

Calcul en éléments finis des déformations des sols non saturés : équations et exemples

M. WONE
J.-P. MAGNAN

Laboratoire Central
des Ponts et Chaussées
58, boulevard Lefebvre
75732 Paris Cedex 15

Résumé

Cet article présente un modèle numérique en éléments finis construit sur la base des équations de la consolidation des sols élastoplastiques non saturés. Ce modèle a été programmé dans le code de calcul CESAR-LCPC.

Les équations du modèle tiennent compte de l'interaction des déformations du squelette, des écoulements de l'eau et de l'air ainsi que des mouvements de l'air dissous dans l'eau. La résolution numérique de ces équations associe la méthode des éléments finis pour discrétiser l'espace et un schéma d'intégration implicite pour discrétiser le temps. Les déformations du squelette sont décrites selon l'approche des variables indépendantes.

Deux applications sont décrites, à un tube épais en condition axisymétrique et à un massif de sol en déformation plane.

Finite element analysis of the deformations of unsaturated soils : equations and exemples

Abstract

This paper describes a finite element numerical model derived from the basic equations of elastoplasticity and consolidation of unsaturated soils. The model was implemented in the finite element program CESAR-LCPC.

The equations of the model account for the interaction of the deformation of the soil skeleton, of the flow of water and air and of the movement of the air dissolved in the pore water. The numerical solution of these equations is based on the finite element method for space discretisation and on an implicit method for time discretisation. The deformations of the soil skeleton are described within the framework of the independent variable approach.

Two applications of this model to an axisymmetric problem (thick tube) and to a plane strain problem (2-D consolidation of a soil mass) are presented.

Introduction

La modélisation du comportement mécanique des sols non saturés ne fait pas l'objet d'un consensus parmi les spécialistes de la géotechnique. L'extension de la notion de contraintes effectives, telle qu'elle a été proposée par Bishop (1961) pour servir de cadre à la description des sols, a fait l'objet de différentes critiques, souvent étayées par des résultats expérimentaux obtenus en laboratoire (Jennings et Burland, 1962 ; Matyas et Radakrishna, 1968 ; Fredlund et Morgenstern, 1976). D'autres approches, comme celles d'Alonso *et al.* (1988, 1990), ou de Fredlund (1989) semblent apporter une réponse plus complète et mieux décrire la réalité par une modélisation physique avec deux champs de contraintes indépendants.

Différents modèles théoriques et numériques basés sur les modèles physiques en contraintes effectives ou en variables indépendantes sont apparus depuis une dizaine d'années, comme ceux d'Alonso *et al.* (1988), de Nanda (1989), de Gens *et al.* (1995) et de Gatmiri *et al.* (1995).

L'étude présentée dans cet article a été réalisée au moyen du codé de calcul en éléments finis CESAR-LCPC et a cherché à appliquer à la programmation des équations des sols non saturés la même démarche systématique que pour les calculs relatifs aux sols saturés. Pour décrire le comportement des sols non saturés, nous avons utilisé une formulation couplée et un comportement élastoplastique avec écrouissage du squelette du sol, qui permet de prendre en compte l'irréversibilité des déformations.

Cet article rappelle les équations qui représentent le comportement élémentaire des sols non saturés, décrit les étapes de leur transformation en équations matricielles adaptées à leur résolution par la méthode des éléments finis, puis présente quelques résultats de calcul.

Hypothèses et définitions

La représentation mécanique que nous avons adoptée pour la modélisation numérique des sols non saturés repose sur la superposition de trois milieux continus, qui couvrent chacun l'ensemble de l'espace occupé par le sol :

- le milieu global (sans distinguer de phases : on admet que les modifications de la composition de ce milieu triphasé par suite des mouvements de l'eau et de l'air ont un effet négligeable sur ses propriétés physiques et mécaniques, c'est-à-dire que l'on peut définir une loi de comportement à partir de son état initial) ;
- le milieu continu « air » et le milieu continu « eau » (ces deux milieux peuvent se déplacer l'un par rapport à l'autre à l'intérieur du milieu global et en sortir ou y entrer).

Champs de contraintes

Trois champs de contraintes sont définis respectivement dans le milieu global, l'eau et l'air : la contrainte totale σ , la pression de l'eau p_w et la pression de l'air p_a .

Les conventions de signe utilisées dans les équations sont des conventions « mixtes » : contraintes totales négatives en compression, pressions d'eau et d'air positives en compression.

Pour le calcul, les pressions d'eau et d'air sont remplacées par les charges d'eau h_w et d'air h_a définies, selon les habitudes de la mécanique des sols, par :

$$h_w = \frac{P_w}{\gamma_w} + z \quad \text{et} \quad h_a = \frac{P_a}{\gamma_a} + z$$

avec :

γ_w : poids volumique de l'eau ;

γ_a : poids volumique de l'air ;

z : altitude par rapport à un repère fixe.

Le champ de contraintes du milieu global dépend directement de la pesanteur et des conditions aux limites et, indirectement, de la loi de comportement et des autres conditions aux limites. Le champ associé à la pression de l'eau (respectivement, à la pression de l'air) dépend directement de la pesanteur et des conditions aux limites sur la charge d'eau (respectivement, la charge de l'air) et, indirectement, de la loi de comportement du matériau global et des autres conditions aux limites.

Champs de déplacements et de déformations

Trois champs de déplacements, auxquels sont associés trois champs de déformations, sont utilisés pour décrire l'état du sol non saturé :

- un champ de déplacements associé au milieu continu global ou « champ principal », noté \bar{u} ;
- un champ de déplacements associé à l'eau, noté \bar{u}_w ;
- un champ de déplacements associé à l'air, noté \bar{u}_a .

Au champ de déplacements principal \bar{u} est associé le champ de déformations totales du milieu global ϵ . Le champ de déplacements associé à l'eau est utilisé sous la forme du vecteur des vitesses moyennes d'écoulement de l'eau \bar{v}_w et sous la forme d'un scalaire égal au flux d'eau sortant d'un volume unitaire, $\text{div } \bar{v}_w$ (et de même pour les déplacements associés à l'air : \bar{v}_a et $\text{div } \bar{v}_a$).

Les déformations totales ϵ sont négatives en contraction, et les flux sont positifs quand ils sortent du volume élémentaire.

Comportement mécanique

On suppose que les déformations du milieu peuvent être induites par une variation de la contrainte totale ($\sigma + p_a$) et/ou de la succion ($p_a - p_w$), considérées comme variables indépendantes. La loi de comportement est de type élastoplastique avec écrouissage. Elle est décrite dans cet article avec les équations proposées par Alonso *et al.* (1990), mais peut être transformée aisément pour accueillir d'autres formes de lois élastoplastiques avec ou sans écrouissage.

Les contraintes et les déformations doivent satisfaire simultanément les équations d'équilibre et la loi de comportement.

3.1

Équations d'équilibre

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0$$

avec :

σ_{ij} : tenseur des contraintes totales ;

F_i : forces volumiques.

3.2

Loi de comportement du milieu global
(Alonso *et al.*, 1990)

Cette loi de comportement est écrite sous la forme incrémentale :

$$d\sigma_{ij} = D_{epkl}^{ij} d\epsilon_{kl} + (F_e - 1) dp_a \delta_{ij} + F_e dp_w \delta_{ij}$$

avec :

D_{ep} : matrice de souplesse du milieu global relative aux variations de $\sigma_{ij} + p_a \delta_{ij}$;

$d\epsilon_{kl}$: incrément du tenseur des déformations (du milieu global) ;

$F_e = D_{ep} D_s$;

D_s : matrice de souplesse du milieu global relative aux variations de $(p_a - p_w)$;

δ_{ij} : symbole de Kronecker ;

dp_a : incrément de pression d'air ;

dp_w : incrément de pression d'eau.

4

Écoulements de l'eau et de l'air
dans le milieu poreux

L'eau et l'air se déplacent dans l'espace occupé par le milieu global en respectant, d'une part, des lois de conservation de la masse et, d'autre part, des lois reliant les vitesses moyennes d'écoulement aux gradients de charge (loi de Darcy pour chaque phase). Ces vitesses moyennes désignent les vitesses relatives des fluides par rapport au solide, comme si tout l'espace (solide+pores) leur était offert.

4.1

Équation de conservation de la masse d'eau

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_w n S_r) + \text{div}(\rho_w \bar{v}_w) = 0$$

avec :

ρ_w : masse volumique de l'eau ;

n : porosité du massif ;

\bar{v}_w : vitesse moyenne d'écoulement de l'eau ;

S_r : degré de saturation en eau, qui dépend des pressions d'eau et d'air et de $\underline{\sigma}$. On a adopté pour décrire cette dépendance la relation utilisée par Matyas et Radakrishna (1968) et reprise par Alonso *et al.* (1988) :

$$S_r = S_{r0} - \left[a_s + b_s (\sigma_{ij} + p_a \delta_{ij}) \right] \left\{ 1 - \exp \left[-c_s (p_a - p_w) \right] \right\}$$

avec :

S_{r0} : degré de saturation initial ;

a_s, b_s, c_s : constantes.

4.2

Équation de conservation de la masse d'air

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho_a n (1 - S_r + H S_r)] + \text{div}[\rho_a (\bar{v}_a + H \bar{v}_w)] = 0$$

avec :

ρ_a : masse volumique de l'air ;

H : coefficient de solubilité de l'air dans l'eau ou coefficient de Henry ($H = 0,02$) ;

\bar{v}_a : vitesse moyenne d'écoulement de l'air.

4.3

Loi de Darcy pour l'eau

La loi de Darcy s'écrit :

$$\bar{v}_w = -\underline{k}_w \text{grad } h_w$$

avec :

h_w : charge hydraulique ;

\underline{k}_w : tenseur des coefficients de perméabilité à l'eau (les coefficients de perméabilité dépendent de façon générale de l'indice des vides ou de la porosité, du degré de saturation, de la température et de la nature du fluide).

La fonction adoptée pour décrire les variations des coefficients de perméabilité à l'eau est la même que celle utilisée par Alonso *et al.* (1988), Nanda (1989) et Abida (1992) :

$$k_w = a 10^{ae} \left[\frac{S_r - S_{ru}}{1 - S_{ru}} \right]^3$$

avec :

a, α : constantes ;

e : indice des vides ;

S_r : degré de saturation ;

S_{ru} : degré de saturation résiduel.

4.4

Loi de Darcy pour l'air

On admet que l'écoulement de l'air est également régi par la loi de Darcy (Yoshimi, 1969) :

$$\bar{v}_a = -\underline{k}_a \text{grad } h_a$$

avec : \underline{k}_a : tenseur des coefficients de perméabilité à l'air.

La fonction décrivant les variations des coefficients de perméabilité à l'air est celle utilisée par Alonso *et al.* (1988), Nanda (1989) et Abida (1992) :

$$k_a = b \frac{\gamma_a}{\mu_a} \left[e(1 - S_r) \right]^c$$

avec :

b, c : constantes adimensionnelles ;

γ_a : poids volumique de l'air ;

μ_a : viscosité de l'air ;

e : indice des vides.

Conditions aux limites

Les conditions aux limites imposées aux inconnues (déplacements et pressions) sont des déplacements ou forces imposés au milieu global, des flux ou des charges d'eau imposés pour l'eau et des flux ou des charges d'air imposés pour l'air.

Conditions initiales

Dans les calculs de comportement des milieux poreux non saturés, il est souvent difficile d'imaginer l'état initial. En effet, les distributions des contraintes totales, des charges d'eau et des charges d'air doivent être en équilibre compte tenu de la répartition des phases dans l'espace (indice des vides et degré de saturation), si l'on veut que les résultats des calculs ne combinent pas l'effet de l'évolution spontanée de l'état initial et l'effet du chargement.

Pour définir un état initial en équilibre, nous avons appliqué une procédure qui consiste à calculer l'état initial de la manière suivante :

– on effectue à partir d'un état initial estimé mais pas nécessairement en équilibre un premier calcul avec pour seul chargement mécanique le poids du massif de sol, jusqu'à stabilisation des charges d'eau et d'air et des contraintes ;

– on prend les résultats de ce calcul comme état initial des calculs ultérieurs en annulant les déplacements.

Choix d'un principe variationnel

Le passage des équations précédentes à une formulation variationnelle permettant d'associer la solution cherchée (un état d'équilibre local) à un extrémum d'une fonctionnelle (minimum ou maximum) n'est pas une opération classique dans le cas des milieux triphasiques.

La procédure que nous avons adoptée comporte deux étapes :

• Dans la première étape, on fige l'état des fluides et on se préoccupe de trouver l'état d'équilibre du milieu global en minimisant son énergie potentielle, c'est-à-dire que l'on écrit un « principe des travaux virtuels » dans lequel le travail interne (déduit de la loi de comportement) est équilibré par le travail des forces externes (forces de pesanteur et forces de surfaces, c'est-à-dire pressions totales) :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} F_i \delta u_i d\Omega - \int_{S_{\sigma}} T_i \delta u_i dS_{\sigma} = 0$$

Cette intégrale correspond au travail de la contrainte totale. Le champ de contrainte σ est défini sur le milieu global et correspond à ϵ .

• Dans la seconde étape, on s'occupe des équations d'écoulement et on écrit des équations correspondant aux bilans globaux des mouvements des masses fluides (eau et air) présentes dans le sol, compte tenu de l'écoulement, de la compressibilité des fluides, des variations du degré de saturation et des variations des volumes des pores :

– pour l'eau :

$$\int_{\Omega} a_w n S_r \dot{p}_w \delta p_w d\Omega + \int_{\Omega} \rho_w n \dot{S}_r \delta p_w d\Omega - \int_{\Omega} \rho_w S_r \delta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \delta p_w d\Omega - \int_{\Omega} \text{div} \left[\rho_w k_w \text{grad} \left(\frac{P_w}{\gamma_w} + z \right) \right] \delta p_w d\Omega + \int_{S_{\phi_w}} \phi_w \delta p_w dS_{\phi_w} = 0$$

– pour l'air :

$$\int_{\Omega} a_a n (1 - S_r + H S_r) \dot{p}_a \delta p_a d\Omega + \int_{\Omega} \rho_a n (H - 1) \dot{S}_r \delta p_a d\Omega + \int_{\Omega} \rho_a (1 - S_r + H S_r) \delta_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \delta p_a d\Omega - \int_{\Omega} \text{div} \left[\rho_a k_a \text{grad} \left(\frac{P_a}{\gamma_a} + z \right) \right] \delta p_a d\Omega - \int_{\Omega} \text{div} \left[\sigma_a H k_w \text{grad} \left(\frac{P_w}{\gamma_w} + z \right) \right] \delta p_a d\Omega + \int_{S_{\phi_a}} \phi_a dS_{\phi_a} = 0$$

Le couplage entre le solide et l'eau est assuré par la présence de la pression d'eau dans la première intégrale et de la variation du volume du sol dans la deuxième intégrale. Le couplage entre le solide et l'air est assuré par la présence de la pression d'air dans la première intégrale et de la variation du volume du sol dans la dernière intégrale. Le couplage entre l'eau et l'air est assuré par la présence du coefficient de solubilité de l'air dans la dernière intégrale.

L'application du principe variationnel choisi à l'analyse du comportement au cours du temps des massifs de sols élastoplastiques non saturés donne le système d'équations suivant, que l'on doit résoudre dans le domaine fixe Ω :

$$dF = \int_{\Omega} D_e \epsilon_{ij} \delta \epsilon_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \gamma_a (F_e - 1) h_a \delta \epsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \gamma_w F_e h_w \delta \epsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} F_i \delta u_i d\Omega - \int_{S_{\sigma}} T_i \delta u_i dS_{\sigma} - \int_{\Omega} (F_e - 1) \gamma_a z \delta \epsilon_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} F_e \gamma_w z \delta \epsilon_{ij} d\Omega = 0$$

$$dF_w = \int_{\Omega} \gamma_w \left(n g_1 m_1^T D_e + S_r \delta_{ij} \right) \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} \delta h_w d\Omega - \int_{\Omega} n \gamma_w^2 \left(g_2 + g_1 F_e \right) \frac{\partial h_w}{\partial t} \delta h_w d\Omega + \int_{\Omega} n \gamma_w \gamma_w \left(g_2 + g_1 F_e \right) \frac{\partial h_w}{\partial t} \delta h_w d\Omega + \int_{\Omega} k_w h_{w,j} \gamma_w \delta h_{w,j} d\Omega + \int_{S_{V_w}} \gamma_w \phi_w \delta h_w dS_{V_w} = 0$$

$$dF_a = \int_{\Omega} \gamma_a \rho_a \left[n (H - 1) m_1^T g_1 D_e + (1 - S_r + H S_r) \right] \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} \delta h_a d\Omega - \int_{\Omega} \gamma_a \gamma_w \left[\rho_a n (H - 1) g_1 F_e + \rho_a n (H - 1) g_2 \right] \frac{\partial h_w}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} \gamma_a^2 \rho_a n (H - 1) g_1 F_e \frac{\partial h_a}{\partial t} \delta h_a d\Omega + \int_{\Omega} \gamma_a^2 \rho_a n (H - 1) g_2 \frac{\partial h_a}{\partial t} \delta h_a d\Omega + \int_{\Omega} \gamma_a^2 C_a n (1 - S_r + H S_r) \frac{\partial h_a}{\partial t} \delta h_a d\Omega + \int_{\Omega} \gamma_a k_a h_{a,j} \delta h_{a,j} d\Omega + \int_{\Omega} \gamma_a H k_w h_{w,j} \delta h_{a,j} d\Omega + \int_{S_{V_a}} \gamma_a \phi_a \delta h_a dS_{V_a} = 0$$

et auquel il faut ajouter les conditions aux limites et les conditions initiales.

Les notations utilisées sont les suivantes :

dF : fonctionnelle associée aux déformations du squelette ;

dF_w : fonctionnelle associée à l'écoulement de l'eau ;

dF_a : fonctionnelle associée à l'écoulement de l'air ;

D_e : matrice de souplesse du milieu global relative aux variations de $\sigma_{ij} + p_a \delta_{ij}$;

ϵ_{ij} : tenseur des déformations du milieu global ;

- γ_a : poids volumique de l'air (kN/m³) ;
- γ_w : poids volumique de l'eau (kN/m³) ;
- $F_e = D_e D_s$;
- D_s : matrice de souplesse du milieu global relative aux variations de $p_a - p_w$;
- h_a : charge d'air (m) ;
- h_w : charge d'eau (m) ;
- F_1 : forces volumiques (kN/m³) ;
- T_1 : forces surfaciques (kPa) ;
- z : cote du point courant (m) ;
- ρ_a : masse volumique de l'air (kg/m³) ;
- n : porosité du sol ;
- H : coefficient de Henry ($H = 0,02$) ;
- $m_1^T = [0 \ 1 \ 0]$;
- g_1 : dérivée de la fonction de saturation par rapport à $\sigma_j + p_a \delta_{ij}$ (kPa⁻¹) ;
- g_2 : dérivée de la fonction de saturation par rapport à $p_a - p_w$ (kPa⁻¹) ;
- S_r : degré de saturation ;
- C_a : compressibilité de l'air (kPa⁻¹) ;
- k_a : coefficient de perméabilité à l'air (m/s) ;
- k_w : coefficient de perméabilité à l'eau (m/s).

8

Méthode de résolution numérique

L'application du principe variationnel aux équations et la discrétisation dans l'espace (éléments finis) et dans le temps (méthode implicite) conduisent au système matriciel suivant :

$$[K_H(U^j)] \{\Delta U^{j+1}\} = [K_M(U^j)] \{U_{t-1}^j\} + \{F^j(t + \Delta t)\} + \{F_{\Delta\sigma}^j(t)\} - F_{\sigma_{t-1}}$$

avec :

$$K_H = \begin{bmatrix} R & -C_{uw} & C_{ua} \\ C_{wu} & -C_{ww} + \Delta t K_w & C_{wa} \\ C_{au} & -C_{aw} + \Delta t K_{wa} & E_a + \Delta t K_a \end{bmatrix} \quad \Delta U = \begin{Bmatrix} \Delta U \\ \Delta H_w \\ \Delta H_a \end{Bmatrix}$$

$$K_M = \begin{bmatrix} 0 & C_{uw} & -C_{ua} \\ 0 & -\Delta t K_w & 0 \\ 0 & -\Delta t K_{wa} & -\Delta t K_a \end{bmatrix} \quad U = \begin{Bmatrix} U \\ H_w \\ H_a \end{Bmatrix}$$

$$F(t + \Delta t) = \begin{Bmatrix} F(t + \Delta t) \\ Q_w(t + \Delta t) \\ Q_a(t + \Delta t) \end{Bmatrix} \quad F_\sigma(t) = \begin{Bmatrix} F_\sigma(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad F_{\Delta\sigma}(t) = \begin{Bmatrix} F_{\Delta\sigma}(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Dans la méthode de résolution décrite ici, le schéma numérique implicite, plus stable numériquement, a été choisi en raison du caractère non linéaire du problème.

La résolution du problème est réalisée par un procédé itératif. A chaque itération on cherche les valeurs des inconnues principales, des inconnues secondaires, du résidu et du paramètre d'écroûissage de telle façon que, pour j (nombre d'itérations) tendant vers l'infini, les champs de valeurs des inconnues soient solution du problème complet. Si l'on admet la solution connue à l'itération $j - 1$, la détermination des inconnues principales, des inconnues secondaires, du résidu et des paramètres d'écroûissage s'effectue en deux étapes.

8.1

Première étape

On détermine les inconnues principales (déplacements u et v , charges d'eau et d'air) et secondaires (contraintes et vitesses d'écoulement de l'eau et de l'air) solutions du problème linéaire statiquement et cinématiquement admissibles, de sorte que les contraintes et les déformations soient reliées par la loi de comportement élastique linéaire.

8.2

Deuxième étape

Le problème est ici non linéaire. A partir des inconnues principales et secondaires statiquement et cinématiquement admissibles déterminées précédemment, on détermine les déplacements, les contraintes, le résidu et les forces d'écroûissage de façon que la contrainte généralisée associée et la force d'écroûissage soient plastiquement admissibles, c'est-à-dire telles que $f(\sigma, k) \leq 0$, et que les incréments des contraintes et des pressions soient statiquement admissibles.

9

Exemples de calculs

9.1

Consolidation élastoplastique en milieu non saturé

Ce premier exemple porte sur la modélisation axi-symétrique d'un tube épais, de rayon intérieur $r_i = 2$ m et de rayon extérieur $r_e = 12$ m. Le maillage et les conditions aux limites sont représentés sur la figure 1 (déplacements radiaux uniquement ; surface externe imperméable et immobile ; surface interne perméable avec des charges d'air et d'eau constantes). Une pression uniformément répartie de 100 kPa est appliquée à l'intérieur du tube. Dans cet exemple, le sol est supposé élastoplastique et représenté par le modèle d'Alonso *et al.* (1990). Les données numériques utilisées pour cet exemple sont rassemblées dans le tableau I (exemple 1).

Les figures 2, 3, 4 et 5 présentent respectivement l'évolution des déplacements radiaux, des déformations plastiques totales, des charges d'eau et des charges d'air suivant la coupe AB (Fig. 1).

Les résultats de ce calcul sont conformes à ce qu'une analyse physique du problème suggère : une

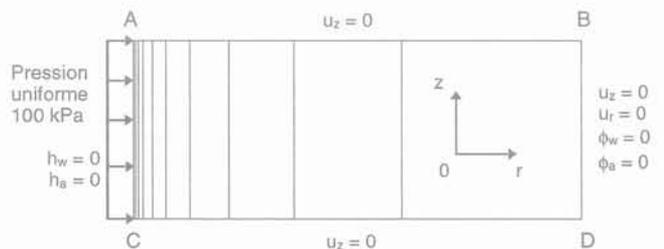


FIG. 1 Maillage et conditions aux limites (premier exemple).
FE Mesh and boundary conditions (first example).

TABLEAU I Valeurs numériques des paramètres de calculs.
Numerical values of the parameters.

Paramètre	Exemple 1	Exemple 2
Poids volumique du sol γ (kN/m ³)	20	0
Module d'Young E (kPa)	10 000	9 600
Coefficient de Poisson ν	0,2	0,4
Module de déformation volumique en succion (kPa ⁻¹)	18 000	54 500
Indice des vides initial e_0	0,34	0,9
Coefficient de perméabilité à l'eau du sol saturé $k_{w,sat}$ (m/s)	10 ⁻⁸	6.10 ⁻¹⁰
Constante du degré de saturation a_s	1	1
Constante du degré de saturation b_s (kPa ⁻¹)	-0,0001	-0,00001
Constante du degré de saturation c_s (kPa ⁻¹)	0,012	5.10 ⁻⁴
Degré de saturation résiduel S_{ru}	0	0
Constante pour la perméabilité à l'eau α	3	3
Constante pour la perméabilité à l'air b	1,8.10 ⁻¹⁰	0,41.10 ⁻⁶
Constante pour la perméabilité à l'air c	1	3
Contrainte verticale σ_v (kPa)	200	200
Poids volumique de l'eau γ_w (kN/m ³)	10	10
Poids volumique de l'air γ_a (kN/m ³)	0,012	0,012
Coefficient de Henry H	0,02	0,02
Coefficient de compressibilité de l'air C_a (kPa ⁻¹)	1,2. 10 ⁻⁵	1,2.10 ⁻⁵
Pente de la courbe vierge λ	0,014	
Pente des courbes de déchargement-rechargement κ	0,024	
Paramètre définissant la rigidité du sol r	0,82	
Paramètre contrôlant l'augmentation de la rigidité du sol avec la succion β (kPa ⁻¹)	16 400	
Pression de préconsolidation initiale P_{co} (kPa)	100	
Contrainte de référence P_r (kPa)	100	
Coefficient contrôlant l'augmentation de la cohésion avec la succion P_{tk}	0,02	
Pente de la courbe d'état critique M	1,24	

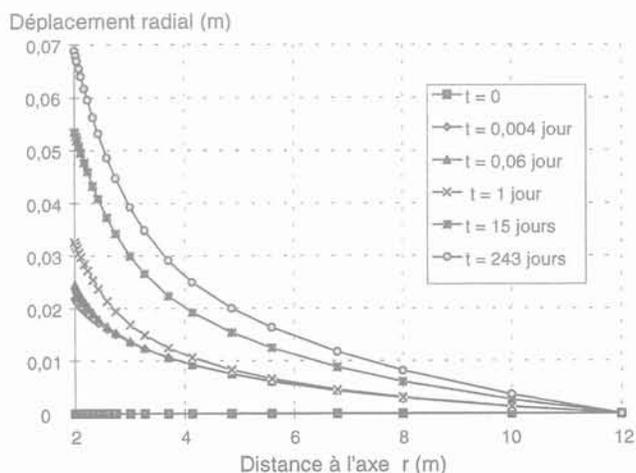


FIG. 2 Variations des déplacements radiaux en fonction du temps.
Variations with time of the radial displacements.

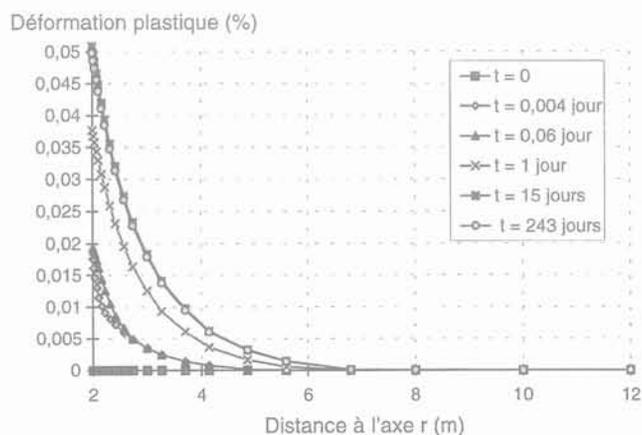


FIG. 3 Variations des déformations plastiques en fonction du temps.
Variations with time of the plastic strains.

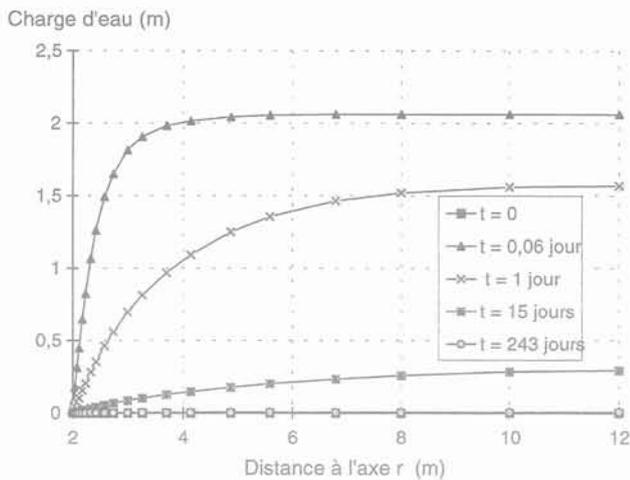


FIG. 4 Variations des charges d'eau en fonction du temps.
Variations with time of the water head.

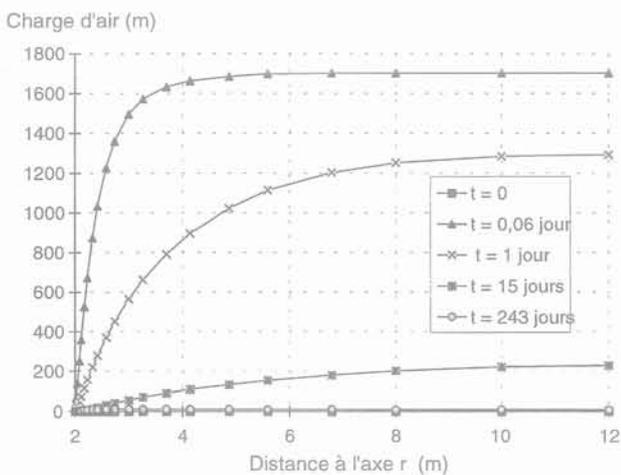


FIG. 5 Variations des charges d'air en fonction du temps.
Variations with time of the air head.



FIG. 6 Maillage et conditions aux limites (deuxième exemple).
FE Mesh and boundary conditions (second example).

augmentation instantanée des charges d'eau et d'air au départ, puis leur diminution au cours du temps, qui traduit le processus de consolidation lié au drainage des deux fluides ; les déformations plastiques et les déplacements radiaux augmentent au cours du temps, en

partant de la paroi intérieure du tube, ce qui traduit respectivement la plastification progressive du matériau et le transfert des sollicitations appliquées des fluides vers le squelette du sol.

9.2

Diffusion couplée en milieu déformable

Nous avons effectué un calcul bidimensionnel qui permet de tester les conditions d'écoulements des deux fluides (eau et air). Ce test a été effectué sur un carré de 10 m de côté, dont les conditions aux limites sont représentées sur la figure 6. Le côté AB est soumis à des conditions de charge d'eau imposée, égale à 10 m (le repère des altitudes est placé à la base du maillage), et de flux d'air nul ; sur la surface AE du massif, la pression d'eau et la pression d'air sont nulles (charge constante égale à 10 m) ; le côté DE est soumis à des conditions de surface de suintement (charges d'eau et d'air égales à la cote du point courant) et, enfin les côtés BC et CD sont soumis à des conditions de flux nul pour les deux phases. Le sol est considéré comme élastique linéaire et aucun chargement mécanique n'est appliqué. Les paramètres du calcul sont donnés dans le tableau I (exemple 2).

Les conditions initiales du calcul sont que les charges d'eau et d'air sont égales à 10 m et que les déplacements verticaux et horizontaux sont nuls.

Ce problème correspond donc au drainage par une tranchée maintenue vide (pressions d'air et pressions d'eau nulles sur ED) d'une couche de sol non saturé initialement en équilibre hydrostatique, avec des pressions d'eau et d'air nulles sur la surface AE, deux surfaces imperméables à l'eau et à l'air (BC, CD) et une surface AB imperméable à l'air mais maintenue en équilibre hydrostatique pour l'eau.

Pour illustrer les résultats de ce calcul, nous avons représenté sur les figures 7 à 10 les équipotentielles et les lignes de courant pour l'eau et pour l'air à deux instants : $t = 24\,000$ s et $t = 2\,698\,000$ s. La figure 11 montre pour sa part l'allure des déplacements verticaux à l'instant $t = 24\,000$ s.

Les écoulements de l'eau et de l'air dans le sol évoluent séparément en fonction de leurs propres conditions aux limites. Pour comparer les distributions de charges d'eau et d'air dans le sol aux résultats connus des calculs d'écoulements permanents, nous avons effectué, avec les mêmes conditions aux limites, des calculs d'écoulements dans lesquels le massif est supposé homogène, avec, d'une part, les conditions aux limites de l'écoulement de l'eau et, d'autre part, les conditions aux limites de l'écoulement de l'air. Les résultats sont représentés, respectivement, sur les figures 12 et 13. On observe que l'état des écoulements à l'instant $t = 2\,698\,000$ s est pratiquement identique à l'écoulement permanent de chacune des phases en milieu homogène saturé. Cette observation traduit la faiblesse de l'influence des conditions d'interaction des phases en milieu non saturé dans les conditions de ce calcul.

Conclusion

Cet article a décrit de façon sommaire les équations qui nous ont servi à développer un modèle numérique pour l'analyse du comportement couplé des massifs élastoplastiques non saturés. Ce modèle a été implanté dans le code de calcul aux éléments finis CESAR-LCPC.

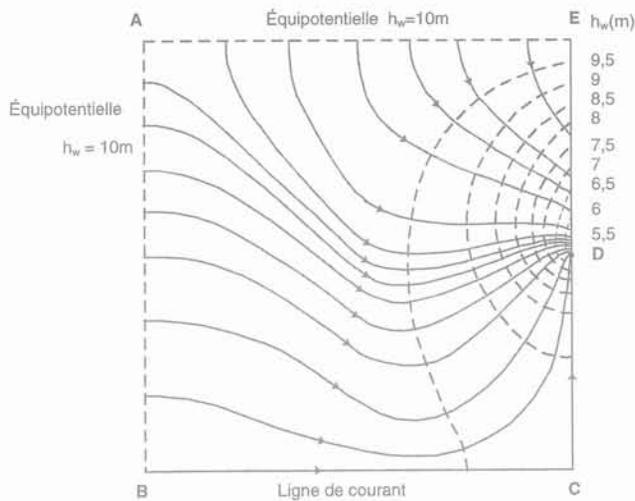


FIG. 7 Équipotentiels et lignes de courant de l'eau au temps $t = 24\,000$ s (environ 6,7 h): AB, AE - équipotentiels; BC, CD - lignes de courant; ED - surface de suintement. Equipotentials and flow lines for water at time $t = 24,000$ s (approximately 6.7 h): AB, AE - equipotentials; BC, CD - flow lines; ED - seepage surface.

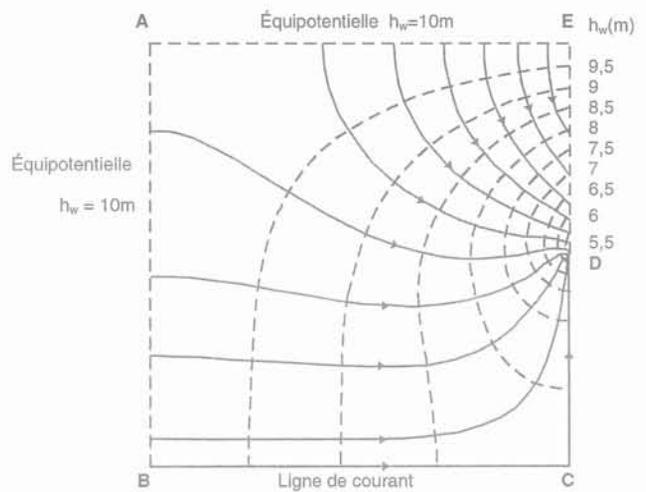


FIG. 9 Équipotentiels et lignes de courant de l'eau au temps $t = 2\,698\,000$ s (environ 31 j): AB, AE - équipotentiels; BC, CD - lignes de courant; ED - surface de suintement. Equipotentials and flow lines for water at time $t = 2,698,000$ s (approximately 31 days): AB, AE - equipotentials; BC, CD - flow lines; ED - seepage surface.

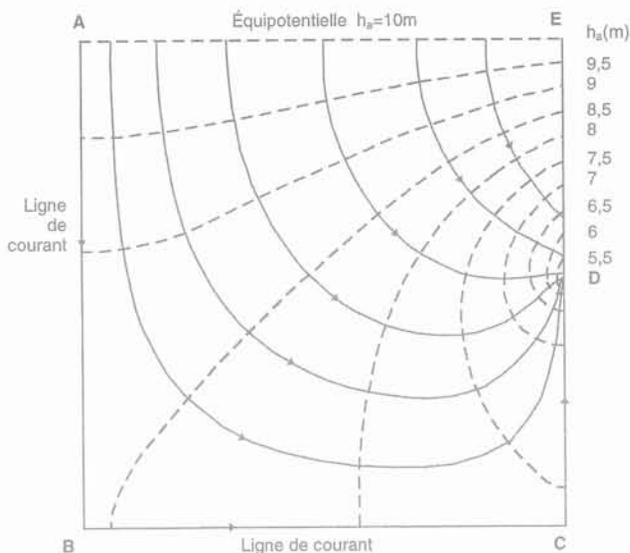


FIG. 8 Équipotentiels et lignes de courant de l'air au temps $t = 24\,000$ s: AE - équipotentielle; AB, CD, CE - lignes de courant; ED - surface de suintement. Equipotentials and flow lines for air at time $t = 24,000$ s: AE - equipotentials; AB, CD, CE - flow lines; ED - seepage surface.

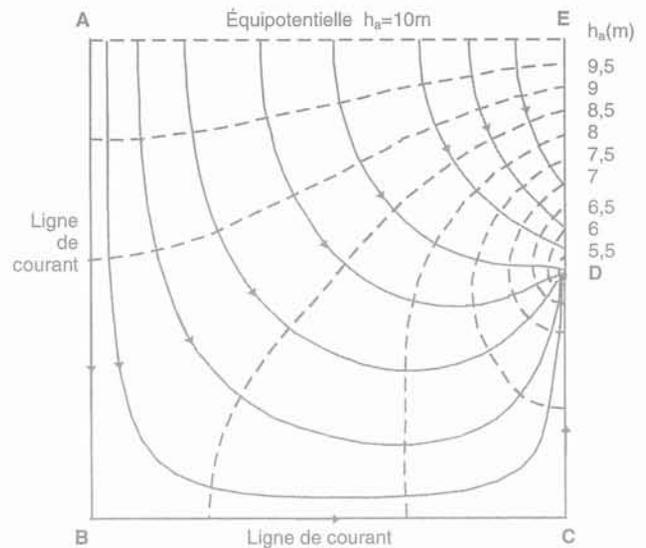


FIG. 10 Équipotentielle et lignes de courant de l'air au temps $t = 2\,698\,000$ s: AE - équipotentielle; AB, CD, CE - lignes de courant; ED - surface de suintement. Equipotentials and flow lines for air at time $t = 2,698,000$ s: AE - equipotential, AB, CD, CE - flow lines; ED - seepage surface.

Les tests effectués dans les cas uni- et bidimensionnels et sur deux géométries différentes (plane et axisymétrique) ont montré les aptitudes de ce modèle à reproduire de façon satisfaisante les conditions des

tests proches de l'état de ces matériaux *in situ*. Ses développements passent par l'amélioration des équations élémentaires, pour assurer une bonne représentativité des résultats des calculs.

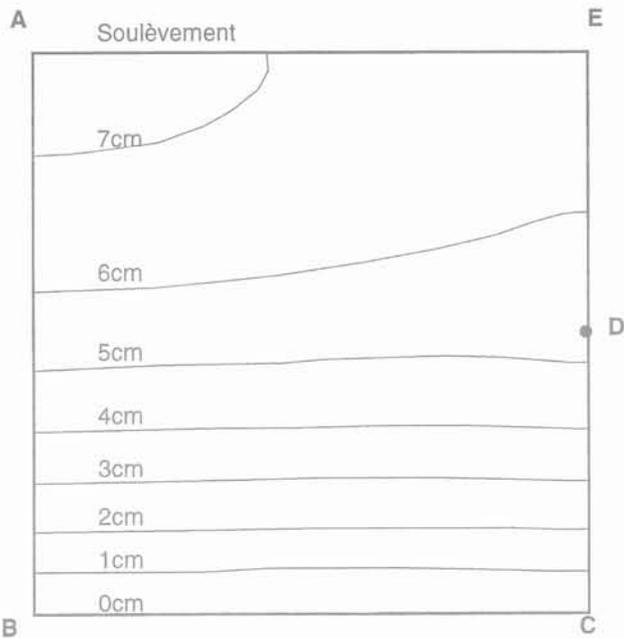


FIG. 11 Isovaleurs des déplacements verticaux (gonflement) au temps $t = 24\,000$ s.
Lines of equal vertical displacements (heave) at time $t = 24,000$ s.

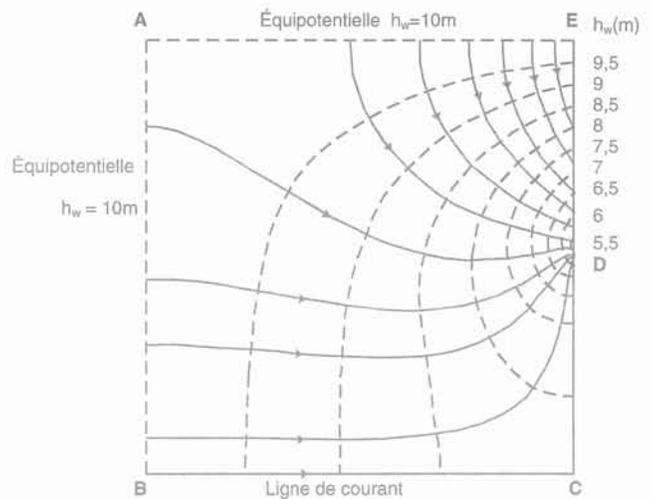


FIG. 12 Équipotentiellles et lignes de courant pour un écoulement permanent dans les conditions définies pour l'écoulement de l'eau dans le massif: AB, AE - équipotentiellles; BC, CD - lignes de courant; ED - surface de suintement.
Equipotentials and flow lines for steady seepage of water with the same boundary conditions as in Fig. 7 and 9.

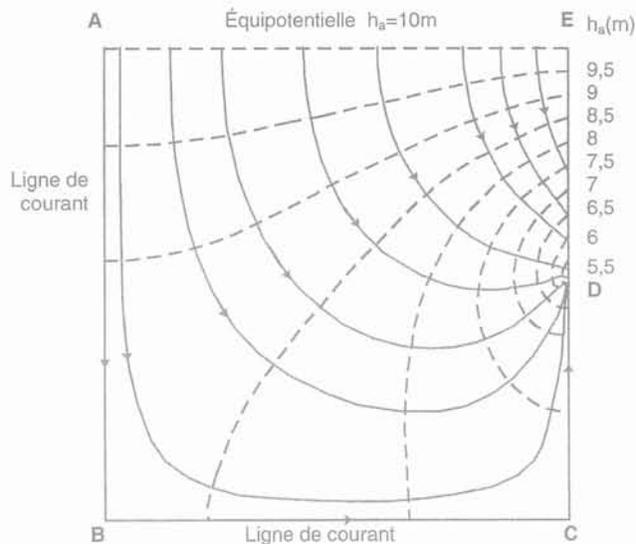


FIG. 13 Équipotentiellles et lignes de courant pour un écoulement permanent dans les conditions définies pour l'écoulement de l'air dans le massif: AE - équipotentielle; AB, BC, CD - lignes de courant; ED - surface de suintement.
Equipotentials and flow lines for steady seepage of air with the same boundary conditions as in Fig. 8 and 10.

REMERCIEMENTS

Les auteurs remercient Nabila Sellali pour son aide lors de la préparation de cet article.

Bibliographie

Abida H. - « La modélisation des sols non saturés - Analyse numérique ». Thèse de doctorat, École nationale des ponts et chaussées, Paris, 1992, 271 p.

Alonso A.E., Batlle F., Gens A., Lloret A. - « Consolidation analysis of partially saturated soils. Application to earthdam construction ». Proceedings, 6th Inter-

national Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Innsbruck, Balkema, 1988, p. 1303-1308.

Alonso E.E., Gens A., Hight D.W. - « Spe-

- cial problems soils – General Report (session 5) ». Proceedings, 9th European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Dublin, vol. 5, 1987, p. 1-60.
- Alonso A.E., Gens A., Josa A. – « A constitutive model for partially saturated soils ». *Géotechnique* 40, n° 3, 1990, p. 405-430.
- Alonso E.E., Gens A., Lloret A. – « Double structure model for the prediction of long-term movements in expansive materials ». *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, Rotterdam, Balkema, 1991, p. 541-548.
- Biarez J., Fleureau J.M., Zerhouni M.I., Soepandji B.S. – « Variations de volume des sols argileux lors des cycles de drainage-humidification ». *Revue française de géotechnique*, n° 41, 1988, p. 63-71.
- Bishop A.W., Blight G.E. – « Some aspects of effective stress in saturated and partly saturated soils ». *Géotechnique*, vol. 13, n° 3, 1963, p. 177-197.
- Bishop A.W., Donald I.B. – « The experimental study of partly saturated soils ». *Géotechnique*, vol. 13, n° 3, 1961, p. 177-197.
- Fredlund D.G. – « Discussion leader's report ». Proceedings, 12th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Rio de Janeiro, vol. 5, 1989, p. 2861-2878.
- Fredlund D.G., Morgenstern N.R. – « Constitutive relations for volume change in unsaturated soils ». *Canadian Geotechnical Journal*, n° 13, 1976, p. 261-276.
- Gatmiri B., Tavakoli S., Moussavi S., Delage P. – « Numerical approach of elastoplastic consolidation of unsaturated soils ». Proceedings of the first International Conference on Unsaturated Soils, /UNSAT'95 Paris/, France, vol. 2, 1995, p. 1057-1064.
- Gens A., Vaunat J., Ledesma A. – « Analysis of hydration of an engineered barrier in a radioactive waste repository scheme using an elastoplastic model ». Proceedings of the first International Conference on Unsaturated Soils, /UNSAT'95 Paris/, France, vol. 2, 1995, p. 1057-1064.
- Hayes L.J. – « Finite element patch approximations and alternating directions methods ». *Mathematics and Computer in Simulation*, XXII, 1980, p. 25-29.
- Hayes L.J. – « A modified backward time discretization for nonlinear parabolic equations using patch approximations ». *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 18, n° 5, 1981, p. 781-793.
- Jennings J.E.B., Burland J.B. – « Limitations to the use of effective stresses in partly saturated soils ». *Géotechnique*, 12, n° 2, 1962, p. 125-144.
- Karube D., Kato S. – « Yield functions of unsaturated soil ». Proceedings, 12th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Rio de Janeiro, vol. 1, 1989, p. 615-618.
- Kohgo Y., Nakano M., Miyazaki T. – « Theoretical aspects of constitutive modelling for unsaturated soils ». *Soils and Foundations*, vol. 33, n° 4, 1991, p. 49-63.
- Musy A. – « Simulation des écoulements en milieu poreux non saturé ». *Journal of Hydrology*, n° 29, 1976, p. 1-21.
- Nanda A. – « Finite element analysis of unsaturated coupled flow and deformation ». Rapport CERMES, École nationale des ponts et chaussées, 1989, 18 p.
- Narasimhan T.N., Neuman S.P., Witherspoon P.A. – « Finite element method for subsurface hydrology using a mixed explicit-implicit scheme ». *Water Resources Research*, vol. 14, n° 5, 1978, p. 863-877.
- Narasimhan T.N., Witherspoon P.A. – « Numerical model for saturated-unsaturated flow in deformable porous media. "Theory" ». *Water Resources Research*, vol. 13, n° 3, 1977, p. 657-664.
- Narasimhan T.N., Witherspoon P.A. – « Numerical model for saturated-unsaturated flow in deformable porous media. "Algorithm" ». *Water Resources Research*, vol. 14, n° 2, 1978, p. 255-261.
- Narasimhan T.N., Witherspoon P.A. – « Numerical model for saturated-unsaturated flow in deformable porous media. "Applications" ». *Water Resources Research*, vol. 14, n° 6, 1978, p. 1017-1034.
- Shrefler B.A., Zhan Xiaoyong. – « A fully coupled model for water flow and air-flow in deformable porous media ». *Water Resources Research*, vol. 29, n° 1, 1993, p. 155-167.
- Matyas E.L., Radhakrishnan A.S. – « Volume change characteristics of partially saturated soils ». *Géotechnique*, vol. 18, 1968, p. 432-448.
- Touma J., Vaucelin M. – « Experimental and numerical analysis of two-phase infiltration in a partially saturated soil ». *Transport in Porous Media*, n° 1, 1986, p. 27-55.
- Wone E.M. – « Contribution à la modélisation du comportement hydrique et mécanique des remblais routiers en matériaux fins ». Thèse de doctorat, École nationale des ponts et chaussées, Paris, 1995, 210 p.