

Application des essais de pompage à l'évaluation du coefficient d'anisotropie hydraulique des sols aquifères

M. CASSAN

SA Fondasol Études
BP 767
84035 Avignon Cedex

Résumé

Nous avons précédemment présenté une méthode permettant d'évaluer le coefficient d'anisotropie des sols aquifères à partir d'essais Lefranc. Nous montrons maintenant que l'on peut, également de façon très simple, déterminer ce coefficient à partir des essais de pompage classiques dans le cas de puits imparfaits pourvu que l'on dispose d'au moins deux piézomètres. Dans le cas d'un puits parfait, on pourra se ramener au cas du puits imparfait en arrêtant le forage du puits avant qu'il n'atteigne le substratum et en procédant à un essai de pompage spécifique, le forage du puits étant ensuite poursuivi jusqu'à sa profondeur définitive. Nous précisons les procédures de réalisation de ces essais pour tous les cas pratiques que l'on peut rencontrer et nous donnons les formules et les tables numériques permettant l'interprétation de ces essais.

Estimation of the hydraulic factor for aquifer soils by application of pumping tests

Abstract

A method to deduce the anisotropic coefficient of soil from Lefranc tests was previously presented. The following paper explains how determining this coefficient from classical pumping tests, for the case of an unperfect well, can be as easy as the previously described method provided that two piezometers are used. The solution for a perfect well is given by the solution for an unperfect well except that the well drilling is stopped before the bedrock is reached. At this point, the well is tested with a specific pumping process before continuing drilling to the final depth. The pumping test procedures, for any field applications, are detailed in this paper with formulae and numerical tables for their interpretation.

NDLE : Les discussions sur cet article sont acceptées dans un délai de trois mois après sa parution.

La mesure du coefficient de perméabilité des sols homogènes et isotropes se fait, à l'heure actuelle, essentiellement à l'aide d'essais *in situ*, à savoir l'essai Lefranc et l'essai de pompage, ces deux essais ayant fait l'objet d'une normalisation : normes Afnor NFP-94.132 pour le premier et NFP-94.130 pour le second.

Depuis plusieurs années, l'essai Lefranc tend à se généraliser au détriment de l'essai de pompage parce qu'il peut être considéré comme relativement rapide et qu'il est réalisable à toute profondeur au fur et à mesure de l'exécution d'un forage de reconnaissance usuel, et cela avec un matériel léger, alors que l'essai de pompage, qui nécessite un matériel lourd, est un essai beaucoup plus long et évidemment beaucoup plus cher.

Bien qu'il semble, par conséquent, évident que les causes du développement croissant de l'utilisation de l'essai Lefranc soient de nature plus économiques que techniques, il nous a paru que cet essai était susceptible de se prêter, moyennant une procédure appropriée, à une évaluation du coefficient d'anisotropie α défini, rappelons-le, comme le rapport du coefficient de perméabilité horizontale k_h au coefficient de perméabilité verticale k_v . C'est pourquoi, nous avons cru utile d'étudier plus en détail ce problème et nos conclusions ont fait l'objet d'une précédente communication [5].

Mais il ne faut pas perdre de vue que malgré les méthodes modernes d'interprétation de l'essai Lefranc qui permettent d'une part de déceler et d'éliminer les essais non représentatifs, et d'autre part d'exploiter valablement les essais partiellement perturbés par des phénomènes parasites, l'essai Lefranc reste un essai ponctuel avec les limites que cela implique alors que l'essai de pompage est un essai « totalisateur » qui rend compte de la perméabilité moyenne d'un volume de sol important.

C'est donc le seul essai qui puisse donner une idée relativement globale du comportement hydraulique du sol à l'échelle d'un projet et on ne peut imaginer qu'une étude sérieuse, où interviennent des rabattements et des débits d'exhaure ou de fuite importants, puisse être conduite sans y avoir recours. C'est pourquoi, afin d'accroître le domaine d'application de cet essai indispensable qu'est l'essai de pompage et de le valoriser davantage si besoin était, il nous a paru important d'étudier les possibilités qu'il peut offrir dans la détermination du coefficient d'anisotropie.

C'est cette étude que nous présentons dans la présente communication.

1

Principe de la méthode

Rappelons qu'un essai de pompage nécessite la réalisation d'un puits d'un diamètre relativement important par rapport à celui des forages de reconnaissance usuels (par exemple 0,50 à 1,00 m) et la mise en place d'un certain nombre de piézomètres (au moins trois selon la norme NFP-94.130) situés à des distances croissantes du puits.

L'essai consiste alors à mesurer, en fonction du temps, l'évolution du niveau de l'eau dans le puits, mais surtout dans les piézomètres, et cela, si possible, jusqu'à l'obtention du régime permanent. Si ce régime n'est pas atteint, on peut néanmoins interpréter l'essai en régime transitoire, d'autant plus que, moyennant

certaines approximations (approximation logarithmique de Jacob), on peut démontrer qu'à tout instant les formules du régime permanent restent applicables, le régime transitoire apparaissant alors comme une succession de régimes permanents.

L'interprétation classique de l'essai de pompage suppose que le sol étudié est homogène et isotrope, ce qui implique que l'équation de continuité soit une équation de Laplace. Or, on sait que dans un milieu anisotrope il n'en est plus ainsi.

Pour déterminer le coefficient d'anisotropie α , il faut alors transformer, par une affinité géométrique, le milieu anisotrope réel en un milieu isotrope fictif dans lequel l'équation de continuité est bien une équation de Laplace, et où le coefficient de perméabilité k satisfait à une autre condition arbitraire [5].

On choisit évidemment une condition qui simplifie le problème, et, dans le cas présent, nous avons adopté celle qui consiste à ne pas modifier les distances verticales.

La transformation est donc telle que :

$$\begin{aligned} k &= k_v \\ x' &= \frac{x}{\sqrt{\alpha}} \\ y' &= \frac{y}{\sqrt{\alpha}} \\ z' &= z \end{aligned} \quad (1)$$

On démontre, par ailleurs, que le débit Q dans le milieu réel est lié au débit Q' dans le milieu transformé par la relation :

$$Q' = \frac{Q}{\alpha} \quad (2)$$

2

Puits parfaits

Rappelons qu'un puits est dit parfait lorsqu'il traverse entièrement la nappe aquifère et qu'il atteint le substratum étanche. C'est donc un cas relativement rare mais qui présente l'avantage d'une approche théorique simple.

2.1

Nappe en charge

Dans ce cas, la formule de Dupuit donne l'équation de la méridienne de la surface piézométrique jusque et y compris dans le puits (Fig. 1).

Dans un piézomètre situé à la distance r de l'axe du puits, le rabattement est donc :

$$h = \frac{Q}{2\pi kH} \ln \frac{R_a}{r} \quad (3)$$

où R_a est le rayon d'action qui ne peut être déterminé qu'expérimentalement [3, 4].

En appliquant à cette relation la transformation définie par les équations [1], on obtient :

$$r' = \frac{r}{\sqrt{\alpha}} \quad z' = z \quad Q' = \frac{Q}{\alpha}$$

Nappe libre

Dans le cas de la nappe libre, la formule de Dupuit ne donne pas le rabattement à la distance r du puits, mais la hauteur $H(r)$ de la surface libre au-dessus du substratum imperméable.

$$H_o^2 - H^2 = \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{R_a}{r} \quad (5)$$

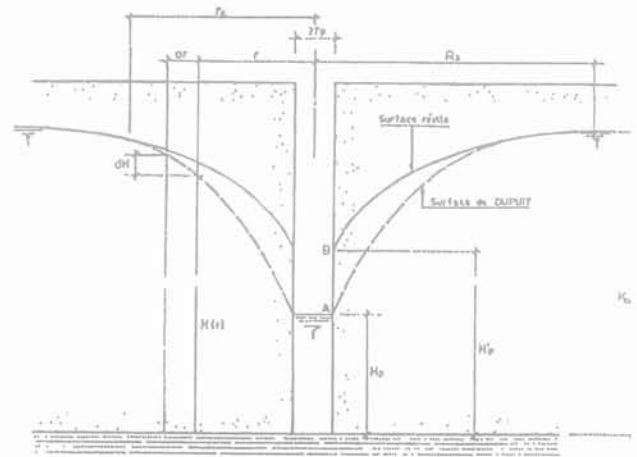


FIG. 2 Puits parfait en nappe libre.
Perfect well in an unconfined aquifer.

Malheureusement, cette formule ne correspond à l'équation de la méridienne de la surface de rabattement qu'au-delà d'une valeur de r racine de l'équation :

$$\frac{dH}{dr} = 0,2$$

Entre ce rayon critique et la surface du puits, on ne connaît pas l'expression analytique de la méridienne qui ne rejoint d'ailleurs pas le niveau de l'eau dans le puits (hauteur de suintement). En revanche, on démontre [3, 7] que, dans le puits, la formule de Dupuit est exacte et a pour expression :

$$H_o^2 - H_p^2 = \frac{Q}{\pi k} \ln \frac{R_a}{r_p} \quad (6)$$

où H_o et r_p désignent respectivement la hauteur d'eau dans le puits et le rayon du puits.

Si on applique aux équations (5) et (6) la même transformation géométrique que précédemment, on obtient comme équations transformées :

$$H_o^2 - H^2 = \frac{Q}{\pi k_h} \ln \frac{R_a}{r} \text{ dans les piézomètres éloignés}$$

et :

$$H_o^2 - H_p^2 = \frac{Q}{\pi k_h} \ln \frac{R_a}{r_p} \text{ dans le puits.}$$

On voit donc que le coefficient de perméabilité mesuré dans un essai de pompage en nappe libre est, lui aussi, égal au coefficient de perméabilité horizontale, et qu'il n'est possible d'évaluer le coefficient d'anisotropie qu'en réalisant le puits en au moins deux phases de longueur différente et avec pompage dans chacune d'elles avant d'atteindre le substratum, ou alors en effectuant, dans l'aquifère, des essais Lefranc normalisés.

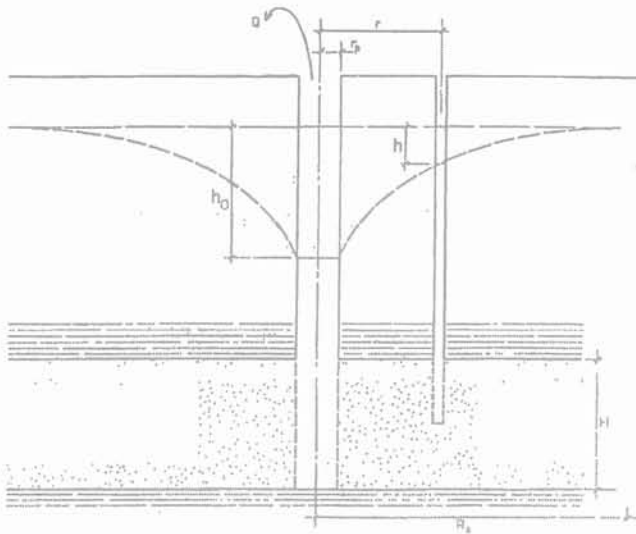


FIG. 1 Puits parfait en nappe en charge.
Perfect well in a confined aquifer.

La transformée de l'équation (3) est alors :

$$h' = \frac{Q'}{2\pi k_h H'} \ln \frac{R'_a}{r'}$$

Mais comme les distances verticales sont inchangées et que $\frac{R'_a}{r'} = \frac{R_a}{r}$, l'équation transformée devient tous calculs faits :

$$h = \frac{Q}{2\pi k_h H} \ln \frac{R_a}{r}$$

En comparant cette équation avec l'équation (3) on voit que le coefficient de perméabilité mesuré dans un essai de pompage selon les méthodes usuelles est le coefficient de perméabilité horizontale et qu'on ne peut donc déterminer ainsi le coefficient d'anisotropie. Il n'en est plus de même si l'on fait varier la fiche du puits dans l'aquifère, ce qui nous place dans le cas du puits imparfait que nous examinerons plus loin.

Toutefois, il est possible de résoudre le problème si on complète l'essai de pompage par de simples essais Lefranc normaux et si on applique la formule :

$$\frac{k_h}{k} = \frac{m(\lambda)\sqrt{\alpha}}{m(\lambda\sqrt{\alpha})} \quad (4)$$

où $m(\lambda)$ et $m(\lambda\sqrt{\alpha})$ sont les coefficients de forme des cavités Lefranc pour des élanements λ (milieu réel) et $\lambda\sqrt{\alpha}$ (milieu transformé).

Puisque k_h est donné par l'essai de pompage et k par les essais Lefranc, l'équation précédente ne contient que la seule inconnue α et peut être résolue analytiquement dans certains cas et numériquement dans les autres [5].

Pratiquement, il faudra évidemment réaliser plusieurs essais Lefranc avec le même élanement pour obtenir une estimation moyenne de k sur toute l'épaisseur de l'aquifère, puisque, le puits étant par hypothèse parfait, l'estimation de k_h est une estimation moyenne sur toute cette épaisseur.

Puits imparfaits

Un puits imparfait est, rappelons-le, un puits qui ne descend pas jusqu'au substratum étanche.

3.1

Nappe en charge

Nous devons examiner les deux configurations suivantes :

- le substratum étanche peut être considéré comme infiniment profond par rapport à la base du puits et, par conséquent, par rapport à l'éponte étanche supérieure ;

- le substratum étanche est situé à une distance finie de l'éponte supérieure et de la base du puits.

Dans un souci d'exhaustivité, nous examinerons également, bien qu'il soit contraire à la norme et par conséquent très rare, le cas d'un puits qui ne serait assorti d'aucun piézomètre.

3.1.1

Substratum étanche infiniment profond

• Interprétation de type Lefranc en puits unique sans piézomètres

La formule de Dupuit ne s'applique évidemment plus, mais on remarque que l'éponte supérieure étanche constitue une surface de courant. Il en résulte que les équipotentiels sont verticales au niveau de cette éponte.

Si on prend l'image du puits et du massif aquifère dans le miroir constitué par l'éponte supérieure (Fig. 3b) on voit que l'écoulement est identique à celui d'un essai Lefranc en milieu infini, et que le réseau d'écoulement autour du puits réel (Fig. 3a) est le même que le demi-réseau inférieur de la figure 3b.

Si D est la fiche du puits dans l'aquifère, on peut donc admettre que l'on pompe dans le puits réel le demi-débit que l'on pomperait dans la cavité fictive constituée par le puits et son image, pour une variation de charge sur les parois de la cavité égale au rabattement h dans le puits. Q désignant le débit qui produit ce rabattement h , le débit nécessaire pour provoquer la même variation de charge dans la cavité fictive de hauteur $2D$ sera donc $2Q$. Il en résulte, d'après la formule usuelle de l'essai Lefranc :

$$2Q = m_0 k h B$$

avec, puisque dans le cas général l'élanement $\lambda = \frac{2D}{B}$ est supérieur à 1,5 :

$$m_0 = \frac{2\pi\lambda}{\text{Argsh } \lambda}$$

Le débit Q dans le puits s'exprime donc avec la formule usuelle de l'essai Lefranc, mais avec le coefficient de forme :

$$m = \frac{\pi\lambda}{\text{Argsh } \lambda} \quad (7)$$

On peut alors appliquer rigoureusement la méthode exposée pour l'essai Lefranc [5], en réalisant le forage du puits en deux phases, une première phase arrêtée à

la profondeur D_1 au-dessous de l'éponte étanche avec pompage sous un débit Q_1 , provoquant un rabattement h_1 dans le puits, et une deuxième phase correspondant à la profondeur définitive du puits $D = D_2$ avec un nouveau pompage sous débit Q_2 provoquant un rabattement h_2 . On est alors ramené au problème traité dans la référence [5], c'est-à-dire à la résolution de l'équation :

$$q = \frac{\text{Argsh } x}{\text{Argsh } (nx)} \quad (8)$$

dans laquelle :

$$q = \frac{h_1 Q_2}{n h_2 Q_1} \quad n = \frac{D_2}{D_1} = \frac{D}{D_1} \quad x = \lambda_1 \sqrt{\alpha}$$

on en déduit :

$$k_h = \frac{Q_1}{2\pi\lambda_1 h_1 B} \text{Argsh}(\lambda_1 \sqrt{\alpha}) \quad (9)$$

Si le régime permanent n'a pas été atteint avec l'un ou avec les deux débits, on pourra évaluer, avec la méthode de la norme NFP-94.132, les valeurs asymptotiques des rabattements permanents h_1 et h_2 correspondant à chaque débit.

• Interprétation à partir de piézomètres

Considérons un piézomètre situé à la distance r de l'axe du puits et dont la prise de pression se situe à l'interface de l'aquifère et de l'éponte étanche (point P de la figure 4). Le niveau de l'eau dans ce piézomètre correspond donc à la charge hydraulique en P. Or, si on se réfère au schéma d'écoulement de la figure 3b, on voit que la charge en P n'est autre que le potentiel qui règne sur la surface équipotentielle passant par P, laquelle est un ellipsoïde de révolution allongé (Fig. 5).

D'après la théorie de l'essai Lefranc [3] cette surface équipotentielle et la cavité fictive de filtration de la figure 3b sont deux ellipsoïdes homofocaux de distance focale $2D$. Or le débit qui s'écoule dans cette cavité fictive est le même que celui qui traverse l'équipotentielle. Mais, comme nous l'avons vu pour le puits isolé, une variation de charge donnée h mesurée dans le piézomètre correspond à un débit à travers l'équipotentielle égal au double du débit réel Q pompé dans le puits.

Puisque toutes les surfaces équipotentielles ont même distance focale $2D$ que la cavité fictive, on peut donc écrire pour l'équipotentielle passant par P :

$$2Q = \frac{2\pi\lambda}{\text{Argsh } \lambda} k h B$$

où : $\lambda = \frac{2D}{2r} = \frac{D}{r}$ et $B = 2r$.

La relation qui régit l'écoulement à la distance r du puits est donc finalement :

$$Q = \frac{\pi\lambda}{\text{Argsh } \lambda} k h B \quad (10)$$

En transformant comme précédemment le milieu réel anisotrope en un milieu réel isotrope sans modification des coordonnées verticales, la relation précédente devient :

$$Q = \frac{\pi\lambda}{\text{Argsh}(\lambda\sqrt{\alpha})} \cdot k_h h B \quad (11)$$

Si on désigne par λ_0 l'élanement de la partie crépinée du puits de diamètre $B_0 = 2r_0$ et par h_0 le rabatte-

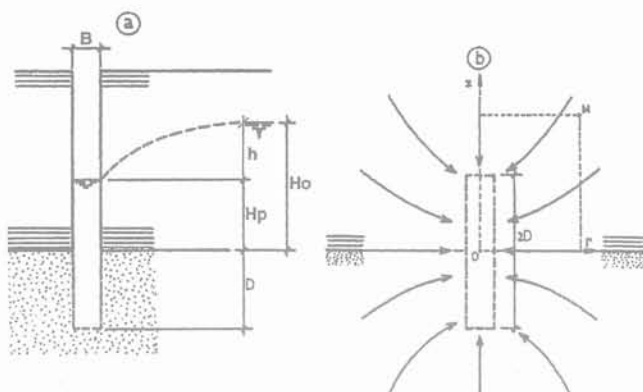


FIG. 3 Nappe en charge d'épaisseur infinie sans piézomètre.
Confined aquifer of infinite thickness without any piezometer.

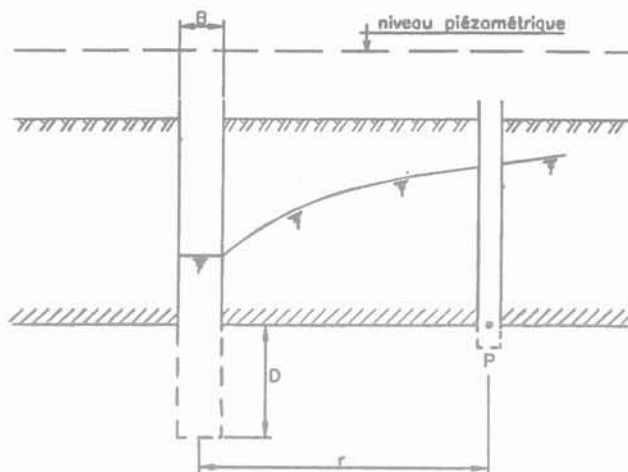


FIG. 4 Nappe en charge d'épaisseur infinie avec piézomètre.
Confined aquifer of infinite thickness with piezometers.

ment dans le puits sous le débit Q , la formule précédente s'écrit, pour le puits :

$$Q = \frac{\pi \lambda_o}{\text{Argsh}(\lambda_o \sqrt{\alpha})} \cdot k_h h_o B_o \quad (12)$$

avec : $\lambda_o = \frac{2D}{B_o}$

Comme le débit est le même dans le puits et à travers l'équipotentielle, on déduit des relations (11) et (12) :

$$\frac{h}{h_o} = \frac{\text{Argsh}(\lambda \sqrt{\alpha})}{\text{Argsh}(\lambda_o \sqrt{\alpha})}$$

Si on pose :

$$\lambda_o = n\lambda \rightarrow n = \frac{B}{B_o} > 1$$

$$x = \lambda \sqrt{\alpha}$$

la relation précédente devient :

$$\frac{h}{h_o} = \frac{\text{Argsh} x}{\text{Argsh}(nx)} \quad (13)$$

C'est la même équation que l'équation (8) dans laquelle $q = \frac{h}{h_o}$.

Il est évidemment souhaitable de disposer de plusieurs piézomètres, ce qui permet d'avoir plusieurs évaluations de α . Dans ce cas, la relation (13) peut s'appliquer à deux piézomètres dont les distances au puits seraient r_1 et r_2 avec $r_2 > r_1$ et les variations de charge h_1 et h_2 , avec évidemment $h_2 < h_1$. On aurait alors :

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\text{Argsh} x}{\text{Argsh} nx} \quad (13 \text{ bis})$$

avec : $x = \frac{D}{r_2} \sqrt{\alpha} = \lambda_2 \sqrt{\alpha}$ et $n = \frac{r_2}{r_1}$

Toutes choses restant égales par ailleurs, il est également possible de pomper avec plusieurs paliers de débits bien qu'un seul pompage soit suffisant.

On évalue le coefficient de perméabilité horizontale directement à l'aide de la relation (11) :

$$k_h = \frac{Q}{2\pi h_i D} \text{Argsh}(\lambda_i \sqrt{\alpha})$$

ou à partir de l'équation :

$$\frac{k_h}{k_i} = \frac{\text{Argsh}(\lambda_i \sqrt{\alpha})}{\text{Argsh} \lambda_i} \quad (14)$$

avec :

$$k_i = \frac{Q \text{Argsh} \lambda_i}{\pi \lambda_i h_i B_i}$$

l'indice i prenant la valeur zéro sur le puits

$$\lambda_i = \frac{D}{r_i}$$

Comme précédemment, en régime transitoire, on pourra calculer k_i selon les prescriptions de la norme NFP-94.132, avec comme coefficient de forme :

$$m_i = \frac{\pi \lambda_i}{\text{Argsh} \lambda_i}$$

L'intérêt de cette méthode avec piézomètres est qu'elle ne nécessite aucune variation de la hauteur crépinée du puits, c'est-à-dire aucun phasage dans le forage du puits, et qu'un pompage unique est théoriquement suffisant.

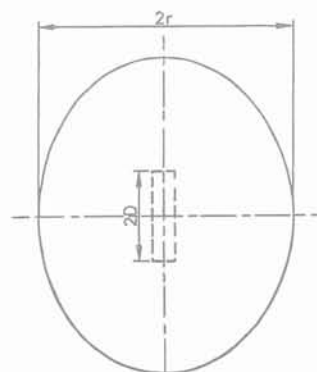


FIG. 5 Équipotentielle homofocale à la cavité.
Equipotential homofocal to the well.

Les deux horizons étanches sont à distance finie

• Puits unique sans piézomètres

Soit H l'épaisseur de l'aquifère et D la fiche du puits dans cet aquifère, c'est-à-dire la fiche comptée, comme précédemment, à partir du niveau étanche supérieur (Fig. 6).

On peut, ici aussi, admettre que le réseau d'écoulement réel est constitué par la moitié inférieure du réseau d'écoulement autour d'une cavité de même diamètre que le puits et de longueur $2D$, et qui serait équidistante des deux niveaux étanches d'une nappe en charge d'épaisseur $2H$. Ceci revient à considérer la disposition obtenue par symétrie de la configuration réelle par rapport à l'horizon étanche supérieur comme nous l'avons fait dans le cas précédent (Fig. 3b).

Le débit Q qui provoque un rabattement h dans le puits réel est toujours donné par la relation :

$$Q = m_k h B = \frac{1}{2} m_1 k h B$$

où m_1 est le coefficient de forme de la cavité fictive de hauteur $2D$ dans le milieu image qui est alors un milieu à trois couches (Fig. 7).

Nous avons établi [2] que, dans un aquifère isotrope en charge de coefficient de perméabilité k , limité par deux couches horizontales de perméabilité k_1 , le coefficient de forme pour une cavité équidistante des deux épontes, est donné par la relation.

$$\frac{1}{m_1} = \frac{1}{m_0} + \frac{B}{4\pi H} \ln \frac{\omega}{\omega - 1}$$

$$\text{où : } \omega = \frac{k + k_1}{k - k_1}$$

Pour le puits réel, on a donc :

$$\frac{1}{m} = \frac{2}{m_0} + \frac{B}{2\pi H} \ln \frac{\omega}{\omega - 1} \quad (15)$$

où m_0 est le coefficient de forme de la cavité de longueur $2D$ en milieu indéfini.

La formule (15) n'est théoriquement valable que lorsque l'épaisseur H de l'aquifère réel est telle que le demi-ellipsoïde homofocal à la cavité de filtration et tangent au substratum est assimilable à une sphère. On

pourra admettre qu'il en est ainsi lorsque $\frac{D}{H} < 0,3$. En

effet, il est facile de montrer que le demi-petit axe r de l'ellipsoïde tangent au substratum est tel que

$$\frac{r}{H} \sqrt{1 - \left(\frac{D}{H}\right)^2}$$

Pour $\frac{D}{H} = 0,3$ on a en effet $\frac{r}{H} = 0,95$ alors que le

rayon R de la sphère correspondante est tel que $\frac{R}{H} = 1$. L'écart entre r et R est donc négligeable.

Lorsque les deux épontes qui limitent l'aquifère sont rigoureusement imperméables, c'est-à-dire lorsque $k_1 = 0$, on a $\omega = 1$ et $\ln \frac{\omega}{\omega - 1}$ devient infini, ce qui est gênant.

Si on raisonne directement en supposant l'étanchéité absolue des épontes, on sait que l'on peut utiliser

la théorie des images et considérer les deux horizons étanches qui limitent l'aquifère comme deux miroirs plans parallèles qui donnent une double infinité d'images.

On démontre alors [2] que le coefficient de forme pour le système tricouche devient :

$$\frac{1}{m_1} = \frac{1}{m_0} + \frac{B}{4\pi H} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \right]$$

où n est le nombre d'images, et, pour le système réel :

$$\frac{1}{m} = \frac{2}{m_0} + \frac{B}{2\pi H} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} \right) \right]$$

La série harmonique $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ étant divergente ainsi

que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ (puisque $\frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$), on retrouve bien, comme dans l'approche précédente, la divergence de $\frac{1}{m}$.

Cette divergence, bien qu'il s'agisse d'effets différents, constitue une difficulté théorique qui n'est pas sans rappeler, comme le faisait remarquer H. Cambefort, celle que l'on rencontre avec le rayon d'action de la formule de Dupuit.

Mais nous faisons ici de la physique et non des mathématiques. On peut donc contourner cette difficulté en remarquant que dans deux terrains de perméabilité différente, dès que le coefficient de perméa-

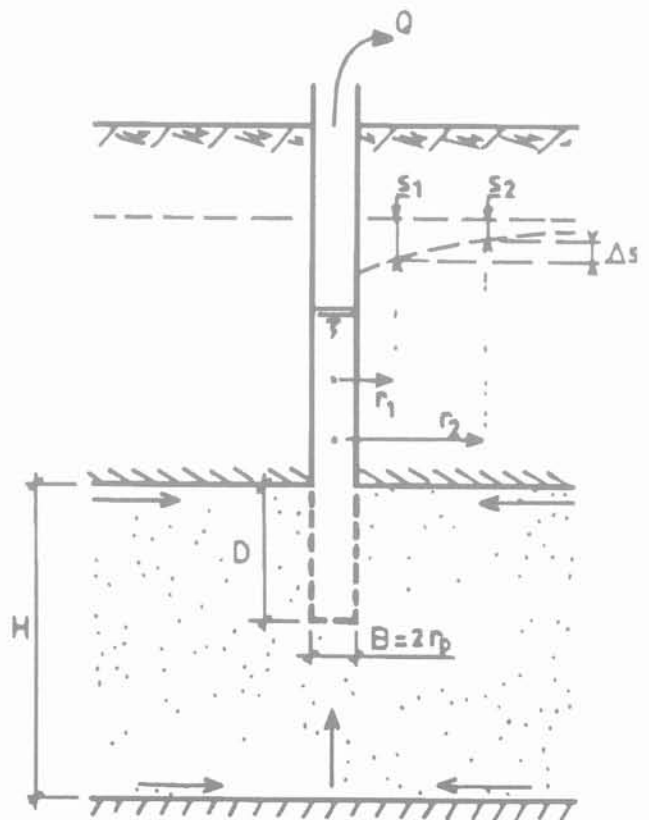


FIG. 6 Puits imparfait en nappe captive d'épaisseur finie.

Unperfect well in a confined aquifer of finite thickness.

bilité de l'un de ces deux terrains diffère de celui de l'autre de deux puissances de 10, c'est-à-dire dans un rapport de 1 à 100, on peut considérer le terrain le moins perméable comme pratiquement étanche par rapport à l'autre.

Si nous voulons être plus prudents encore, on peut admettre que, dans le milieu tricouche considéré, la couche aquifère est mille fois plus perméable que les deux épontes, c'est-à-dire que :

$$\frac{k_1}{k} = 10^{-3}$$

ou, ce qui revient au même, puisque $\frac{k_1}{k}$ est petit que :

$$\omega = \frac{k + k_1}{k - k_1} \approx 1 + 2\frac{k_1}{k} = 1,002$$

La relation (15) devient alors :

$$\frac{1}{m} = \frac{2}{m_0} + \frac{6,22B}{2\pi H} \# \frac{2}{m_0} + \frac{B}{H}$$

Dans la méthode des miroirs parallèles, cette expression correspond à un nombre d'images supérieur à 100, puisque pour 100 images, le coefficient de $\frac{B}{H}$ est de 0,93. On peut donc admettre que l'expression proposée correspond à une étanchéité quasiment parfaite des deux épontes.

Le coefficient de forme est alors finalement :

$$m = \frac{m_0 H}{2H + m_0 B}$$

Le débit correspondant à un rabattement h dans le puits est alors :

$$Q = \frac{m_0 H}{2H + m_0 B} khB$$

$$\text{où : } m_0 = \frac{4\pi D}{B \operatorname{Argsh}\left(\frac{2D}{B}\right)}$$

Après quelques simplifications, on obtient :

$$Q = \frac{2\pi}{2\pi\left(\frac{D}{H}\right) + \operatorname{Argsh}\left(\frac{2D}{B}\right)} \cdot khD$$

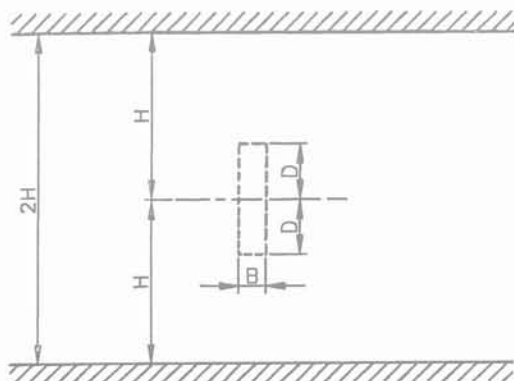


FIG. 7 Système tricouche.
Three layer system.

$$\text{Posons : } \frac{2D}{B} = \lambda \quad \text{et} \quad \frac{D}{H} = \mu$$

il vient finalement :

$$Q = \frac{2\pi}{2\pi\mu + \operatorname{Argsh}\lambda} \cdot khD \quad (16)$$

La transformée de cette équation par l'affinité qui conserve les distances verticales conduit alors tous calculs faits à :

$$Q = \frac{2\pi}{2\pi\mu + \operatorname{Argsh}\lambda\sqrt{\alpha}} k_h h D \quad (17)$$

Pour évaluer α , il suffit de réaliser deux essais de pompage, l'un avec le puits arrêté à la profondeur D_1 sous l'éponte supérieure et le second avec le puits descendu à la cote définitive D_2 .

Dans le premier essai, on pompe avec un débit Q_1 et on obtient un rabattement h_1 et dans le deuxième essai on pompe un débit Q_2 qui produit un rabattement h_2 .

On peut écrire :

$$Q_1 = \frac{2\pi}{2\pi\mu_1 + \operatorname{Argsh}\lambda_1\sqrt{\alpha}} \cdot k_h h_1 D_1$$

$$Q_2 = \frac{2\pi}{2\pi\mu_2 + \operatorname{Argsh}\lambda_2\sqrt{\alpha}} \cdot k_h h_2 D_2$$

$$\text{d'où : } \frac{h_1 D_1 Q_2}{h_2 D_2 Q_1} = \frac{2\pi\mu_1 + \operatorname{Argsh}(\lambda_1\sqrt{\alpha})}{2\pi\mu_2 + \operatorname{Argsh}(\lambda_2\sqrt{\alpha})}$$

Posons :

$$\frac{D_2}{D_1} = n \quad x = \lambda_1\sqrt{\alpha} \quad q = \frac{h_1 D_1 Q_2}{h_2 D_2 Q_1} = \frac{h_1 Q_2}{n h_2 Q_1}$$

L'équation précédente devient :

$$q = \frac{2\pi\mu_1 + \operatorname{Argsh}x}{2\pi n\mu_1 + \operatorname{Argsh}nx} \quad (18)$$

Le premier membre de cette équation est connu expérimentalement et le paramètre μ_1 est l'une des données géométriques. La résolution numérique de cette équation conduit à une valeur de x dont on déduit α puisque λ_1 est également connu.

On vérifie que lorsque H tend vers l'infini, c'est-à-dire lorsque le système tricouche tend vers le massif infini, μ_1 tend vers zéro et on retrouve bien l'équation (8).

Connaissant α , l'équation (17) donne directement :

$$k_h = \frac{Q_1}{2\pi h_1 D_1} \left[2\pi\mu_1 + \operatorname{Argsh}(\lambda_1\sqrt{\alpha}) \right] \quad (19)$$

Là aussi, en régime transitoire, on pourra évaluer k selon les prescriptions de la norme NFP-94132 avec comme coefficient de forme :

$$m_1 = \frac{\pi\lambda_1}{2\pi\mu_1 + \operatorname{Argsh}\lambda_1}$$

et calculer les valeurs de h_1 correspondant au régime permanent.

On remarque qu'en faisant $\mu_1 = 0$ dans l'équation (19) on retrouve bien l'équation (9).

• Puits avec piézomètres

Cas où $\mu = \frac{D}{H} < 0,3$

Dans ce cas, le puits est descendu directement à sa profondeur définitive et deux piézomètres suffisent alors pour résoudre le problème, à condition qu'ils soient disposés à une distance du puits inférieure à $0,95H$, condition en général facile à satisfaire pour un puits imparfait car ce type de puits ne se rencontre pratiquement que lorsque H est important.

On remarquera que la relation (17), que nous avons établie pour le puits, peut se généraliser pour un piézomètre situé à la distance r du puits. Il suffit pour cela de remplacer dans cette relation $\lambda = \frac{2D}{B}$, par

$\lambda = \frac{2D}{2r} = \frac{D}{r}$, le paramètre $\mu = \frac{D}{H}$, restant constant puisque D est une donnée fixe.

Considérons alors deux piézomètres distants de r_1 et r_2 de l'axe du puits, avec par exemple $r_2 > r_1$. Les rabattements h_1 et h_2 obtenus dans les piézomètres pour un débit Q pompé dans le puits sont alors tels que $h_1 > h_2$.

On a donc d'après (17) :

$$Q = \frac{2\pi}{2\pi\mu + \text{Argsh}\left(\lambda_1\sqrt{\alpha}\right)} k_h h_1 D = \frac{2\pi}{2\pi\mu + \text{Argsh}\left(\lambda_2\sqrt{\alpha}\right)} k_h h_2 D$$

d'où :

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{2\pi\mu + \text{Argsh}\left(\lambda_2\sqrt{\alpha}\right)}{2\pi\mu + \text{Argsh}\left(\lambda_1\sqrt{\alpha}\right)} \quad (20)$$

Posons : $n = \frac{r_2}{r_1} > 1$ c'est-à-dire $\lambda_1 = n \lambda_2$

$$x = \lambda_2 \sqrt{\alpha}$$

La relation (20) s'écrit alors :

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{2\pi\mu + \text{Argsh}x}{2\pi\mu + \text{Argsh}(nx)} \quad (20 \text{ bis})$$

Il suffit donc de résoudre cette équation numériquement, ce qui ne présente pas de difficulté, et d'en déduire :

$$\alpha = \left(\frac{x}{\lambda_2}\right)^2$$

Connaissant α et en comparant les équations (16) et (17), on déduit :

$$\frac{k_h}{k_i} = \frac{2\pi\mu + \text{Argsh}\left(\lambda_1\sqrt{\alpha}\right)}{2\pi\mu + \text{Argsh}\lambda_1}$$

$$\text{avec : } k_i = \frac{Q[2\pi\mu + \text{Argsh}\lambda_1]}{2\pi D h_i}$$

On peut aussi évaluer directement le coefficient de perméabilité horizontale :

$$k_h = \frac{Q}{2\pi\lambda_1 D} [2\pi\mu + \text{Argsh}(\lambda_1\sqrt{\alpha})] \quad (21)$$

Cas où $\mu = \frac{D}{H} > 0,3$

Pour évaluer α , il faut mettre en place trois piézomètres dont les prises de pression doivent, comme précédemment, être voisines de l'éponte supérieure, et on

utilisera la relation de Muskat et Nasberg [4] qui donne le rabattement h dans un piézomètre situé à la distance r de l'axe du puits :

$$h(r) = \frac{Q}{2\pi k H} \left[\ln \frac{R_a}{r} + \Phi(R_a) - \Phi(r) \right] \quad (22)$$

avec : R_a = rayon d'action du puits

$$\Phi(r) = \frac{H}{D} \text{Argsh} \frac{D}{r} - \text{Argsh} \frac{H}{r} \quad (23)$$

Transformons l'équation (22) par l'affinité qui conserve les distances verticales. On obtient alors :

$$h = \frac{Q}{2\pi k_h H} \left[\ln \frac{R_a}{r} + \Phi\left(\frac{R_a}{\sqrt{\alpha}}\right) - \Phi\left(\frac{r}{\sqrt{\alpha}}\right) \right] \quad (24)$$

Soient r_1, r_2 et r_3 , les distances des piézomètres à l'axe du puits et h_1, h_2 et h_3 , les rabattements qui y sont mesurés.

L'application de la formule (24) à chacun de ces piézomètres permet d'écrire :

$$\frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_3} = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1} + \Phi\left(\frac{r_2}{\sqrt{\alpha}}\right) - \Phi\left(\frac{r_1}{\sqrt{\alpha}}\right)}{\ln \frac{r_3}{r_1} + \Phi\left(\frac{r_3}{\sqrt{\alpha}}\right) - \Phi\left(\frac{r_1}{\sqrt{\alpha}}\right)} \quad (25)$$

Dans cette relation, les paramètres h_i et r_i sont connus. On se trouve donc en présence d'une équation à une inconnue α , que l'on peut résoudre numériquement.

On peut également reprendre le calcul de α pour d'autres combinaisons possibles des h_i et r_i , ce qui donne trois évaluations de α qui doivent être équivalentes.

Des équations (22) et (24), on déduit :

$$\frac{k_h}{k} = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1} + \Phi\left(\frac{r_2}{\sqrt{\alpha}}\right) - \Phi\left(\frac{r_1}{\sqrt{\alpha}}\right)}{\ln \frac{r_2}{r_1} + \Phi(r_2) - \Phi(r_1)} \quad (26)$$

avec :

$$k = \frac{Q}{2\pi(h_1 - h_2)H} \left[\ln \frac{r_2}{r_1} + \Phi(r_2) - \Phi(r_1) \right] = \frac{Q}{2\pi(h_2 - h_3)H} \left[\ln \frac{r_3}{r_2} + \Phi(r_3) - \Phi(r_2) \right] = \text{etc.}$$

ou directement :

$$k_h = \frac{Q}{2\pi(h_1 - h_2)H} \left[\ln \frac{r_2}{r_1} + \Phi\left(\frac{r_2}{\sqrt{\alpha}}\right) - \Phi\left(\frac{r_1}{\sqrt{\alpha}}\right) \right] = \frac{Q}{2\pi(h_2 - h_3)H} \left[\ln \frac{r_3}{r_2} + \Phi\left(\frac{r_3}{\sqrt{\alpha}}\right) - \Phi\left(\frac{r_2}{\sqrt{\alpha}}\right) \right] = \text{etc.}$$

3.2

Nappe libre

Le cas du puits imparfait dans une nappe libre n'a pas été résolu de façon théorique rigoureuse. Certains auteurs ont donné des formules semi-empiriques pour le rabattement dans le puits, mais non dans les piézomètres.

Toutefois, d'après Schneebeli [8], on peut conserver les formules de la nappe en charge en remplaçant le rabattement $h(r) = H_o - H$ à la distance r de l'axe du puits par l'expression :

$$h^*(r) = \frac{H_o^2 - H^2}{2H_o}$$

soit encore :

$$h^* = h \left(1 - \frac{h}{2H_o} \right)$$

On voit que si h est petit devant H_o (et c'est souvent le cas pour un puits imparfait), on a :

$h^* \approx h$ et les formules de la nappe en charge sont alors parfaitement justifiées.

3.2.1

Substratum étanche infiniment profond

On se placera dans l'hypothèse où h est petit et on considérera le système constitué par le dispositif réel et par son symétrique par rapport au niveau initial de la nappe.

On se trouve donc comme dans le cas de la nappe en charge, en présence d'une cavité allongée de diamètre B et de hauteur $2D$ aménagée dans un massif indéfini, D désignant la fiche du puits comptée à partir du niveau de la nappe, et on retrouve ainsi la configuration de l'essai Lefranc en milieu indéfini.

On pourrait alors évaluer le coefficient d'anisotropie en appliquant la méthode que nous avons développée précédemment dans le cas de la nappe captive avec substratum étanche infiniment profond, malgré l'existence d'une hauteur de suintement qui, dans le cas d'un puits imparfait en milieu semi-infini (disposition réelle), est plus faible que dans le cas du puits parfait. De plus, d'après notre hypothèse initiale relative aux faibles valeurs des rabattements, l'erreur que l'on peut faire en assimilant le rabattement dans le puits à la charge hydraulique n'est peut-être pas très significative.

Nous ne reviendrons pas sur cette méthode qui consiste à réaliser le forage du puits en plusieurs phases, avec pompage dans chaque phase, car il nous semble préférable d'utiliser la méthode avec piézomètres que nous avons développée ci-dessus pour la nappe en charge.

Il faudra alors prévoir au moins deux piézomètres (mais trois seraient souhaitables) disposés de façon à obtenir des rabattements susceptibles d'être considérés comme faibles par rapport à l'épaisseur de l'aquifère mais suffisamment contrastés pour conduire à des résultats fiables. La disposition de ces piézomètres pourra être déterminée en se fixant une valeur de l'épaisseur de l'aquifère très approximative, mais prudente, d'après ce que l'on connaît de la géologie du site et en évaluant grossièrement un coefficient global de perméabilité en fonction de la nature des matériaux (formule de Hazen par exemple).

En considérant là aussi la symétrie du dispositif réel par rapport à la surface libre de la nappe au repos, on est ramené au cas de la nappe en charge et on est en droit d'utiliser les formules (13) et (13 bis).

Si on considère deux piézomètres dont les distances à l'axe du puits sont respectivement r_1 et r_2 avec par exemple $r_2 > r_1$ et si h_1 et h_2 sont les rabattements correspondants (dans ce cas $h_1 > h_2$), l'équation 13 bis que nous rappelons ci-après, est applicable :

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{\text{Argsh} x}{\text{Argsh} nx}$$

$$\text{avec : } x = \frac{D}{r_2} \sqrt{\alpha} \quad \text{et} \quad n = \frac{r_2}{r_1} > 1.$$

Connaissant α , on aura, d'après la relation (14), quel que soit le piézomètre :

$$\frac{k_h}{k_i} = \frac{\text{Argsh} \frac{D}{r_i} \sqrt{\alpha}}{\text{Argsh} \frac{D}{r_i}}$$

où k_i est évalué à l'aide de la formule (10). Mais on peut aussi évaluer directement k_h à partir de la relation (11) :

$$k_h = \frac{Q}{2\pi h_i D} \text{Argsh} \left(\frac{D}{r_i} \sqrt{\alpha} \right)$$

Si on dispose de plus de deux piézomètres, la formule (13 bis) pourra être utilisée plusieurs fois en permutant circulairement les indices de h_1 et r_1 .

3.2.2

Substratum étanche à distance finie

Lorsque le substratum étanche se trouve à une distance finie H_o du niveau statique de la nappe (Fig. 9) on pourra évaluer le coefficient d'anisotropie à partir du rabattement dans le puits de deux manières différentes, soit en utilisant la formulation directe de Todd [4] soit en prenant le symétrique de la configuration réelle par rapport au niveau statique de la nappe et en utilisant la méthode développée pour la nappe en charge.

Rappelons que ces deux méthodes ne peuvent être utilisées que si le rabattement dans le puits $h = H_o - H_p$ est négligeable par rapport à H_o .

• Utilisation de la formule de Todd dans le puits

Cette formule est la suivante :

$$h = \frac{Q}{2\pi k D} \left[\frac{D}{10H_o} + \ln \frac{\pi D}{B} \right] \quad (28)$$

Si on effectue, comme dans tous les cas précédents, la transformation affine qui conserve les distances verticales, on obtient :

$$h = \frac{Q}{2\pi k_h D} \left[\frac{D}{10H_o} + \ln \frac{\pi D}{B} \sqrt{\alpha} \right]$$

En réalisant deux essais avec deux valeurs différentes de D , on obtient :

$$\frac{D_1 h_1 Q_2}{D_2 h_2 Q_1} = \frac{\frac{D_1}{10H_o} + \ln \frac{\pi D_1}{B} \sqrt{\alpha}}{\frac{D_2}{10H_o} + \ln \frac{\pi D_2}{B} \sqrt{\alpha}}$$

soit en posant :

$$q = \frac{D_1 h_1 Q_2}{D_2 h_2 Q_1} \quad \delta_1 = \frac{D_1}{10H_o} \quad \delta_2 = \frac{D_2}{10H_o} \quad n = \frac{D_2}{D_1} = \frac{\delta_2}{\delta_1}$$

et :

$$x = \frac{\pi D_1}{B} \sqrt{\alpha}$$

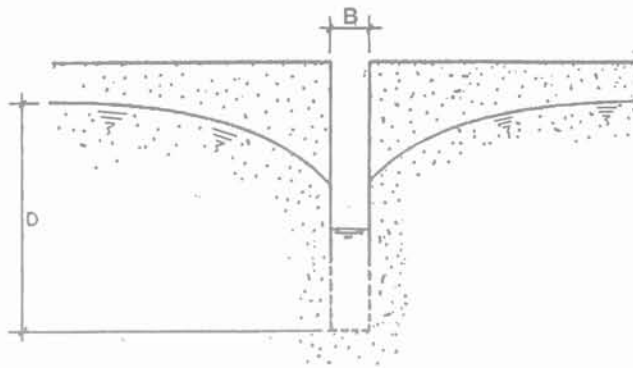


FIG. 8 **Pompage en nappe libre avec substratum infiniment profond.**
Pumping in an unconfined aquifer with bedrock at infinite depth.

on obtient :

$$q = \frac{\delta_1 + \ln x}{n\delta_1 + \ln(nx)}$$

d'où :

$$\ln x = \frac{q}{1-q} [(n-1)\delta_1 + \ln(n)]$$

En posant :

$$\beta = \frac{q}{1-q} [(n-1)\delta_1 + \ln(n)]$$

on obtient finalement :

$$x = e^\beta$$

$$\alpha = \left[\frac{Be^\beta}{\pi D_1} \right]^2$$

On a par ailleurs :

$$\frac{k_h}{k_i} = \frac{\delta_1 + \ln\left(\frac{\pi D_1}{B} \sqrt{\alpha}\right)}{\delta_1 + \ln\left(\frac{\pi D_1}{B}\right)}$$

ou directement :

$$k_h = \frac{Q}{2\pi h_i D_1} \left[\frac{D_1}{10H_0} + \ln \frac{\pi D_1}{B} \sqrt{\alpha} \right]$$

• Analogie avec la nappe en charge

En considérant toujours le système réel et son symétrique par rapport au niveau statique initial de la nappe, on pourra utiliser directement les résultats de la nappe en charge à savoir :

$\frac{D}{H_0} < 0,3$; les formules (18) et (19) du puits sans piézomètres ou (20 bis) et (21) du puits avec piézomètres.

$\frac{D}{H_0} > 0,3$; les formules (25), (26) et (27) du puits avec piézomètres.

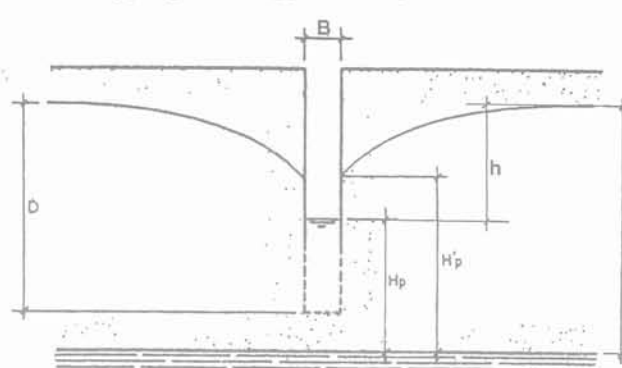


FIG. 9 **Puits imparfait dans une nappe libre avec substratum à distance finie.**
Unperfect well in an unconfined aquifer with a bedrock at a finite depth.

4

Recommandations pratiques concernant les dispositions expérimentales

4.1

Essais dans le puits en l'absence de piézomètres

Il est extrêmement rare que l'on procède à un essai de pompage dans un puits qui ne soit pas assorti de piézomètres mais, bien que peu probable, ce cas peut se produire.

Comme nous l'avons indiqué précédemment, en l'absence de piézomètres il faut réaliser le forage du puits en deux ou trois phases, chaque phase faisant l'objet d'un pompage. On interprétera alors l'essai comme un essai Lefranc selon les méthodes précédemment exposées [5].

Comme les forages de puits sont réalisés en diamètres nettement supérieurs à ceux utilisés pour les essais Lefranc ou pour les piézomètres et qu'ils doivent obligatoirement être équipés d'un tube crépiné conformément à la norme NFP-94.130, il est recommandé d'utiliser ce tube crépiné même pour les pompes intermédiaires.

4.1.1

Nappe en charge

La paroi du puits à travers l'éponte supérieure devra être étanche (tube de forage sans sabot débordant et cimentation si nécessaire) et le forage sera poursuivi en tubant au-dessous de cette éponte, aucune boue, même biodégradable, ne devant être utilisée (Fig. 10).

A la profondeur désirée, on arrêtera le forage et on mettra en place le tube crépiné et le matériau filtrant (Fig. 10-1). On remontera ensuite le tube de forage jusqu'à l'éponte supérieure et on réalisera un bouchon d'argile (Fig. 10-2).

On procédera ensuite au premier pompage, puis on retirera le tube crépiné et on approfondira le forage en

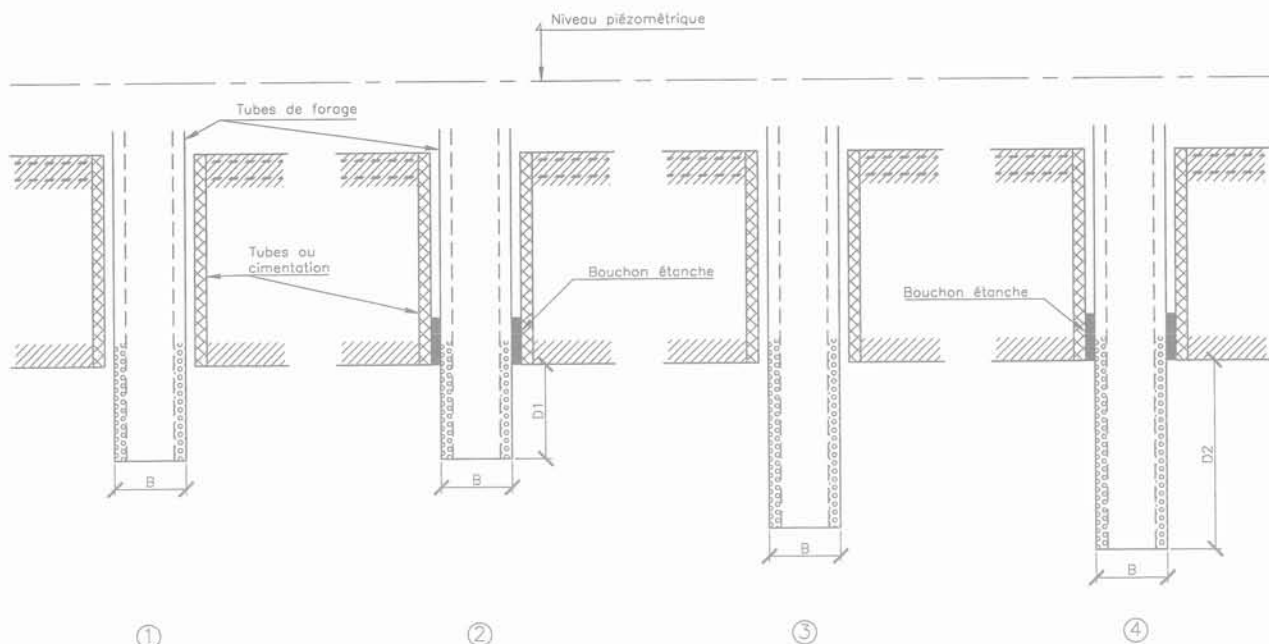


FIG. 10 Réalisation des cavités à la base d'un puits dans une nappe en charge.
Creating a cavity at the bottom of a well in a confined aquifer.

détruisant évidemment le premier bouchon étanche (Fig. 10-3). Puis, on remettra en place le tube crépiné et on réalisera un autre bouchon filtrant pour procéder au deuxième essai (Fig. 10-4).

Les deux essais devront être précédés d'un développement selon les prescriptions de la norme NFP-94.130.

4.1.2

Nappe libre

Le forage doit être tubé (tube lisse à sabot non débordant), à l'exclusion de toute utilisation de boue même biodégradable.

Lorsque le forage proprement dit aura atteint la cote désirée pour la première phase, on mettra en place le tube crépiné et on introduira un matériau filtrant dans l'espace annulaire entre les deux tubes. On remontera ensuite le tube de forage d'une hauteur D_1 , on développera le puits et on procédera au premier pompage.

Pour faire varier la hauteur de la cavité, la méthode la plus rapide consiste à opérer vers le haut. Dans ce cas, il suffit de rajouter du matériau filtrant et de remonter une nouvelle fois le tube de forage jusqu'à une hauteur D_2 .

Une fois les deux pompages terminés, on extraira le tube crépiné et on reprendra le forage du puits (Fig. 11).

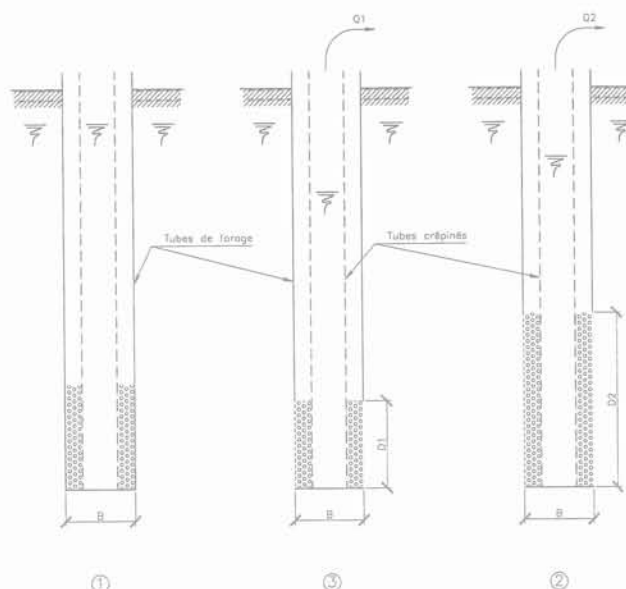


FIG. 11 Réalisation des cavités à la base d'un puits en nappe libre.
Creating a cavity at the bottom of a well in an unconfined aquifer.

4.2

Utilisation de piézomètres

En général, les puits pour essais de pompages réalisés selon la norme NFP-94.130 sont assortis d'au moins trois piézomètres, ce qui permet, s'ils sont convenablement espacés, de s'affranchir de la variation de la fiche du puits qui représente, il faut bien le reconnaître, une sujétion très lourde.

4.2.1

Nappe en charge

Dans le cas d'une nappe en charge, ces piézomètres doivent pénétrer dans l'aquifère sur une longueur d'environ un mètre, la prise de pression étant isolée hydrauliquement du reste du forage par un bouchon d'argile et une injection de bentonite-ciment (Fig. 12).

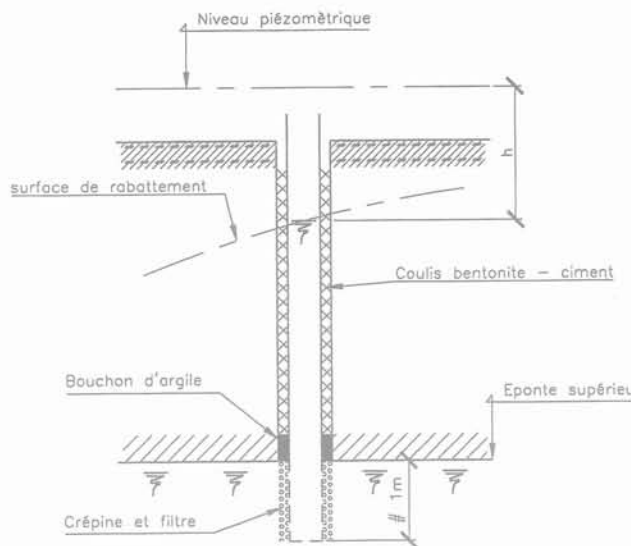


FIG. 12 Piézomètre en nappe captive.
Piezometer in a confined aquifer.

La faible pénétration de la prise de pression dans l'aquifère, au-dessous de l'éponte supérieure, a pour but de saisir la variation de charge le plus près possible de l'axe de symétrie du dispositif fictif constitué par le dispositif réel et son image dans le miroir constitué par la base de l'éponte supérieure.

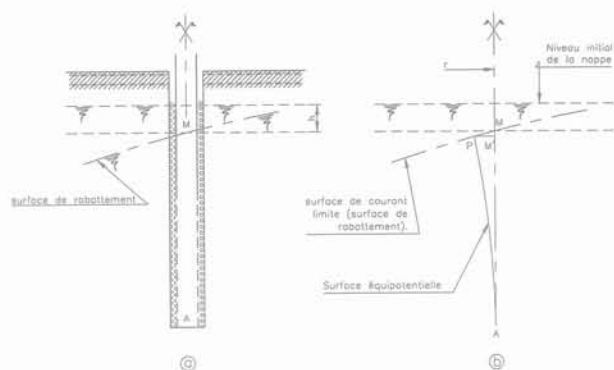


FIG. 13 Piézomètre en nappe libre pour un puits crépiné sur toute sa hauteur.
Piezometer in an unconfined aquifer for a well with an all length slotted casing.

4.2.2

Nappe libre

Dans le cas d'une nappe libre, si le puits est crépiné sur toute sa hauteur, on pourra crépiner les piézomètres également sur toute leur hauteur à condition que ceux-ci soient suffisamment éloignés du puits pour que la variation de la charge hydraulique au point M, intersection de l'axe du piézomètre et de la surface de

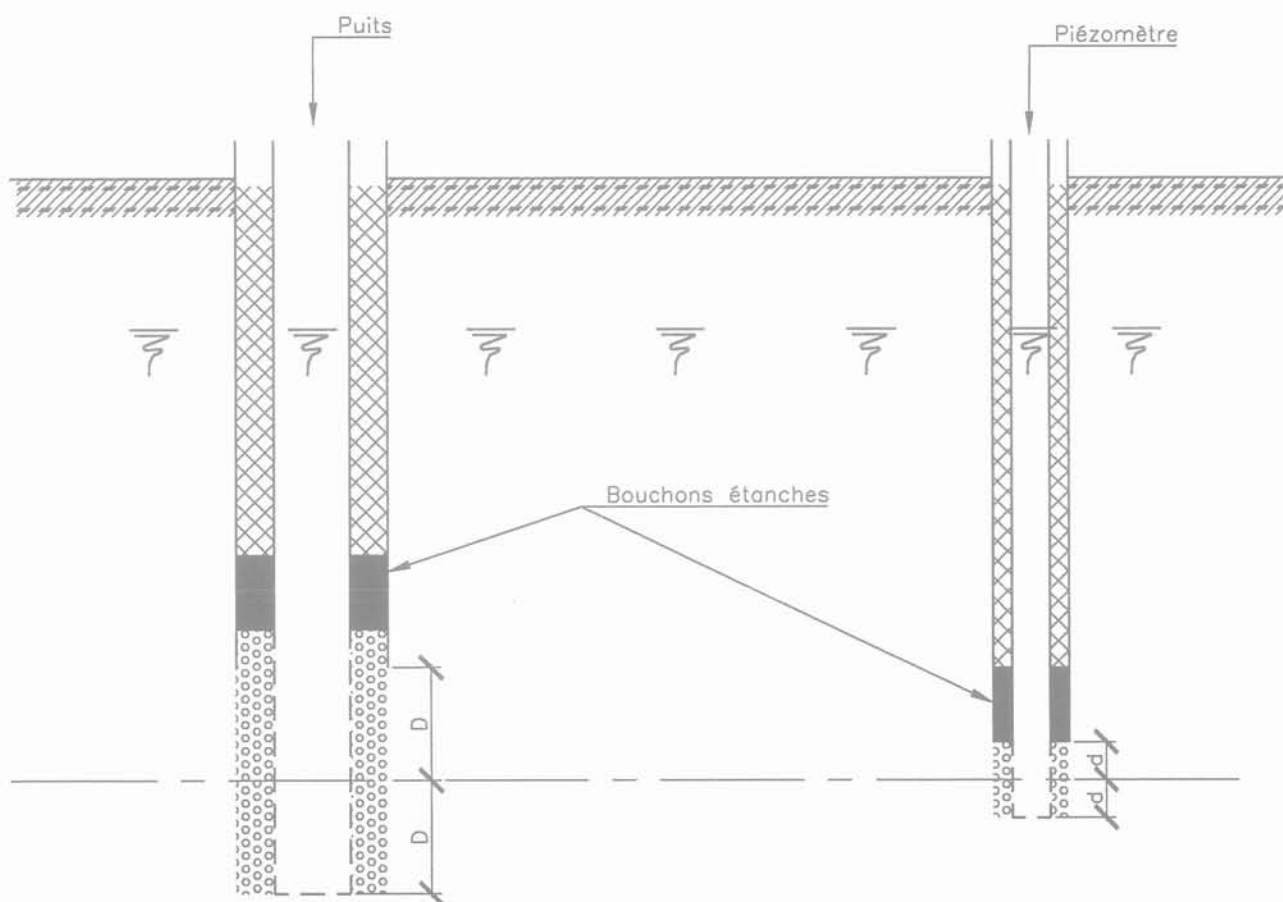


FIG. 14 Piézomètre en nappe libre pour un puits crépiné à sa base sur une hauteur de 2D.
Piezometer in an unconfined aquifer for a well with a 2D high slotted casing from its base.

rabattement, puisse être considérée comme égale à la hauteur de rabattement h mesurée dans le piézomètre, c'est-à-dire si, sur la figure 13-b, le petit segment MM' est négligeable devant h , ce qui revient à admettre que la variation du potentiel entre l'équipotentielle (PA) passant par le pied du piézomètre et l'équipotentielle passant par le point M, est négligeable par rapport à la variation de charge h .

En revanche, si le puits n'est crépiné que sur une hauteur 2D à partir de sa base, les piézomètres devront être crépinés uniquement à leur base et symétriquement par rapport au plan horizontal passant par le milieu de la crépine du puits, cette partie crépinée devant être hydrauliquement isolée du reste du forage (Fig. 14).

5

Récapitulation des procédures d'interprétation

Les procédures d'interprétation que nous avons développées dans la présente étude sont récapitulées dans les quatre tableaux ci-après.

TABEAU I Puits imparfait – Nappe en charge.

Essai de pompage	1) Substratum étanche infiniment profond	
	Puits isolé sans piézomètres	Puits avec piézomètres
Données du problème	D_1 et D_2 = fiches du puits dans l'aquifère B = diamètre du puits Q_1 et Q_2 = débits de pompage h_1 et h_2 = rabattements correspondants	D = fiche du puits dans l'aquifère B_0 = diamètre du puits r_1 et r_2 = distances des piézomètres à l'axe du puits $B_1 = 2r_1$ et $B_2 = 2r_2$ Q = débit de pompage h_1 et h_2 = rabattements dans piézomètres à r_1 et r_2
Calculs auxiliaires	$\lambda_1 = \frac{2D_1}{B}$ $\lambda_2 = \frac{2D_2}{B}$ $n = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{D_2}{D_1}$ $q = \frac{h_1 Q_2}{nh_2 Q_1}$ $*K = \frac{Q_1 \text{Argsh } \lambda_1}{\pi \lambda_1 h_1 B} = \frac{Q_2 \text{Argsh } \lambda_2}{\pi \lambda_2 h_2 B}$	$\lambda_1 = \frac{D}{r_1}$ et $\lambda_2 = \frac{D}{r_2}$ $n = \frac{r_2}{r_1}$ $*K = \frac{Q \text{Argsh } \lambda_1}{2\pi \lambda_1 h_1 r_1} = \frac{Q \text{Argsh } \lambda_2}{2\pi \lambda_2 h_2 r_2}$
Calcul de α et k_h	Résoudre numériquement $\frac{\text{Argsh } x}{\text{Argsh } (nx)} = q \rightarrow x$ $\alpha = \left(\frac{x}{\lambda_1} \right)^2 = \left(x \frac{B}{2D_1} \right)^2$ $\frac{k_h}{k} = \frac{\text{Argsh } (\lambda_1 \sqrt{\alpha})}{\text{Argsh } \lambda_1}$ $k_h = \frac{Q_1}{2\pi \lambda_1 h_1 B} \text{Argsh } (\lambda_1 \sqrt{\alpha})$ $i = 1 \text{ et } 2$	Résoudre numériquement $\frac{\text{Argsh } x}{\text{Argsh } (nx)} = \frac{h_2}{h_1} \rightarrow x$ $\alpha = \left(\frac{x}{\lambda_2} \right)^2 = \left(x \frac{r_2}{D} \right)^2$ $\frac{k_h}{k} = \frac{\text{Argsh } (\lambda_1 \sqrt{\alpha})}{\text{Argsh } \lambda_1}$ $k_h = \frac{Q}{2\pi h_1 D} \text{Argsh } (\lambda_1 \sqrt{\alpha})$ $i = 1 \text{ et } 2$

* En régime transitoire on calculera k_i selon la procédure de la norme NFP-94.132 – Essai Lefranc.

Nous donnons, par ailleurs en annexe, des tables numériques permettant la résolution des équations du type $q = f(n,x)$ qui interviennent dans la détermination de α .

6

Conclusion

Au terme de cette étude, il apparaît que l'essai de pompage est particulièrement bien adapté à l'étude de l'anisotropie dans le cas, d'ailleurs très fréquent, du puits imparfait pourvu que l'on dispose d'au moins deux piézomètres, ce qui n'est pas un inconvénient puisque la norme française NFP-94.130 en impose un minimum de trois. Ce sont alors les distances des piézomètres au puits qui réalisent *ipso facto* les variations dimensionnelles nécessaires, et un seul pompage sous débit constant est suffisant.

L'approche du coefficient d'anisotropie n'est donc finalement qu'une question d'interprétation un peu particulière des mesures, l'essai n'étant entravé par aucune contrainte particulière si ce n'est celle de réaliser de véritables piézomètres avec prises de pression

TABLEAU II Puits imparfait – Nappe en charge.

Essai de pompage	2) Les deux horizons étanches à distance finie	
	Puits isolé sans piézomètres	Puits avec piézomètres
Données du problème	H = épaisseur de l'aquifère D_1 et D_2 = fiches du puits dans l'aquifère B = diamètre du puits Q_1 et Q_2 = débits de pompage h_1 et h_2 = rabattements correspondants	H = épaisseur de l'aquifère D = fiche du puits dans l'aquifère r_1, r_2 et r_3 = distances des piézomètres au puits Q = débit de pompage h_1, h_2 et h_3 = rabattements dans les piézomètres à r_1, r_2 et r_3
Calculs auxiliaires	$\lambda_1 = \frac{2D_1}{B}, \lambda_2 = \frac{2D_2}{B}, \mu_1 = \frac{D_1}{H}, \mu_2 = \frac{D_2}{H}$ $n = \frac{D_2}{D_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} (D_2 > D_1)$ $q = \frac{h_1 Q_2}{n h_2 Q_1}$ $*k = \frac{Q_i [2\pi\mu_i + \text{Argsh} \lambda_i]}{2\pi h_i D_i}$	$\lambda_1 = \frac{D}{r_1}, \lambda_2 = \frac{D}{r_2}, n = \frac{r_2}{r_1}, \mu = \frac{D}{H}$ $\mu < 0,3 \rightarrow k = \frac{Q}{2\pi D h_i} [2\pi\mu + \text{Argsh} \lambda_i] \text{ avec } i = 1 \text{ et } 2$ $\mu > 0,3 \rightarrow \Phi(r_i) = \frac{1}{\mu} \text{Argsh} \lambda_i - \text{Argsh} \frac{\lambda_i}{\mu} \quad i = 1, 2, 3$ $**k = \frac{Q}{2\pi(h_1 - h_2)H} \left[\ln \frac{r_2}{r_1} + \Phi(r_2) - \Phi(r_1) \right]$
Calcul de α et k_h	Résoudre numériquement $q = \frac{2\pi\mu_1 + \text{Argsh} x}{2\pi n \mu_1 + \text{Argsh}(nx)}$ $\alpha = \left(\frac{x}{\lambda_1} \right)^2$ $\frac{k_h}{k} = \frac{2\pi\mu_i + \text{Argsh}(\lambda_i \sqrt{\alpha})}{2\pi\mu_i + \text{Argsh} \lambda_i}$ $k_h = \frac{Q_i}{2\pi h_i D_i} [2\pi\mu_i + \text{Argsh}(\lambda_i \sqrt{\alpha})]$ avec $i = 1$ et 2	* $\mu < 0,3$ Résoudre numériquement $\frac{h_2}{h_1} = \frac{2\pi\mu + \text{Argsh} x}{2\pi\mu + \text{Argsh} nx} \rightarrow x$ $\alpha = \left(\frac{x}{\lambda_2} \right)^2 = \left(x \frac{r_2}{D} \right)^2$ $\frac{k_h}{k} = \frac{2\pi\mu + \text{Argsh}(\lambda_i \sqrt{\alpha})}{2\pi\mu + \text{Argsh} \lambda_i} \text{ avec } i = 1 \text{ et } 2$ * $\mu > 0,3$ Résoudre numériquement en α $\frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_3} = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1} + \Phi\left(\frac{r_2}{\sqrt{\alpha}}\right) - \Phi\left(\frac{r_1}{\sqrt{\alpha}}\right)}{\ln \frac{r_3}{r_1} + \Phi\left(\frac{r_3}{\sqrt{\alpha}}\right) - \Phi\left(\frac{r_1}{\sqrt{\alpha}}\right)}$ $\frac{k_h}{k} = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1} + \Phi\left(\frac{r_2}{\sqrt{\alpha}}\right) - \Phi\left(\frac{r_1}{\sqrt{\alpha}}\right)}{\ln \frac{r_2}{r_1} + \Phi(r_2) - \Phi(r_1)}$ $k_h = \frac{Q}{2\pi(h_1 - h_2)H} \left[\ln \frac{r_2}{r_1} + \Phi\left(\frac{r_2}{\sqrt{\alpha}}\right) - \Phi\left(\frac{r_1}{\sqrt{\alpha}}\right) \right]$ $= \frac{Q}{2\pi(h_2 - h_3)H} \left[\ln \frac{r_3}{r_2} + \Phi\left(\frac{r_3}{\sqrt{\alpha}}\right) - \Phi\left(\frac{r_2}{\sqrt{\alpha}}\right) \right]$

* En régime transitoire, on calculera k selon la procédure de la norme NFP-94.132. – Essai Lefranc avec $\mu_i = \frac{\pi\lambda_i}{2\pi\mu_i + \text{Argsh} \lambda_i}$

** On vérifiera qu'on obtient des valeurs de k voisines en permutant les indices des h_i et r_i .

TABLEAU III Puits imparfait – Nappe libre.

Essai de pompage	2) Substratum étanche infiniment profond	
	Puits isolé sans piézomètres	Puits avec piézomètres
Données du problème	D_1 et D_2 = fiches du puits dans l'aquifère B = diamètre du puits Q_1 et Q_2 = débits de pompage h_1 et h_2 = rabattements correspondants dans le puits	D = fiche du puits dans l'aquifère B_0 = diamètre du puits r_1 et r_2 = distances des piézomètres à l'axe du puits telles que $r_2 > r_1$ Q = débit de pompage h_1 et h_2 = rabattements dans piézomètres à r_1 et r_2
Calculs auxiliaires	$\lambda_1 = \frac{2D_1}{B}$ $\lambda_2 = \frac{2D_2}{B}$ $n = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{D_2}{D_1}$ $q = \frac{h_1 Q_2}{nh_2 Q_1}$ $*k = \frac{Q_i \text{Argsh } \lambda_i}{\pi \lambda_i h_i B}$ où $i = 1$ et 2	$\lambda_1 = \frac{D}{r_1}$ $\lambda_2 = \frac{D}{r_2}$ $n = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{r_2}{r_1} > 1$ $*k = \frac{Q \text{Argsh } \lambda_i}{2\pi \lambda_i h_i r_i}$ avec $i = 0,1$ et 2 $(i = 0 \rightarrow \text{puits})$
Calcul de α et k_h	Résoudre numériquement $\frac{\text{Argsh } x}{\text{Argsh } (nx)} = q$ $\alpha = \left(\frac{x}{\lambda_1} \right)^2 = \left(x \frac{2D_1}{B} \right)^2$ $\frac{K_h}{k} = \frac{Q_i \text{Argsh } \lambda_i}{\pi \lambda_i h_i B}$ $k_h = \frac{Q_i}{2\pi h_i D} \text{Argsh}(\lambda_i \sqrt{\alpha})$ avec $i = 1$ et 2	Résoudre numériquement $\frac{\text{Argsh } x}{\text{Argsh } nx} = \frac{h_2}{h_1}$ $\alpha = \left(\frac{x}{\lambda_2} \right)^2 = \left(x \frac{r_2}{D} \right)^2$ $\frac{K_h}{k} = \frac{Q \text{Argsh } \lambda_i}{2\pi \lambda_i r_i}$ $k_h = \frac{Q}{2\pi h_i D} \text{Argsh}(\lambda_i \sqrt{\alpha})$ $i = 0,1$ et 2 $(i = 0 \rightarrow \text{puits})$

* En régime transitoire on calculera k selon la procédure de la norme NFP-94.132.

TABLEAU IV Puits imparfait – Nappe libre.

Essai de pompage	2) Substratum étanche à profondeur finie	
	Puits isolé sans piézomètres	Puits avec piézomètres
Données du problème	D_1 et D_2 = fiches du puits dans l'aquifère H_0 = épaisseur de l'aquifère B = diamètre du puits Q_1 et Q_2 = débits de pompage h_1 et h_2 = rabattements correspondants	D = fiche du puits dans l'aquifère B = diamètre du puits H_0 = épaisseur de l'aquifère Q = débit de pompage r_i = distances des piézomètres à l'axe du puits $(i = 1, 2 \text{ ou } 3)$ h_i = rabattements dans piézomètres à r_i $(i = 1, 2 \text{ ou } 3)$
Calculs auxiliaires	$\delta_1 = \frac{D_1}{10H_0} \quad \delta_2 = \frac{D_2}{10H_0}$ $n = \frac{D_2}{D_1} = \frac{\delta_2}{\delta_1} \quad q = \frac{h_1 Q_2}{n h_2 Q_1}$ $\beta = \frac{q[n\delta_1 + \ln(n)] - \delta_1}{1 - q}$ $*k = \frac{Q_i}{2\pi h_i D_i} \left[\delta_i + \ln\left(\frac{\pi D_i}{B}\right) \right]$	$\lambda_1 = \frac{D}{r_1}, \lambda_2 = \frac{D}{r_2}, n = \frac{r_2}{r_1}, \mu = \frac{D}{H}$ $\mu < 0,3 \rightarrow k = \frac{Q}{2\pi D h_i} \left[2\pi\mu + \text{Argsh} \lambda_i \right] \text{ avec } i = 1 \text{ et } 2$ $\mu > 0,3 \rightarrow \Phi(r_i) = \frac{1}{\mu} \text{Argsh} \lambda_i - \text{Argsh} \frac{\lambda_i}{\mu} \quad i = 1, 2, 3$ $**k = \frac{Q}{2\pi(h_1 - h_2)H} \left[\ln \frac{r_2}{r_1} + \Phi(r_2) - \Phi(r_1) \right]$
Calcul de α et k_h	$\ln x = \beta \rightarrow x = e^\beta$ $\alpha = \left(\frac{x B}{\pi D_i} \right)^2 = \left(\frac{B}{\pi D_i} \right)^2 e^{2\beta}$ $\frac{k_h}{k} = \frac{\delta_i + \ln\left(\frac{\pi D_i}{B} \sqrt{\alpha}\right)}{\delta_i + \ln\left(\frac{\pi D_i}{B}\right)}$ $k_h = \frac{Q}{2\pi h_i D_i} \left[\frac{D_i}{10H_0} + \ln\left(\frac{\pi D_i}{B} \sqrt{\alpha}\right) \right]$ avec $i = 1$ et 2	* $\mu < 0,3$ Résoudre numériquement $\frac{h_2}{h_1} = \frac{2\pi\mu + \text{Argsh} x}{2\pi\mu + \text{Argsh} n x} \rightarrow x$ $\alpha = \left(\frac{x}{\lambda_2} \right)^2 = \left(x \frac{r_2}{D} \right)^2$ $\frac{k_h}{k} = \frac{2\pi\mu + \text{Argsh}(\lambda_i \sqrt{\alpha})}{2\pi\mu + \text{Argsh} \lambda_i} \text{ avec } i = 1 \text{ et } 2$ * $\mu > 0,3$ Résoudre numériquement en α $\frac{h_1 - h_2}{h_1 - h_3} = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1} + \Phi\left(\frac{r_2}{\sqrt{\alpha}}\right) - \Phi\left(\frac{r_1}{\sqrt{\alpha}}\right)}{\ln \frac{r_3}{r_1} + \Phi\left(\frac{r_3}{\sqrt{\alpha}}\right) - \Phi\left(\frac{r_1}{\sqrt{\alpha}}\right)}$ $\frac{k_h}{k} = \frac{\ln \frac{r_2}{r_1} + \Phi\left(\frac{r_2}{\sqrt{\alpha}}\right) - \Phi\left(\frac{r_1}{\sqrt{\alpha}}\right)}{\ln \frac{r_2}{r_1} + \Phi(r_2) - \Phi(r_1)}$ $k_h = \frac{Q}{2\pi(h_1 - h_2)H_0} \left[\ln \frac{r_2}{r_1} + \Phi\left(\frac{r_2}{\sqrt{\alpha}}\right) - \Phi\left(\frac{r_1}{\sqrt{\alpha}}\right) \right]$ $= \frac{Q}{2\pi(h_2 - h_3)H_0} \left[\ln \frac{r_3}{r_2} + \Phi\left(\frac{r_3}{\sqrt{\alpha}}\right) - \Phi\left(\frac{r_2}{\sqrt{\alpha}}\right) \right]$

* En régime transitoire, on calculera k selon la méthode de la norme NFP-94.132. avec $m_i = \frac{\pi \lambda_i}{2\pi\mu_i + \text{Argsh} \lambda_i}$

** On vérifiera qu'on obtient des valeurs de k très voisines en permutant les indices des h_i et r_i .

localisées à la base des tubes piézométriques, hydrauliquement isolées du reste de la nappe, et disposées à une profondeur convenablement choisie. Aucune interprétation fiable n'est possible avec des piézomètres crépinés sur toute leur hauteur, sauf si ceux-ci sont suffisamment éloignés du puits et si le puits lui-même est entièrement crépiné.

Dans le cas d'un puits parfait, l'essai ne permet de déterminer que le coefficient de perméabilité horizontale. Pour obtenir le coefficient d'anisotropie, il faut se ramener au cas du puits imparfait en arrêtant le forage du puits avant qu'il n'atteigne le substratum et en procédant, à ce niveau intermédiaire, à un pompage spécifique.

Dans le cas extrêmement rare où aucun piézomètre n'est prévu, il faut réaliser le puits en deux phases au

moins avec pompage pour chacune d'elles, ce qui nous ramène au cas de l'essai Lefranc.

L'intérêt de l'utilisation d'un essai de pompage pour déterminer le coefficient d'anisotropie réside, comme nous l'avons dit en préambule, dans le fait que les résultats obtenus correspondent à une masse de sol importante et se trouvent, alors beaucoup plus représentatifs, à l'échelle d'un projet, que ceux provenant d'essais Lefranc.

Nous estimons donc que tout essai de pompage devrait être interprété selon les méthodes de la norme complétées par la méthode « anisotropique » que nous avons présentée, ce qui valoriserait considérablement les études hydrogéologiques.

Bibliographie

- [1] Cambefort H. – *Introduction à la géotechnique*. Paris, Eyrolles, 1971.
- [2] Cassan M. – « Filtration dans les cavités souterraines ». *Annales de l'ITBTP*, avril-mai 1979.
- [3] Cassan M. – *Les essais d'eau dans la reconnaissance des sols*. Paris, Eyrolles, 1980.
- [4] Cassan M. – *Aide-mémoire d'hydraulique souterraine*. Paris, Presses des Ponts et Chaussées, 1994, 2^e éd.
- [5] Cassan M. – « Application des essais Lefranc à l'évaluation du coefficient d'anisotropie hydraulique des sols aquifères ». *Revue française de géotechnique*, n° 90, 1^{er} trimestre 2000.
- [6] Mandel J. – « Note sur le calcul des filtrations ». *Annales des Ponts et Chaussées*, 1939.
- [7] Schneebeli G. – « La mesure *in situ* de la perméabilité d'un terrain ». Congrès de la Sté Hydrotechnique de France-Alger, 1954.
- [8] Schneebeli G. – *Hydraulique souterraine*. Eyrolles, 1966.

Annexe

Table numérique 1 $y(x,n) = \frac{\text{Argsh}x}{\text{Argsh}(nx)}$

x \ n	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
1,0	0,7376973	0,6105236	0,5350637	0,4846849	0,4483718	0,4207611	0,3689293	0,3811447
1,5	0,7707364	0,6570241	0,5879090	0,5407765	0,5061860	0,4794819	0,4580915	0,4404713
2,0	0,7938840	0,6891807	0,6242914	0,5793592	0,5459794	0,5199531	0,4989333	0,4814970
2,5	0,8105556	0,7123352	0,6505477	0,6072819	0,5748594	0,5494025	0,5287239	0,5114875
3,0	0,8230694	0,7297781	0,6704036	0,6284713	0,5968416	0,5718771	0,5515114	0,5344746
3,5	0,8328179	0,7434307	0,6860075	0,6451792	0,6142234	0,5896906	0,5696100	0,5527644
4,0	0,8406491	0,7544511	0,6986514	0,6587591	0,6283866	0,6042363	0,5844150	0,5677491
4,5	0,8470996	0,7635702	0,7091505	0,6700667	0,6402062	0,6163976	0,5968127	0,5803145
5,0	0,8525227	0,7712696	0,7180433	0,6796678	0,6502621	0,6267613	0,6073926	0,5910502
5,5	0,8571598	0,7778790	0,7256990	0,6879517	0,6589538	0,6357321	0,6165619	0,6003645
6,0	0,8611813	0,7836314	0,7323796	0,6951949	0,6665657	0,6435989	0,6246116	0,6085494
6,5	0,8647108	0,7886969	0,7382762	0,7015997	0,6733063	0,6505734	0,6137555	0,6158195
7,0	0,8678404	0,7932019	0,7435319	0,7073178	0,6793320	0,6568150	0,6381545	0,6223365
7,5	0,8706399	0,7972430	0,7482557	0,7124650	0,6847627	0,6624458	0,6439321	0,6282249
8,0	0,8731634	0,8008952	0,7525327	0,7171318	0,6896919	0,6675613	0,6491849	0,6335820
8,5	0,8754535	0,8042175	0,7564300	0,7213897	0,6941939	0,6722373	0,6539898	0,6384853
9,0	0,8775443	0,8072573	0,7600014	0,7252963	0,6983283	0,6765348	0,6584087	0,6429971
9,5	0,8794631	0,8100529	0,7632908	0,7288983	0,7021437	0,6805036	0,6624921	0,6471686
10,0	0,8812324	0,8126358	0,7663341	0,7322343	0,7056802	0,6841848	0,6662817	0,6510417
15,0	0,8936610	0,8309208	0,7879967	0,7560794	0,7310420	0,7106555	0,6935939	0,6790110
20,0	0,9010609	0,8419329	0,8011482	0,7706437	0,7466072	0,7269653	0,7104781	0,6963506
25,0	0,9061430	0,8495534	0,8102976	0,7808168	0,7575141	0,7384239	0,7223663	0,7085827
30,0	0,9099296	0,8552626	0,8171790	0,7884906	0,7657607	0,7471044	0,7313868	0,7178770
35,0	0,9129035	0,8597659	0,8226231	0,7945756	0,7723118	0,7540103	0,7385725	0,7252888
40,0	0,9153268	0,8634481	0,8270856	0,7995726	0,7776995	0,7596969	0,7444954	0,7314035
45,0	0,9173559	0,8665403	0,8308407	0,8037840	0,7822457	0,7645001	0,7495025	0,7365767
50,0	0,9190909	0,8691907	0,8340649	0,8074048	0,7861585	0,7686377	0,7538189	0,7410390
55,0	0,9205992	0,8714997	0,8368780	0,8105674	0,7895793	0,7722578	0,7575979	0,7449479
60,0	0,9219281	0,8735379	0,8393644	0,8133657	0,7926084	0,7754654	0,7609483	0,7484152
65,0	0,9231120	0,8753568	0,8415859	0,8158680	0,7953192	0,7783377	0,7639498	0,7515227
70,0	0,9241768	0,8769950	0,8435888	0,8181259	0,7977667	0,7809324	0,7666625	0,7543324
75,0	0,9251419	0,8784820	0,8454085	0,8201789	0,7999933	0,7832941	0,7691326	0,7568917
80,0	0,9260228	0,8798408	0,8470730	0,8220578	0,8020324	0,7854579	0,7713965	0,7592381
85,0	0,9268317	0,8810900	0,8486042	0,8237875	0,8039104	0,7874514	0,7734831	0,7614013
90,0	0,9275783	0,8822442	0,8500201	0,8253879	0,8056487	0,7892974	0,7754159	0,7634057
95,0	0,9282707	0,8833156	0,8513354	0,8268752	0,8072649	0,7910144	0,7772140	0,7652709
100,0	0,9289155	0,8843141	0,8525620	0,8282630	0,8087736	0,7926176	0,7788935	0,7670135

Table numérique 1 (suite)

x \ n	6	7	8	9	10	12	14	16
1,0	0,3537125	0,3333333	0,3174437	0,3046016	0,2939653	0,2771802	0,2644006	0,2542391
1,5	0,4129208	0,3921393	0,3757371	0,3623563	0,3511627	0,3333333	0,3196061	0,3085940
2,0	0,4540041	0,4330719	0,4164280	0,4027675	0,3912817	0,3728749	0,3586075	0,3471006
2,5	0,4841513	0,4632046	0,4464641	0,4326671	0,4210259	0,4022914	0,3877025	0,3758928
3,0	0,5073380	0,4864451	0,4696844	0,4558279	0,4441060	0,4251827	0,4103957	0,3983928
3,5	0,5258417	0,5050362	0,4882964	0,4744236	0,4626641	0,4436332	0,4287219	0,4165917
4,0	0,5410408	0,5203388	0,5036423	0,4897783	0,4780067	0,4589183	0,4439287	0,4317133
4,5	0,5538147	0,5332227	0,5165818	0,5027413	0,4909735	0,4718593	0,4568218	0,4445491
5,0	0,5647501	0,5442697	0,5276910	0,5138828	0,5021287	0,4830097	0,4679445	0,4556338
5,5	0,5742543	0,5538843	0,5373707	0,5236002	0,5118662	0,4927562	0,4776775	0,4653421
6,0	0,5826191	0,5623568	0,5459094	0,5321795	0,5204696	0,5013781	0,4862959	0,4739456
6,5	0,5900596	0,5699016	0,5535201	0,5398323	0,5281490	0,5090826	0,4940039	0,4816459
7,0	0,5967379	0,5766804	0,5603638	0,5467188	0,5350637	0,5160267	0,5009569	0,4885964
7,5	0,6027790	0,5828181	0,5665651	0,5529629	0,5413368	0,5223323	0,5072750	0,4949161
8,0	0,6082810	0,5884129	0,5722218	0,5586619	0,5470652	0,5280952	0,5130532	0,5006990
8,5	0,6133218	0,5935427	0,5774117	0,5638936	0,5523263	0,5333920	0,5183674	0,5060202
9,0	0,6179645	0,5982708	0,5821981	0,5687209	0,5571829	0,5382851	0,5232793	0,5109408
9,5	0,6222606	0,6026489	0,5866326	0,5731954	0,5616864	0,5428255	0,5278395	0,5155112
10,0	0,6262527	0,6067197	0,5907581	0,5773599	0,5658794	0,5470555	0,5320902	0,5197731
15,0	0,6551733	0,6362865	0,6207845	0,6077245	0,5964989	0,5780228	0,5632715	0,5510888
20,0	0,6731865	0,6547708	0,6396138	0,6268151	0,6157927	0,5976076	0,5830498	0,5710006
25,0	0,6859334	0,6678836	0,6529987	0,6404094	0,6295522	0,6116092	0,5972178	0,5852878
30,0	0,6956413	0,6778884	0,6632266	0,6508106	0,6400915	0,6223537	0,6081059	0,5962810
35,0	0,7033967	0,6859925	0,6714190	0,6591502	0,6485492	0,6309884	0,6168662	0,6051343
40,0	0,7098043	0,6925133	0,6782021	0,6660608	0,6555627	0,6381571	0,6241461	0,6124973
45,0	0,7152319	0,6981270	0,6839580	0,6719291	0,6615218	0,6442542	0,6303427	0,6187687
50,0	0,7199185	0,7029785	0,6889359	0,6770071	0,6666810	0,6495374	0,6357158	0,6242099
55,0	0,7240277	0,7072353	0,6933062	0,6814676	0,6712150	0,6541836	0,6404440	0,6290003
60,0	0,7276755	0,7110165	0,6971905	0,6854338	0,6752481	0,6583194	0,6446549	0,6332685
65,0	0,7309472	0,7144100	0,7006780	0,6889963	0,6788720	0,6620377	0,6484425	0,6371093
70,0	0,7339072	0,7174817	0,7038362	0,6922237	0,6821560	0,6654091	0,6518782	0,6405944
75,0	0,7366051	0,7202827	0,7067172	0,6951688	0,6851536	0,6684880	0,6550171	0,6437794
80,0	0,7390799	0,7228531	0,7093620	0,6978733	0,6879071	0,6713173	0,6579026	0,6467082
85,0	0,7413626	0,7252251	0,7118034	0,7003705	0,6904501	0,6739315	0,6605995	0,6494160
90,0	0,7434786	0,7274246	0,7140681	0,7026874	0,6928101	0,6763584	0,6630462	0,6519312
95,0	0,7454486	0,7294730	0,7161777	0,7048464	0,6950097	0,6786211	0,6653560	0,6542774
100,0	0,7472898	0,7313881	0,7181506	0,7068658	0,6970675	0,6807388	0,6675182	0,6564743

Table numérique 2 $\frac{k_h}{k} = \frac{\text{Argsh}(\lambda \sqrt{\alpha})}{\text{Argsh} \lambda}$

$\lambda \backslash \alpha$	1,5	2	2,5	3	3,5	4	5	10
5	1,61107	1,52621	1,47038	1,43089	1,40136	1,37836	1,34460	1,26773
10	1,89229	1,76206	1,67840	1,61996	1,57664	1,54307	1,49404	1,38324
15	2,05896	1,90108	1,80067	1,73095	1,67943	1,63961	1,58157	1,45083
20	2,17783	2,00000	1,88759	1,80979	1,75243	1,70815	1,64370	1,49880
25	2,27030	2,07686	1,95508	1,87100	1,80909	1,76134	1,69190	1,53600
30	2,34598	2,13972	2,01026	1,92103	1,85540	1,80481	1,73130	1,56640
35	2,41006	2,19290	2,05694	1,96334	1,89456	1,84157	1,76461	1,59210
40	2,46561	2,23900	2,09738	2,00000	1,92848	1,87342	1,79346	1,61437
45	2,51464	2,27967	2,13307	2,03234	1,95841	1,90151	1,81892	1,63401
50	2,55853	2,31606	2,16500	2,06128	1,98519	1,92664	1,84169	1,65158
55	2,59825	2,34900	2,19388	2,08746	2,00941	1,94938	1,82229	1,66747
60	2,63452	2,37907	2,22026	2,11136	2,03153	1,97014	1,88110	1,68198
65	2,66790	2,40674	2,24452	2,13335	2,05188	1,98923	1,89840	1,69533
70	2,69881	2,43235	2,26699	2,15371	2,07072	2,00692	1,91442	1,70768
75	2,72760	2,45621	2,28791	2,17266	2,08826	2,02338	1,92933	1,71919
80	2,75453	2,47853	2,30748	2,19040	2,10466	2,03878	1,94328	1,72995
85	2,77983	2,49949	2,32586	2,20706	2,12008	2,05324	1,95639	1,74006
90	2,80369	2,51926	2,34320	2,22276	2,13461	2,06688	1,96874	1,74959
95	2,82627	2,53796	2,35959	2,23762	2,14835	2,07978	1,98043	1,75861
100,0	2,84768	2,55570	2,37515	2,25171	2,16140	2,09202	1,99152	1,76716