M2 + R1$ .

Dans les combinaisons 1 et 2, les facteurs partiels de sécurité sont appliqués aux actions et aux paramètres de résistance du terrain.

### • Approche de calcul 2

On doit vérifier qu'aucun état limite de rupture ou de déformation excessive ne sera atteint avec la combinaison de facteurs partiels suivante :

- combinaison :  $A1 + M1 + R2$ .

Dans cette approche, les facteurs partiels de sécurité sont appliqués aux actions ou aux effets des actions et aux résistances du terrain.

### • Approche de calcul 3

On doit vérifier qu'aucun état limite de rupture ou de déformation excessive ne sera atteint avec la combinaison de facteurs partiels suivante :

- combinaison :  $A1$  ou  $A2 + M2 + R3$ .

Dans cette approche, les facteurs partiels de sécurité sont appliqués aux actions ou aux effets des actions et aux paramètres de résistance du terrain.

Dans l'approche 1, il y a deux combinaisons de calcul. Toutefois, dans cette étude, on a considéré seulement la combinaison 2 «  $A2 + M2 + R1$  » (tableau VI), car dans la combinaison 1 «  $A1 + M1 + R1$  » les facteurs partiels de sécurité sont appliqués uniquement sur les actions (A). Il s'agit pour ce problème de semelle des états limites de rupture ou de déformation excessive d'un élément de structure ou du terrain (STR et GEO), d'après la définition des états limites ultimes citée plus haut. De plus, cette combinaison donnerait des largeurs de semelles trop petites. Néanmoins, la combinaison 1 ( $A1 + M1 + R1$ ) est également obligatoire pour le dimensionnement final.

Pour l'approche 3, on vérifie uniquement la combinaison «  $A1 + M2 + R3$  ». La raison est que l'ensemble A2 s'applique uniquement aux actions géotechniques (et A1 aux actions de/sur la structure) ; il n'y a pas deux combinaisons possibles comme pour l'Approche de calcul 1 (tableau VI).

Les approches de l'Eurocode 7 (2004) sont désignées par l'abréviation EC 7 (approche 1 ou 2 ou 3).

## 5.2.4

### Cas des règles DIN 1054 (2005)

DIN 1054 (2005) est la nouvelle norme allemande qui détermine les modalités de vérification de sécurité des ouvrages géotechniques en se référant à l'Eurocode 7 (2004) en tenant compte de la notion des facteurs partiels de sécurité. La norme DIN 1054 (2005) divise l'analyse de l'état limite ultime en trois approches.

• **Approche 1A** : état limite ultime de perte de position. Défaillance d'une structure à travers une perte d'équilibre sans rupture (exemple : poussée d'Archimède).

• **Approche 1B** : état limite ultime de rupture d'une structure ou d'éléments constituant une structure ou du sol (exemple : capacité portante des fondations superficielles).

• **Approche 1C** : état limite ultime de rupture d'ensemble « structure et sol » (exemple : stabilité d'ensemble d'un mur de soutènement ancré).

Pour chaque cas, la norme recommande une combinaison de calcul avec des coefficients partiels de sécurité. Dans le cas de l'étude de la stabilité des fondations superficielles vis-à-vis du poinçonnement, la norme DIN 1054 (2005) recommande de faire les vérifications par l'approche 1B, car elle est plus critique que l'approche 1C. L'approche 1A n'est pas applicable dans ce problème. Dans l'approche 1B, les facteurs partiels de sécurité sont appliqués sur les forces, alors que dans l'approche 1C ils sont appliqués sur les paramètres du sol ( $\gamma$ ,  $\varphi'$ ,  $c'$ ) (tableau VII).

Les approches 1B et 1C de la norme DIN 1054 (2005) correspondent respectivement aux approches 2 et 1 (combinaison 2) de l'Eurocode 7 (2004) (tableaux VI et VII). Pour cette raison, on étudie seulement les trois approches de l'Eurocode 7 (tableau VI) :

- approche 1 (combinaison 2 :  $A2 + M2 + R1$ ) ;
- approche 2 (combinaison :  $A1 + M1 + R2$ ) ;
- approche 3 (combinaison :  $A1 + M2 + R3$ ).

### Exemples numériques

On considère toujours le même exemple.

#### • Approche 1 ( $A2 + M2 + R1$ )

D'après le tableau VI  $\varphi'_d = \frac{\arctan \varphi'_k}{\gamma_\varphi} = \frac{\arctan 30}{1,25} = 24,79$  de-

grés et  $c'_d = \frac{c'_k}{\gamma_{c'}} = \frac{10}{1,25} = 8$  kPa, ce qui donne d'après le ta-

bleau II les facteurs de portance suivants :  $N_d = 10,43$  ;  $N_\gamma = 8,71$  et  $N_c = 20,42$ . Ces valeurs sont reportées dans les équations (15) et (26). On obtient ainsi la capacité portante de calcul :  $R_d = (87,1 B + 476,26).B$

D'après le tableau VI :  $\gamma_G = 1$ .

La sollicitation de calcul d'après l'équation (27) vaut :

$$N_d = \gamma_G \cdot N_G = 1 \cdot (Q + \gamma_{\text{béton}} \cdot B \cdot D \cdot 1) = 290 + 36 B.$$

En remplaçant les expressions de  $R_d$  et  $N_d$  dans l'équation (24), on obtient l'inéquation suivante :

$$87,1 B^2 + 440,62 B - 290 \geq 0$$

d'où l'on tire la largeur minimale de la semelle filante  $B = 0,59$  m (voir tableau VIII).

#### • Approche 2 ( $A1 + M1 + R2$ )

D'après le tableau VI :  $\gamma_\varphi = \gamma_{c'} = 1$  et  $\gamma_R = 1,4$ .

D'après le tableau II : pour  $\varphi_k = 30$  degrés, on a  $N_q = 18,4$  ;  $N_\gamma = 20,09$  et  $N_c = 30,14$ .

La capacité portante de calcul d'après les équations (15) et (25) est égale à

$$R_d = (200,9 B + 853,4).B / 1,4.$$

D'après le tableau VI :  $\gamma_G = 1,35$ .

La sollicitation de calcul d'après l'équation (27) vaut :

$$N_d = \gamma_G \cdot (Q + \gamma_{\text{béton}} \cdot B \cdot D \cdot 1) = 1,35 \cdot (290 + 36 B).$$

En remplaçant les expressions de  $R_d$  et  $N_d$  dans l'équation (24), on obtient l'inéquation suivante :  $200,9 B^2 + 785,36 B - 548,1 \geq 0$

d'où l'on tire la largeur minimale de la semelle filante  $B = 0,61$  m (voir tableau VIII).

• Approche 3 (A1 + M2 + R3)

D'après le tableau VI :  $\varphi'_d = \frac{\arctan \varphi'_k}{\gamma_\varphi} = \frac{\arctan 30}{1,25} = 24,79$

degrés et  $c'_d = \frac{c'_k}{\gamma_{c'}} = \frac{10}{1,25} = 8 \text{ kPa}$ , ce qui conduit aux facteurs

de portance suivants d'après le tableau II :  $N_q = 10,43$  ;  $N_\gamma = 8,71$  et  $N_c = 20,42$ . Ces valeurs sont ensuite reportées dans les équations (15) et (26). On obtient ainsi la capacité portante de calcul :

$R_d = (87,1 B + 476,26).B$ .

D'après le tableau VI :  $\gamma_G = 1,35$  et la sollicitation de calcul est estimée par la relation (27) :

$N_d = \gamma_G.(Q + \gamma_{\text{béton}}.B.D.1) = 1,35.(290 + 36 B)$ .

En remplaçant les expressions de  $R_d$  et  $N_d$  dans l'équation (24) on aboutit à l'équation :

$87,1 B^2 + 427,66 B - 391,5 \geq 0$

d'où l'on déduit la largeur minimale de la semelle filante  $B = 0,79 \text{ m}$  (voir tableau VIII).

5.3

Interprétation des résultats

Les résultats des calculs des largeurs minimales des semelles étudiées pour différents cas de charges, différents types de sol et d'après différentes approches sont regroupés dans les tableaux VIII à XIII. L'interprétation de ces résultats peut être résumé comme suit :

**TABEAU VIII** Largeur minimale B [m] d'une semelle filante d'après différentes approches. Charge verticale centrée Q = 290 kN/ml.

Minimal width B [m] of strip footing from different approaches. Vertical centered load Q = 290 kN/ml.

$\varphi'$ [degrés]/ $c'$ [kPa]	Approches déterministes		Approches semi-probabilistes		
	DIN 1054 (1976)	DTU 13.12 (1988)	Approches de l'Eurocode 7 (2004)		
	$F_S = 2$	$F_S = 2$	Approche 1	Approche 2	Approche 3
40/0	0,27	0,27	0,31	0,26	0,40
35/0	0,50	0,50	0,52	0,48	0,68
35/5	0,43	0,43	0,44	0,41	0,58
30/10	0,64	0,63	0,59	0,61	0,79
25/20	0,79	0,77	0,66	0,75	0,90
20/35	0,86	0,83	0,66	0,81	0,91

**TABEAU IX** Largeur minimale B [m] d'une semelle filante d'après différentes approches. Charge centrée inclinée Q = 400 kN/ml et inclinaison  $\delta = 10$  degrés.

Minimal width B [m] of strip footing from different approaches. Inclined centered load Q = 400 kN/ml and inclination  $\delta = 10$  degrees.

$\varphi'$ [degrés]/ $c'$ [kPa]	Approches déterministes		Approches semi-probabilistes		
	DIN 1054 (1976)	DTU 13.12 (1988)	Approches de l'Eurocode 7 (2004)		
	$F_S = 2$	$F_S = 2$	Approche 1	Approche 2	Approche 3
40/0	0,52	0,46	0,59	0,50	0,77
35/0	0,95	0,86	0,99	0,91	1,28
35/5	0,83	0,73	0,86	0,79	1,13
30/10	1,25	1,10	1,19	1,19	1,57
25/20	1,63	1,37	1,41	1,54	1,91
20/35	1,92	1,48	1,53	1,80	2,11

**TABEAU X** Largeur minimale B [m] d'une semelle filante d'après différentes approches. Charge verticale excentrée Q = 800 kN/ml et excentricité  $e = B/6$ .

Minimal width B [m] of strip footing from different approaches. Eccentric vertical load Q = 800 kN/ml and eccentricity  $e = B/6$ .

$\varphi'$ [degrés]/ $c'$ [kPa]	Approches déterministes		Approches semi-probabilistes		
	DIN 1054 (1976)	DTU 13.12 (1988)	Approches de l'Eurocode 7 (2004)		
	$F_S = 2$	$F_S = 2$	Approche 1	Approche 2	Approche 3
40/0	0,95	0,96	1,09	0,91	1,39
35/0	1,68	1,68	1,76	1,60	2,24
35/5	1,49	1,50	1,56	1,43	2,00
30/10	2,22	2,21	2,13	2,12	2,76
25/20	2,88	2,83	2,50	2,73	3,30
20/35	3,31	3,21	2,60	3,13	3,51

**TABEAU XI** Largeur minimale B [m] d'une semelle carrée d'après différentes approches.  
Charge verticale centrée Q = 290 kN.

Minimal width B [m] of square footing from different approaches. Centered vertical load Q = 290 kN.

$\varphi'$ [degrés]/ $c'$ [kPa]	Approches déterministes		Approches semi-probabilistes		
	DIN 1054 (1976)	DTU 13.12 (1988)	Approches de l'Eurocode 7 (2004)		
	$F_s = 2$	$F_s = 2$	Approche 1	Approche 2	Approche 3
40/0	0,41	0,51	0,45	0,40	0,52
35/5	0,53	0,63	0,55	0,52	0,64
30/10	0,67	0,77	0,65	0,65	0,76
25/20	0,75	0,84	0,69	0,73	0,81
20/35	0,79	0,85	0,70	0,76	0,82

**TABEAU XII** Largeur minimale B [m] d'une semelle carrée d'après différentes approches.  
Charge centrée inclinée Q = 400 kN et inclinaison  $\delta = 10$  degrés.

Minimal width B [m] of square footing from different approaches.  
Inclined centered load Q = 400 kN and inclination  $\delta = 10$  degrees.

$\varphi'$ [degrés]/ $c'$ [kPa]	Approches déterministes		Approches semi-probabilistes		
	DIN 1054 (1976)	DTU 13.12 (1988)	Approches de l'Eurocode 7 (2004)		
	$F_s = 2$	$F_s = 2$	Approche 1	Approche 2	Approche 3
40/0	0,59	0,67	0,64	0,57	0,75
35/5	0,77	0,85	0,79	0,74	0,92
30/10	0,96	1,03	0,94	0,94	1,11
25/20	1,10	1,12	1,03	1,07	1,21
20/35	1,19	1,14	1,07	1,15	1,27

**TABEAU XIII** Largeur minimale B [m] d'une semelle carrée d'après différentes approches.  
Charge verticale excentrée Q = 800 kN et excentricité  $e = B/6$ .

Minimal width B [m] of square footing from different approaches. Eccentric vertical load Q = 800 kN and eccentricity  $e = B/6$ .

$\varphi'$ [degrés]/ $c'$ [kPa]	Approches déterministes		Approches semi-probabilistes		
	DIN 1054 (1976)	DTU 13.12 (1988)	Approches de l'Eurocode 7 (2004)		
	$F_s = 2$	$F_s = 2$	Approche 1	Approche 2	Approche 3
40/0	0,87	0,99	0,94	0,85	1,09
35/5	1,12	1,26	1,15	1,09	1,34
30/10	1,40	1,54	1,37	1,36	1,59
25/20	1,58	1,70	1,47	1,54	1,72
20/35	1,67	1,76	1,48	1,62	1,74

– l'approche 3 (EC 7) conduit aux plus grandes largeurs de semelles, à cause de l'application simultanée des facteurs partiels de sécurité sur les forces et sur les paramètres du sol (tableau VI) ;

– les approches DIN 1054 ( $F_s = 2$ ) et DTU 13.12 ( $F_s = 2$ ) fournissent généralement des largeurs de semelles peu différentes de celles calculées d'après les approches de l'EC 7 (Approches 1 et 2) à l'exception du cas des sols à forte cohésion ( $c \geq 20$  kPa) ;

– l'approche 2 (EC 7) donne les plus petites largeurs des semelles pour les sols pulvérulents et de faible cohésion ( $c' \leq 10$  kPa), alors que l'approche 1 (EC 7) donne les plus petites largeurs de semelles pour les sols à moyenne et forte cohésion ( $c' > 10$  kPa).

## 6

### Calcul de l'indice de fiabilité

Le calcul de l'indice de fiabilité a été réalisé à l'aide du logiciel ZUVAN développé à l'Université de Weimar (Allemagne) et fondé sur la théorie de fiabilité de premier ordre (Belabed, 1996) en utilisant soit l'algorithme de Späthe (Späthe, 1987), soit l'algorithme de Rackwitz (Rackwitz, 1978 ; Fiebler *et al.*, 1976). Le principe de cette méthode est expliqué plus haut. On doit d'abord implanter dans ce logiciel l'équation d'état limite pour chaque approche. A chaque valeur de largeur B calculée auparavant (tableaux VIII à XIII), on calcule l'indice

de fiabilité  $\beta$  correspondant. Le tableau V regroupe les variables aléatoires et leurs propriétés statistiques nécessaires pour ces calculs.

• **Exemple d'une semelle carrée avec une charge centrée inclinée ( $Q = 400$  kN,  $\delta = 10$  degrés) – Approche 2 de l'Eurocode 7**

Pour cet exemple, l'équation (24) est implantée dans le programme ZUVAN en tenant compte des équations (17), (25) et (27). Les données statistiques des paramètres (tableau V) ainsi que la largeur de la semelle calculée auparavant sont introduites dans le programme.

Pour  $\varphi' = 40$  degrés et  $c' = 0$ , le tableau XII indique une largeur de semelle égale à 0,57 m. Le calcul itératif conduit alors à un indice de fiabilité  $\beta = 2,3$  (Fig. 11). Les détails des résultats du calcul probabiliste, au moyen du logiciel ZUVAN, sont regroupés dans le tableau XIV.

Pour  $\varphi' = 35$  degrés et  $c' = 5$  kPa, le tableau XII fournit une largeur de semelle égale à 0,74 m ; d'où, un indice de fiabilité  $\beta = 2,671$  (Fig. 11).

On procède de la même manière pour les autres approches.

Les résultats des calculs des indices de fiabilité pour tous les cas ont été regroupés dans les figures 7 à 11 pour différents types de sols d'après différentes appro-

**TABEAU XIV Résultats d'un exemple de calcul de l'indice de fiabilité.**  
Results of the calculation of the reliability index.

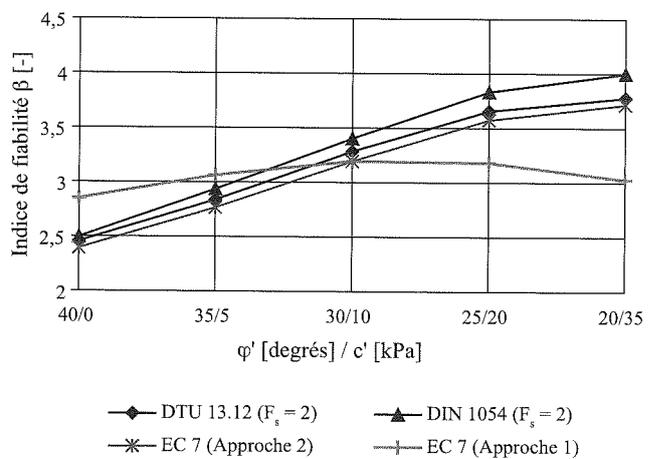
Paramètre	Valeur caractéristique	Valeur de calcul	Facteur de sensibilité
$\varphi'$ [degrés]	40	31,11	0,9659
$c'$ [kPa]	0	0	0
$\gamma$ [kN/m <sup>3</sup> ]	20	19,74	0,1116
$Q$ [kN]	400	419,40	-0,2109
$\delta$ [degrés]	10	10,23	-0,1003
$\beta$ [-]		2,30 (voir Fig. 11)	

ches. L'interprétation de ces résultats a permis de tirer les constatations suivantes :

– l'approche 3 (EC 7) sous-estime la sécurité en donnant les plus grandes largeurs de semelles et les plus grands indices de fiabilité. Le niveau de sécurité correspondant est inhomogène sur toute la fourchette des sols étudiés (Fig. 7). Par suite, les résultats des indices de fiabilité pour cette approche ne sont pas présentés pour les autres cas (Fig. 8 à 11) ;

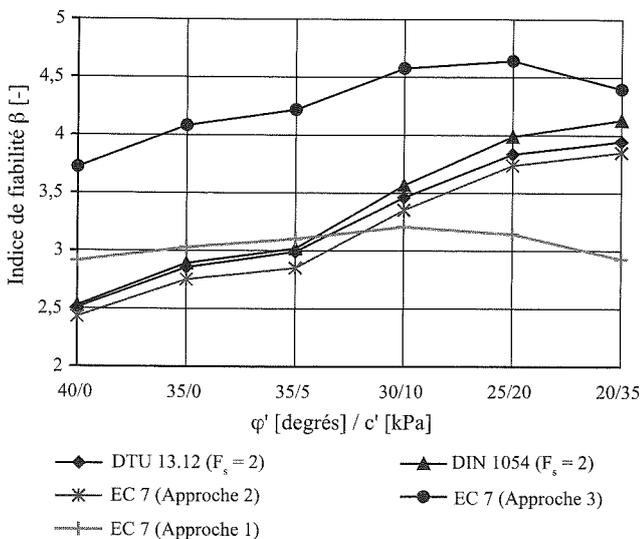
– le niveau de sécurité obtenu pour l'approche 1 (EC 7), dont les facteurs partiels de sécurité sont appliqués sur les paramètres du sol, est relativement homogène le long de la fourchette des sols étudiés en comparaison avec les approches dont les facteurs de sécurité sont appliqués sur les forces (approches 2 (EC 7), DIN 1054 ( $F_s = 2$ ) et DTU 13.12 ( $F_s = 2$ )). Ces dernières approches

**Semelle filante. Charge centrée inclinée  $Q = 400$  kN/m**



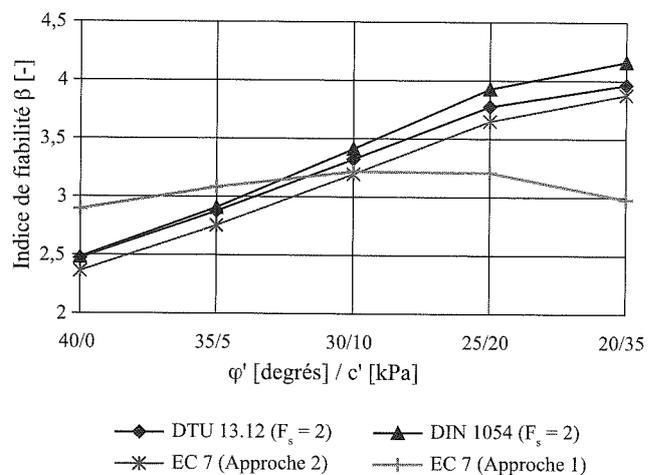
**FIG. 8 Indice de fiabilité  $\beta$  d'après différentes approches. Charge centrée inclinée  $Q = 400$  kN/ml et inclinaison  $\delta = 10$  degrés.**  
Reliability index  $\beta$  from different approaches. Inclined centered load  $Q = 400$  kN/ml and inclination  $\delta = 10$  degrees.

**Semelle filante. Charge verticale centrée  $Q = 290$  kN/m**



**FIG. 7 Indice de fiabilité  $\beta$  d'après différentes approches. Charge verticale centrée  $Q = 290$  kN/ml.**  
Reliability index  $\beta$  from different approaches. Centered vertical load  $Q = 290$  kN/ml.

**Semelle filante. Charge verticale excentrée  $Q = 800$  kN/m**



**FIG. 9 Indice de fiabilité  $\beta$  d'après différentes approches. Charge verticale excentrée  $Q = 800$  kN/ml et excentricité  $e = B/6$ .**  
Reliability index  $\beta$  from different approaches. Eccentric vertical load  $Q = 800$  kN/ml and eccentricity  $e = B/6$ .

Semelle carrée. Charge verticale centrée  $Q = 290$  kN

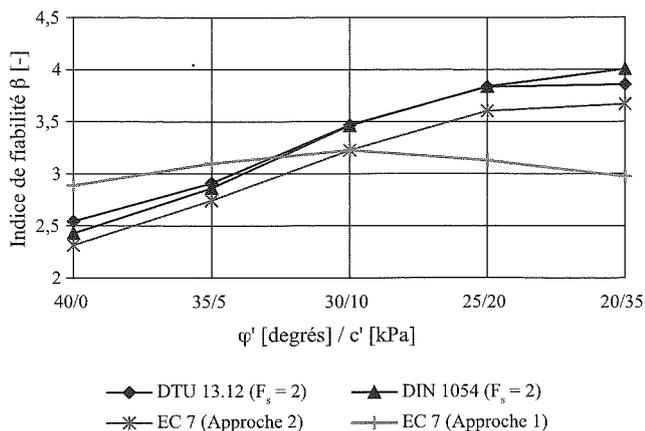


FIG. 10. Indice de fiabilité  $\beta$  d'après différentes approches. Charge verticale centrée  $Q = 290$  kN. Reliability index  $\beta$  from different approaches. Vertical centered load  $Q = 290$  kN.

Semelle carrée. Charge centrée inclinée  $Q = 400$  kN

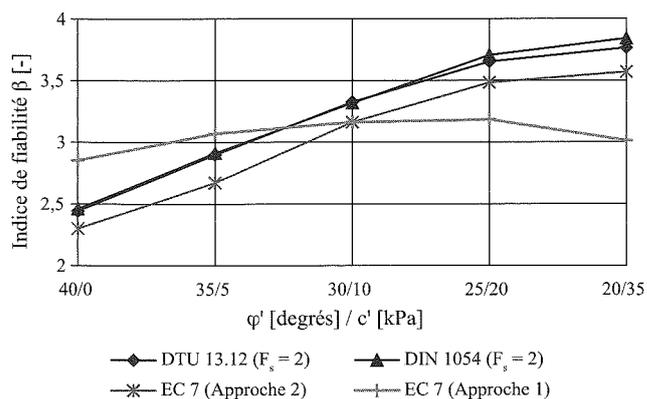


FIG. 11. Indice de fiabilité  $\beta$  d'après différentes approches. Charge centrée inclinée  $Q = 400$  kN. Reliability index  $\beta$  from different approaches. Inclined centered load :  $Q = 400$  kN.

présentent la même tendance pour les valeurs de  $\beta$  (Figs. 7 à 11). Celles obtenues avec l'approche 1 sont proches des valeurs cibles  $\beta = 3$  (Figs. 7 à 11) ;

– dans tous les cas étudiés, les approches de l'Eurocode 7 (approches 1 et 2) sont de loin les plus défavorables. Elles donnent le minimum de sécurité (Figs. 7 à 11) et les plus petites dimensions des semelles (Tableaux VIII à XIII). L'approche 2 est la plus défavorable pour les sols pulvérulents et de faible cohésion ( $c' \leq 10$  kPa). L'approche 1 (combinaison 2) est la plus défavorable pour les sols à moyenne et forte cohésion ( $c' > 10$  kPa).

## 7

## Conclusion

La vérification à l'état ultime de la stabilité des fondations superficielles vis-à-vis du poinçonnement se fait traditionnellement en appliquant un coeffi-

cient global de sécurité  $F_s = 2$  sur la charge limite calculée par la théorie de Prandtl. Dans cette étude, on a présenté une nouvelle analyse du problème fondée sur la théorie probabiliste (EC 7) en appliquant des facteurs partiels de sécurité sur les forces (approche 2) ou sur les paramètres de sol (approche 1). Une analyse comparative avec les approches déterministes nationales a été effectuée. Les approches 1 et 2 de l'Eurocode 7 sont les plus défavorables. Le calcul de l'indice de fiabilité est très important pour l'évaluation de la sécurité. L'approche semi-probabiliste est un moyen d'uniformiser les codes et les normes traitant le calcul des structures en remplaçant les facteurs globaux empiriques de sécurité par des facteurs partiels de sécurité tenant compte de la dispersion aléatoire des paramètres. De plus, cette approche assure un emploi souvent économique des matériaux. Les vérifications à l'état limite de service sont également importantes dans le dimensionnement final des ouvrages.

## Bibliographie

- Abramson L.W., Lee T.S., Sharma S., Boyce G.M. – *Slope stability and stabilization methods*, 2002 Second edition, J. Wiley & Sons, Inc.
- Baguelin F., Kovarik J.B. – Une méthode de détermination des valeurs caractéristiques des paramètres géotechniques. *Revue française de géotechnique*, n° 93, 2000, p. 35-42.
- Belabed L. – Standsicherheitsuntersuchung zweifach verankerter Stützwände mit der kinematischen Starrkörpermethode. *Geotechnik* n° 19, 1995, p. 171-174.
- Belabed L. – *Zuverlässigkeitsuntersuchung des Tragsystems « mehrfach verankerte Stützwände » mit probabilistischen Methoden*. Thèse de doctorat, université de Weimar, Allemagne, 1996.
- Belabed L. – Application du concept probabiliste de sécurité sur la vérification de la stabilité d'ensemble des murs de soutènement ancrés avec la cinématique des solides rigides. *Revue française de géotechnique* n° 89, 1999a, p. 49-54.
- Belabed L. – Overall stability of anchored retaining walls with the probabilistic method. *Proceeding of the international symposium on slope stability engineering*, IS-Shikoku'99, Matsuyama/Shikoku, Japan/ 8-11 Nov., 1999b, A.A.Balkema, Rotterdam/Brookfield, p. 1115-1120.
- Bencheikh M. – *Analyse probabiliste de la stabilité des fondations superficielles*. Mémoire de Magister, Département de Génie civil, Université de Guelma, Algérie, 2005.
- Breitschaft G., Hanisch J. – Neues Sicherheitskonzept im Bauwesen aufgrund wahrscheinlichkeitstheoretischer Überlegungen. Folgerungen für den Grundbau unter Einbeziehung der Probenahme und der Versuchsauswertung. Vorträge der Baugrundtagung, Berlin, Herausgegeben von DGEG Essen, 1978, p. 659-694.
- Costet J., Sanglerat G. – *Cours pratique de mécanique des sols*, Tome 2. Dunod, Paris, 1983.
- DIN 1054 – Sicherheitsnachweise im Erd- und Grundbau. Beuth Verlag GmbH, Berlin, 1976.
- DIN 1054 – Sicherheitsnachweise im Erd- und Grundbau. Beuth Verlag GmbH, Berlin, 2005.
- Ditlevsen O. – Model uncertainty in structural reliability. *Structural safety* 1, 1982, p. 73-86.
- DTU 13.12 – Règles pour le calcul des fondations superficielles. *Cahiers CSTB*, AFNOR, Paris, 1988.
- Eurocode 7 – *Calcul géotechnique*, partie 1 « Règles générales », 2004.
- Favre J.L. – *Géotechnique, sécurité des ouvrages, risques*. Technosup, Ellipses, 2004.
- Fießler B., Hawranek H., Rackwitz R. – Numerische Methoden für probabilistische Bemessungsverfahren und Sicherheitsnachweise. Heft 14, TU München, Allemagne, 1976.
- Frank R. – *Calcul des fondations superficielles et profondes*. Presses des Ponts et Chaussées, 2003.
- Gäßler G. – *Vernagelte Geländesprünge-Tragverhalten und Standsicherheit*. Thèse de doctorat, Heft 108, université de Karlsruhe, Allemagne, 1987.
- Genske D.D., Walz B. – Anwendung der probabilistischen Sicherheitstheorie auf Grundbruchberechnungen nach DIN 4017. *Geotechnik* n° 10, 1987, p. 53-66.
- JCSS – *Probabilistic model code*. The Joint Committee on Structural Safety, 2001.
- Magnan J.P., Baghery S. – *Statistiques et probabilités en mécanique des sols, état des connaissances*. Laboratoire central des ponts et chaussées, 1982.
- Nottrodt H.P. – *Beitrag zur Einführung semiprobabilistischer Methoden in der Geotechnik*. Thèse de doctorat, université de Weimar, Allemagne, 1990.
- Orr T.L.L. – Selection of characteristic values and partial factors in geotechnical designs to Eurocode 7. *Computers and Geotechnics* 26, 2000, p. 263-279.
- Pottharst R. – Erläuterungen des statistischen Sicherheitskonzepts am Beispiel des Grundbruchs. Vorträge der Baugrundtagung in Braunschweig, DGEG Essen, 1982, p. 9-47.
- Rackwitz R. – Close Bounds for the reliability of structural systems. SFB 96, Heft 29, TU München, Allemagne, 1978.
- Soos P. – Zur Ermittlung der Bodenkenwerte mit Berücksichtigung von Streuung und Korrelation. Vorträge der Baugrundtagung in Braunschweig, DGEG Essen, 1982, p. 83-103.
- Sørensen J.D. – Calibration of partial safety factors in Danish structural codes. *JCSS workshop on reliability based code calibration*, Zurich, Suisse, 21-22 mars 2002.
- Späthe G. – Die Sicherheit tragender Baukonstruktionen. Verlag für Bauwesen Berlin, 1987.
- Vrouwenvelder T. – Reliability based code calibration, the use of the JCSS Probabilistic model code. *JCSS workshop on reliability based code calibration*, Zurich, Suisse, 21-22 mars 2002.