Simulation des excavations des sols élastoplastiques par la méthode des éléments finis

Finite element procedure for simulating excavations in elastoplastic soils

E. COMODROMOS
Ingénieur de recherche
K. PITILAKIS
Professeur associé
T. HATZIGOGOS
Professeur assistant

Université Aristote de Thessaloniki - Laboratoire de Mécanique des Sols*

Rev. Franç. Géotech. n° 58, pp. 51-66 (janvier 1992)

Résumé

Nous présentons une méthode numérique aux éléments finis pour la simulation des excavations incrémentales dans le cas des matériaux élastoplastiques. Les équations non-linéaires sont dérivées de formulations variationelles qui tiennent en compte la variation des limites du domaine pendant les diverses étapes de l'excavation, et satisfont l'hypothèse de contraintes nulles au niveau de l'excavation grâce à l'utilisation des éléments dit « fantômes ».

La validité de l'algorithme est justifiée théoriquement par le travail virtuel intérieur nul du domaine excavé et numériquement par le traitement des exemples élastiques linéaires, élastiques parfaitement-plastiques et élastoplastiques avec écrouissage isotrope. La méthode proposée satisfait le principe de la solution unique, aussi bien dans le cas de l'élasticité linéaire, que dans le cas élastoplastique.

Abstract

The objective of this paper is to propose an efficient, finite element based, numerical procedure for simulating multi-stage excavation. The non-linear finite element equations are derived from a variational formulation which accounts for time-varying problem domain and boundaries, which combined with the artificial inclusion of ghost elements satisfy the assumption of a stress-free excavated surface.

The validity of the proposed algorithm is justified theoretically by a zero internal virtual work of the excavated domain, and numerically from examples covering the linear elasticity and the elastoplasticity (perfect and/or with hardening). The proposed method satisfies the principle of a unique solution, in the case of linear elasticity, as well as in the case of elastoplasticity.

* 54006 Thessaloniki, Hellas, Grèce.

PRINCIPALES NOTATIONS

t_a	la transposée de la matrice représentative du tenseur a
σ	le tenseur des contraintes
ϵ	le tenseur des déformations
S	le déviateur de σ
e	le déviateur de ϵ
I_1	le premier invariant du tenseur des contraintes
J_2	le deuxième invariant du tenseur des contraintes déviatoriques
U	vecteur des déplacements
δ_{ij}	le tenseur de Kronecker
N	matrice des fonctions d'interpolation nodale
B	matrice de transformation déplacements-déformations
C	matrice de rigidité élémentaire
K	matrice de rigidité globale
λ	multiplicateur plastique
G	module de cisaillement
K	module de compressibilité
R	rapport des axes de la surface elliptique (modèle Cap)
D, W	paramètres de la fonction d'écrouissage du modèle Cap
γ	poids volumique du sol
K_0	coefficient de pression des terres au repos

1. INTRODUCTION

La simulation des excavations, dans le contexte de la méthode des éléments finis implique, selon le cas, la prise en compte de divers facteurs comme le déchargement, l'interaction sol-structure, l'inclusion artificielle des éléments inexistants connus comme éléments « fantômes » (1) et la manipulation de formulations mathématiques assez complexes provenant des facteurs exposés ci-dessus.

Dans l'approche conventionnelle, qui suppose un comportement linéaire élastique, on calcule les déplacements et les contraintes comme si l'excavation avait été réalisée en une seule phase ; donc on ne prend pas en compte le vrai chemin des contraintes ainsi que la non-linéarité introduite par la nature incrémentale d'une excavation.

Les premières méthodes numériques de simulation d'une excavation, DUNCAN et al. (1969), CHANG et al. (1970), sont basées sur l'hypothèse qu'au niveau de l'excavation les contraintes sont nulles (stress-free surface). Selon cette notion, à la surface de l'excavation, des forces nodales statiquement équivalentes aux contraintes initiales, mais opposées en signe, s'ajoutent au vecteur global des forces. Selon sa précision, la méthode de calcul de ces forces nodales influence la solution.

(1) On appelle élément fantôme un élément dont l'assemblage particulier lui permet de passer inaperçu par la procédure de résolution des équations problèmes.

ISHIHARA (1970) a posé le principe d'une solution unique, indépendante de l'histoire de l'excavation, pour les matériaux linéaires élastiques, dont le comportement peut être considéré comme indépendant du temps. GHABOUSSI et PECKNOLD (1984), en employant la formulation provenant du principe des travaux virtuels ont abouti à une solution unique dans le cas des matériaux élastiques linéaires. Néanmoins, des algorithmes numériques proposés par CHRISTIAN et al. (1973), et CLOUGH et al. (1976) n'étaient pas en position de vérifier numériquement l'existence d'une solution admissible unique. La solution finale de ces algorithmes a été très influencée par la géométrie du maillage et le nombre des étapes de l'excavation. Afin de proposer un algorithme efficace, DESAI et SARGAND, (1984) ont utilisé une méthode hybride de haute précision, pour les calculs des forces nodales équivalentes. L'efficacité de cette méthode est contrebalancée par une certaine complexité et un alourdissement essentiel des calculs.

Récemment BORJA et al. (1989) ont proposé une procédure numérique basée sur une fonction de pondération (weighting function) variable dont l'application dans des cas élastiques parfaitement plastiques (modèles de VON MISES et de DRUCKER-PRAGER) combinée avec une excavation monotone, a justifié son indépendance du nombre des étapes.

Cependant, l'utilisation des éléments fantômes pour simuler le domaine de l'excavation, combinée avec une méthode de résolution de systèmes semi-positive (algorithmes à double pivot) nous semble plus avantageuse et efficace car la contribution des éléments de l'excavation est rejetée par la procédure de la résolution. Les équations, non-linéaires dans le cas général, provenant de formulations variationelles, ont été dérivées afin de tenir compte de la notion des éléments fantômes, événement qui permet la variation du maillage original.

En se basant sur l'hypothèse que la continuité du phénomène de l'excavation peut être discrétisée par rapport au temps en sous-espaces « chroniques » pendant lesquels l'enlèvement d'une partie du maillage se fait instantanément, on peut être amené à la conclusion que la formulation variationelle ne dépend plus du temps réel mais des sous-espaces de discrétisation que l'on appelle étapes de l'excavation.

2. FORMULATION GÉNÉRALE

On considère le corps de la figure 1 soumis à un champ de forces volumiques, f^b, à des forces surfaciques f^s, et à des forces concentrées F, qui peuvent varier pendant l'excavation. L'équilibre du corps impose la satisfaction des conditions aux limites, données par les équations 2 et 3, et de l'équation 1 en tous points à l'intérieur du corps :

$$\nabla\sigma(u) - f^b = 0 \quad (1)$$

$$u = u_g \quad \text{sur } \Gamma_g \quad (2)$$

$$\sigma(h) = f^s \quad \text{sur } \Gamma_h \quad (3)$$

∇ étant l'opérateur du vecteur du gradient,
σ étant le tenseur de contraintes de Cauchy,
u_g étant le vecteur de déplacements prescrits,
V étant le domaine du problème,
$\Gamma_g \cup \Gamma_h = \Gamma$ les limites du problème.

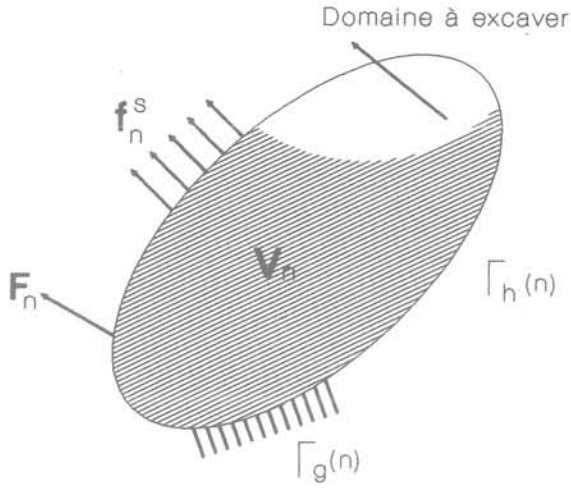


Fig. 1. — Variation schématique du domaine et des limites introduits par l'excavation.
Fig. 1. — Schematic variation of domain and boundaries produced by an excavation.

Dans le cas d'une excavation, l'application des équations 1-3 se généralise en permettant la variation du domaine et des limites du problème ainsi que du vecteur des forces surfaciques et concentrées.

$$V = V(n) = V_n \tag{4}$$

$$\Gamma_g = \Gamma_g(n) \tag{5}$$

$$\Gamma_h = \Gamma_h(n) \tag{6}$$

$$f^s = f^s(n) = f_n^s \tag{7}$$

$$F(n) = F_n \tag{8}$$

où n désigne l'étape d'excavation.

En conséquence la formulation provenant du principe des travaux virtuels est affectée et devient :

$$W_{intr}(n) = W_{extr}(n) \tag{9}$$

où :

$$W_{intr}(n) = \int_{v_n} {}^t\epsilon\ \sigma\ dv \tag{10}$$

représente le travail intérieur, et :

$$W_{extr}(n) = \int_{v_n} {}^tU_n\ f^b\ dv + \int_{S_n} {}^tU_n\ f_n^s\ ds + \Sigma\ {}^tU\ F_n^i \tag{11}$$

représente le travail extérieur, avec :

${}^t\epsilon$ la transposée du vecteur des déformations virtuelles,
U le vecteur des déplacements.

Les différentes étapes d'une excavation sont considérées comme des événements instantanés. L'excavation peut donc être approchée par une soustraction des nœuds et des éléments du maillage original. Les principes de la méthode des éléments finis et l'hypothèse précédente permettent l'intégration de l'équation qui résulte du principe des travaux virtuels par assemblage, en respectant, en même temps, des variations introduites par les étapes d'excavation.

$$\sum_m \int_{V_n^{(m)}} {}^t\epsilon_n^{(m)}\ \sigma_n^{(m)}\ dv = \sum_m \int_{V_n^{(m)}} {}^tU_n\ f_n^{b(m)}\ dv + \sum_m \int_{S_n^{(m)}} {}^tU_n\ f_n^{s(m)}\ ds + \sum {}^tU\ f_n^i \tag{12}$$

où m et i dénotent élément et nœud, respectivement.

La contribution de l'élément m s'annule quand son volume $V_n^{(m)}$ est déterré, à l'étape correspondante n. De la même manière, les forces concentrées au nœud i s'annulent si le domaine excavé l'englobe. Les déplacements $U_n^{(m)}$, et par conséquence les déformations $\epsilon_n^{(m)}$, correspondant à l'étape n, mesurés en système local peuvent être exprimés en fonction des déplacements nodaux globaux.

Pour l'élément m on peut donc écrire :

$$U_n^{(m)} = N^{(m)}\ U_n \tag{13}$$

$$\epsilon_n^{(m)} = B^{(m)}\ U_n \tag{14}$$

où :

$N^{(m)}$ dénote la matrice des fonctions d'interpolation de l'élément m,

$B^{(m)}$ dénote la matrice de transformation déplacements-déformations.

Il est à noter que les matrices N et B ne dépendent que de la forme et du type de l'élément et restent constantes pendant l'évolution des étapes.

Les contraintes actuelles d'un élément se calculent en fonction des contraintes initiales $\sigma_n^{I(m)}$, des déformations actuelles $\epsilon_n^{(m)}$, et de la matrice de rigidité élémentaire $C_n^{(m)}$,

$$\sigma_n^{(m)} = C_n^{(m)}\ \epsilon_n^{(m)} + \sigma_n^{I(m)} \tag{15}$$

La substitution des équations 13, 14, 15 à l'équation 12 conduit à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} &{}^tU_n \left\{\sum_m \int_{V_n^{(m)}} {}^tB^{(m)}\ C_n^{(m)}\ B^{(m)}\ dv\right\} U_n \\ &= {}^tU_n \left\{\sum_m \int_{V_n^{(m)}} {}^tN^{(m)}\ f_n^{b(m)}\ dv\right\} \\ &+ {}^tU_n \left\{\sum_m \int_{S_n^{(m)}} {}^tN^{(m)}\ f_n^{s(m)}\ ds\right\} \\ &- {}^tU_n \left\{\sum_m \int_{V_n^{(m)}} {}^tB^{(m)}\ \sigma_n^{I(m)}\ dv\right\} \\ &+ {}^tU_n\ F_n^i \end{aligned} \tag{16}$$

qui multipliée à gauche par $\left[{}^{t}U_n\right]^{-1}$ devient :

$$\begin{aligned}&\{\sum_m \int_{V_n^{(m)}} {}^{t}B^{(m)}\, C_n^{(m)}\, B^{(m)}\, dv\}\, U_n \\ &= \sum_m \int_{V_n^{(m)}} {}^{t}N^{(m)}\, f_n^{b(m)}\, dv \\ &+ \sum_m \int_{S_n^{(m)}} {}^{t}N^{(m)}\, f_n^{s(m)}\, ds \\ &- \sum_m \int_{V_n^{(m)}} {}^{t}B^{(m)}\, \sigma_n^{I(m)}\, dv \\ &+ F_n^{I}\end{aligned} \qquad (17)$$

qui peut être réécrite sous la forme bien connue :

$$K_n\, U_n = R_n \qquad (18)$$

avec :

$$R^n = R_n^b + R_n^s - R_n^I + R_n^c \qquad (19)$$

La matrice K_n est la matrice de la rigidité globale qui se construit par l'assemblage des matrices de rigidité élémentaire $C_n^{(m)}$.

$$K_n - \sum_m \int_{V_n^{(m)}} {}^{t}B^{(m)}\, C_n^{(m)}\, B^{(m)}\, dv \qquad (20)$$

La dépendance de K_n de l'étape n consiste en l'annulation de la contribution de l'élément m, selon la présence ou non de l'élément pendant l'étape n. Le vecteur des forces R_n contient l'effet des forces volumiques :

$$R_n^b = \sum_m \int_{V_n^{(m)}} N^{(m)}\, f_n^{b(m)}\, dv \qquad (21)$$

l'effet des forces surfaciques,

$$R_n^b = \sum_m \int_{S_n^{(m)}} N^{(m)}\, f_n^{s(m)}\, dv \qquad (22)$$

l'effet des contraintes initiales,

$$R_n^I = \sum_m \int_{V_n^{(m)}} {}^{t}B^{(m)}\, \sigma_n^{I(m)}\, dv \qquad (23)$$

et l'effet des forces concentrées,

$$R_n^c = F_n \qquad (24)$$

Il est à souligner que l'analyse non-linéaire nécessite une solution itérative pour chaque étape si bien que l'équation 18 devient :

$$K_n^k\, U_n^k = R_n^k \qquad (25)$$

où k dénote le nombre actuel de l'itération à l'étape n.

3. ALGORITHME - MISE EN OEUVRE

La résolution de l'équation 25, non-linéaire dans le cas général, nécessite la reconstitution de la matrice de rigidité globale K à partir des matrices C, ainsi que du vecteur des forces résiduelles à chaque itération. La matrice de la rigidité globale est construite selon l'équation 26.

$$K_n^k = \sum_m \int_{V_n^{(m)}} {}^{t}B^{(m)}\, C_n^{k\,(m)}\, B^{(m)}\, dv \qquad (26)$$

Parmi les termes de l'équation 26 seule la matrice de rigidité élémentaire, qui exprime la variation du vecteur de contraintes par rapport au vecteur de déformations (équation 27) dépend de l'itération k.

$$C_n^{k(m)} = \frac{\partial \sigma_n^{k(m)}}{\partial \epsilon_n^{k(m)}} \qquad (27)$$

La matrice C, et par conséquence la matrice K, sont constantes dans le cas d'une analyse élastique linéaire, tandis que dans le cas élastique-parfaitement plastique elles sont influencées par le régime et par le chemin des contraintes. Dans le cas des matériaux élastoplastiques avec écrouissage, l'histoire des déformations joue en plus un rôle significatif. La solution non-linéaire impose la reconstruction des matrices C, K, du vecteur R et la résolution itérative de l'équation 25 au total M fois.

$$M = \sum_{n-1}^{z} n\, k_t^i \qquad (28)$$

où k_t^i et z dénotent le nombre total d'itérations pendant l'étape n, et le nombre total des étapes respectivement.

Les déplacements qui correspondent à l'itération k sont ajoutés aux déplacements précédents,

$$U_n^k = U_n^{k-1} + \Delta U_n^k \qquad (29)$$

Le résidu de forces R_n^k résulte de la soustraction du vecteur de forces intérieures $R_{n,intr}^k$, par le vecteur de forces extérieures $R_{n,extr}^k$.

Le vecteur des forces intérieures dépend à la fois de l'étape de l'excavation et de l'itération, tandis que le vecteur des forces extérieures est indépendant de l'itération.

Or :

$$R_{n,intr}^k = R_{n,k}^I = \sum_m \int_{V_n^m} {}^{t}B^m\, \sigma_{n,k}^{I(m)}\, dv \qquad (30)$$

Le vecteur des forces extérieures est déduit à partir de l'équation suivante :

$$R_{n,extr} = R_n^b + R_n^s + R_n^c$$

les termes R_n^b, R_n^s, R_n^c étant donnés par les équations 21, 22, 24 respectivement.

On peut donc être amené par un processus itératif à la solution finale.

$$U_n^k = U_n^{k-1} + [K_n^k]^{-1}\, [R_{n,extr} - R_{n,intr}^k] \qquad (32)$$

L'utilisation du maillage initial, sans renumérotation des nœuds et des éléments pendant les diverses étapes, peut être mise en œuvre en utilisant l'équation 16 mais à condition que les hypothèses suivantes soient satisfaites.

Pour les éléments déjà excavés il faut que :

a. la contribution de l'élément m à la matrice de rigidité globale soit nulle, i.e.

$$\int_{v_n^{(m)}} {}^{t}B^{(m)}\, C_n^{k(m)}\, B^{(m)}\, dv = 0 \quad \forall\, m \in M_{exc}^{n} \qquad (33)$$

où M_{exc}^{n} dénote l'ensemble des éléments à excaver jusqu'à l'étape n, (n y compris),

b. la contribution de l'élément m au vecteur global des forces soit nulle, i.e.

$$r^{(m)} = R_{extr}^{(m)} - R_{intr}^{(m)} = 0 \quad \forall\, m \in M_{exc}^{n} \qquad (34)$$

Remarque : l'équation 33 conduit à une matrice de rigidité globale semi-positive dont la résolution nécessite un algorithme particulier à double pivot.

Pour satisfaire la première hypothèse on met $C \equiv 0$. En ce qui concerne la deuxième, au lieu de reconstruire le vecteur global de forces, il nous semble plus efficace d'éliminer la contribution du vecteur de forces intérieures R_m^I en considérant les contraintes initiales $\sigma_n^{I(m)}$ égales à zéro dans l'équation 30, et de soustraire les vecteurs des forces élémentaires R_m^b, R_m^s, du vecteur global de forces. De cette manière l'équation 34 est satisfaite directement.

L'automatisation de la procédure nécessite, pour tous les éléments et nœuds à excaver un indice « pseudo-chronique » qui déclare l'étape de l'excavation de l'élément associé, ainsi que le stockage et la disponibilité permanente des vecteurs élémentaires des forces.

L'activation de l'indice « pseudo-chronique » déclenche la procédure d'annulation de la contribution de l'élément concerné, événement qui permet l'utilisation directe de l'équation 17, en respectant en même temps les hypothèses fondamentales exposées ci-dessus. La vérification et l'admissibilité de la méthode peuvent être justifiées par le critère du travail virtuel intérieur de chaque élément déterré qui doit être nul.

$$W_{n,intr}^{(m)} \int_{v_n^{(m)}} {}^{t}\epsilon_n^{(m)}\, \sigma_n^{(m)}\, dv = 0 \quad \forall\, m \in M_{exc} \qquad (35)$$

4. APPLICATIONS - VÉRIFICATIONS

Quatre exemples d'excavation en déformations planes ont été étudiés. Pour tous les quatre la même schématisation a été utilisée. La hauteur du maillage est égale à H = 16 m et sa largeur à L = 30 m.

Le maillage est constitué de 72 éléments quadratiques isoparamétriques à 8 nœuds avec 4 points d'intégration de type de produit 2 * 2, [11], et 251 nœuds (fig. 2). Le domaine à excaver est constitué des éléments 54, 55, 56, 62, 63, 64, 70, 71, 72 et ses dimensions sont égales à 6 m sur 9 m, de hauteur et de largeur respectivement. Les nœuds tout le long de la base de la structure sont fixés en x et y, tandis que ceux sur les limites verticales sont fixés seulement dans le sens horizontal. Pour évaluer le vecteur des forces nodales équivalentes aux contraintes initiales, la règle de quatre points d'intégration de Gauss, type produit, a été employée.

Dans le premier exemple le comportement du matériau constitutif est élastique linéaire et il est considéré comme un patch test numérique. Au deuxième exemple le modèle de VON MISES est utilisé. Dans le troisième exemple, on a utilisé le modèle DRUCKER-PRAGER alors qu'au dernier exemple le domaine d'élasticité non fermé, dans l'espace des contraintes, du modèle de DRUCKER-PRAGER est délimité par une surface elliptique (modèle CAP) qui admet la loi de normalité et présente un écrouissage isotrope. Les divers paramètres nécessaires pour l'analyse, sont déterminés à partir des essais effectués sur l'argile bleue de Boston, [16] et [17] dont les valeurs figurent au tableau I.

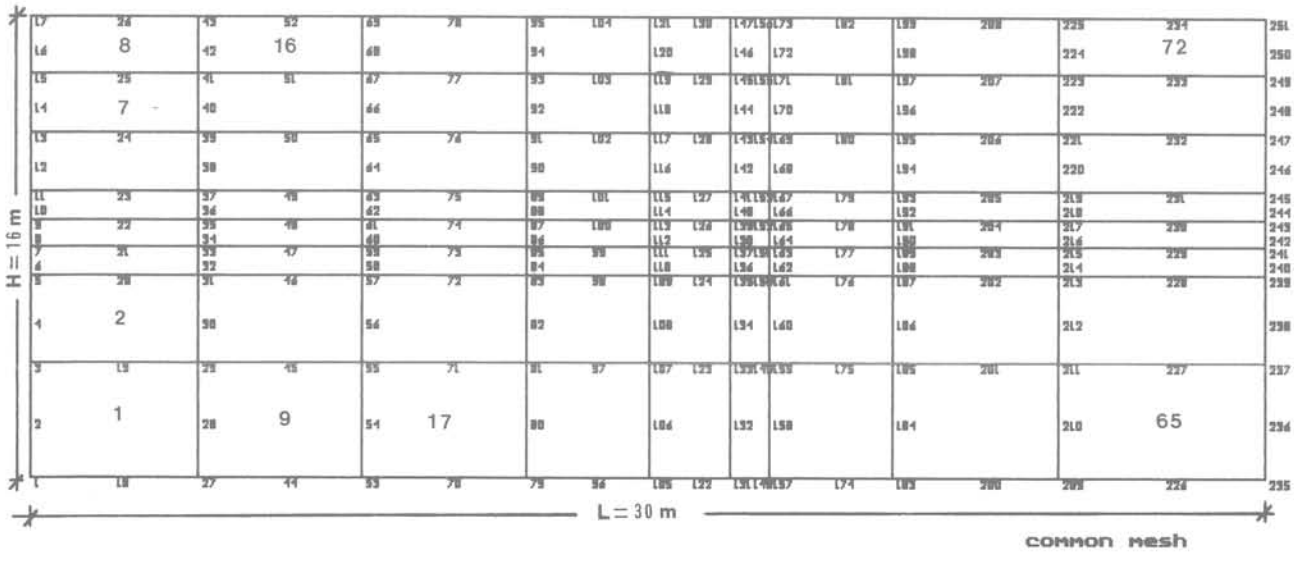


Fig. 2. — Maillage commun, numérotage des nœuds et des éléments.
Fig. 2. — Common mesh, node and element numerotation.

Tableau I. — Valeurs des paramètres utilisées dans les exemples.

Table I. — Values of the parameters used in the examples.

Numéro de l'exemple	1	2	3	4
Lois de comportement	Linéaire élastique	Von Mises	Drucker Prager	CAP
γ (kN/m^3)	19,8	19,8	19,8	19,8
K_o	0,9	0,9	0,9	0,9
K (kPa)	4700	4700	4700	4700
G (kPa)	2200	2200	2200	2200
a	—	0	0,25	0,25
k (kPa)	—	45	1	10
W	—	—	—	0,3
D (kPa^{-1})	—	—	—	6,1 10^{-4}
R	—	—	—	4,13

Pour arriver à la solution, dans le cas d'une analyse élastoplastique la satisfaction de deux critères de convergence est nécessaire :

1. Critère de convergence des déplacements :

$$\frac{||u_n^{k-1}|| - ||u_n^k||}{||u_n^k||} \leq \epsilon_d \qquad (36)$$

2. Critère de convergence des forces résiduelles :

$$\frac{||r_n^o|| - ||r_n^k||}{||r_n^o||} \leq \epsilon_f \qquad (37)$$

où ϵ_d, ϵ_f dénote les tolérances relatives pour les déplacements et les forces résiduelles respectivement, et $||\ ||$ la norme Euclidienne.

Exemple 1 : excavation en élasticité linéaire

La relation élémentaire contraintes-déformations est donnée par l'équation 14 dans laquelle la matrice de rigidité élémentaire $C_e^{(m)}$ peut être déterminée à partir de la relation de comportement :

$$\sigma_{ij} = K\ \epsilon_{kk}\ \delta_{ij} + 2\ G\ e_{ij} \qquad (38)$$

K et G étant respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement et ϵ_{kk} la valeur des déformations volumiques.

Afin d'étudier l'influence des phases consécutives de l'excavation sur les résultats, deux cas sont traités ; dans le premier, l'excavation est réalisée en une seule étape tandis que pour le deuxième, l'excacation est réalisée en trois étapes, couche après couche. La comparaison de la solution fournie à l'étape finale de l'excavation incrémentale avec celle où l'excavation est effectuée en une seule étape, vérifie la coïncidence entre les deux solutions. Sur la figure 3 on montre l'évolution des déplacements horizontaux à la limite verticale de l'excavation, qui vérifie le principe d'une solution unique ; la figure 4 présente le maillage déformé.

Exemple 2 : modèle élastique parfaitement plastique de VON MISES

Selon le critère de VON MISES la plastification ne commence que quand le deuxième invariant du tenseur déviatorique, J_2, atteint une valeur limite k, (éq. 39), dont la présentation graphique en I_1, $J_2^{1/2}$ est donnée sur la figure 5 :

$$f(\sigma_{ij}) = \sqrt{J_2} - k = 0 \qquad (39)$$

La relation incrémentale contraintes-déformations est donnée par l'équation 41 [5].

$$d\sigma_{ij} = 2\ G\ de_{ij} + K\ d\epsilon_{kk}\ d_{ij} - \frac{G\ S_{ij}\ de_{ij}}{K\ \sqrt{J_2}}\ S_{ij} \qquad (40)$$

à partir de laquelle on détermine la matrice C^{ep}.

Comme dans l'exemple précédent, une analyse incrémentale monotone a été effectuée. Les résultats principaux sont présentés sur les figures 6, 7, 8 et 9. Sur la figure 6, on voit l'état de contraintes aux points d'intégration à l'étape finale de l'excavation. Le maillage déformé final est donné sur la figure 7. La figure 8 montre l'évolution des déplacements horizontaux

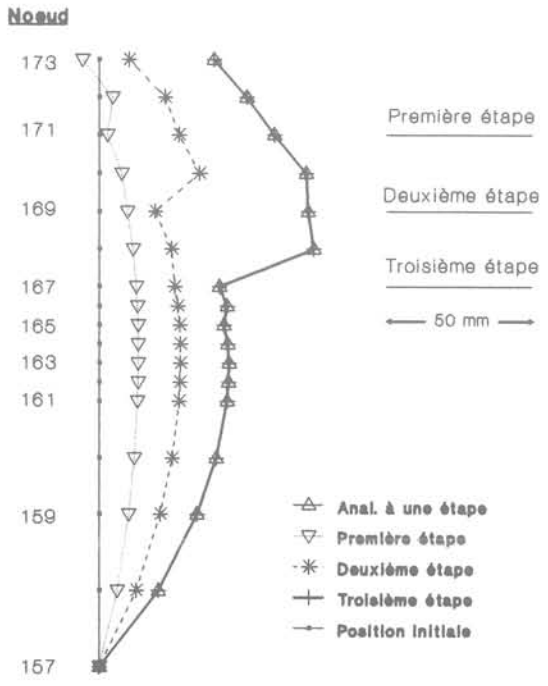
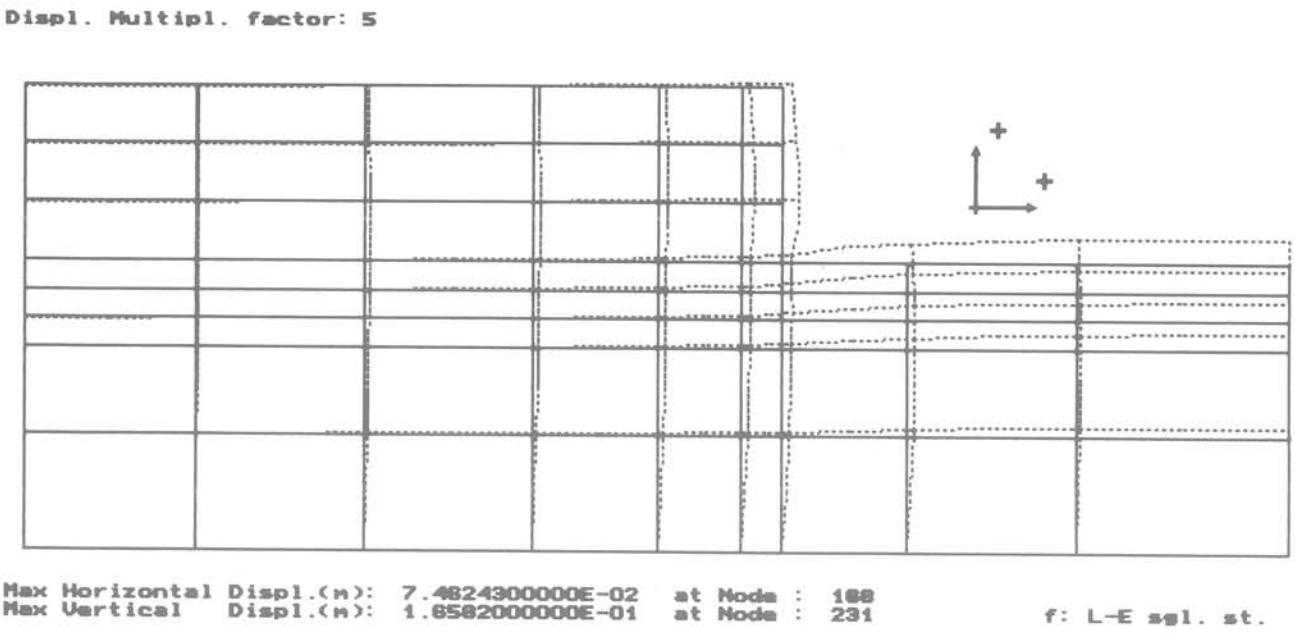
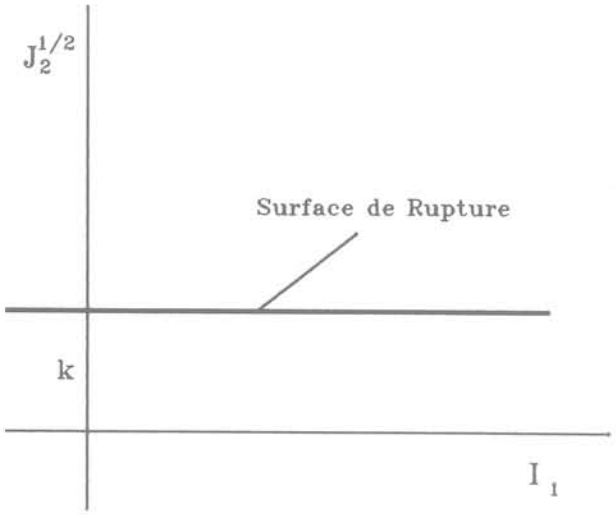


Fig. 3. — Exemple 1, évolution des déplacements horizontaux à la limite verticale de l'excavation.

Fig. 3. — Example 1, evolution of horizontal excavation induced displacement along the vertical excavation boundary.

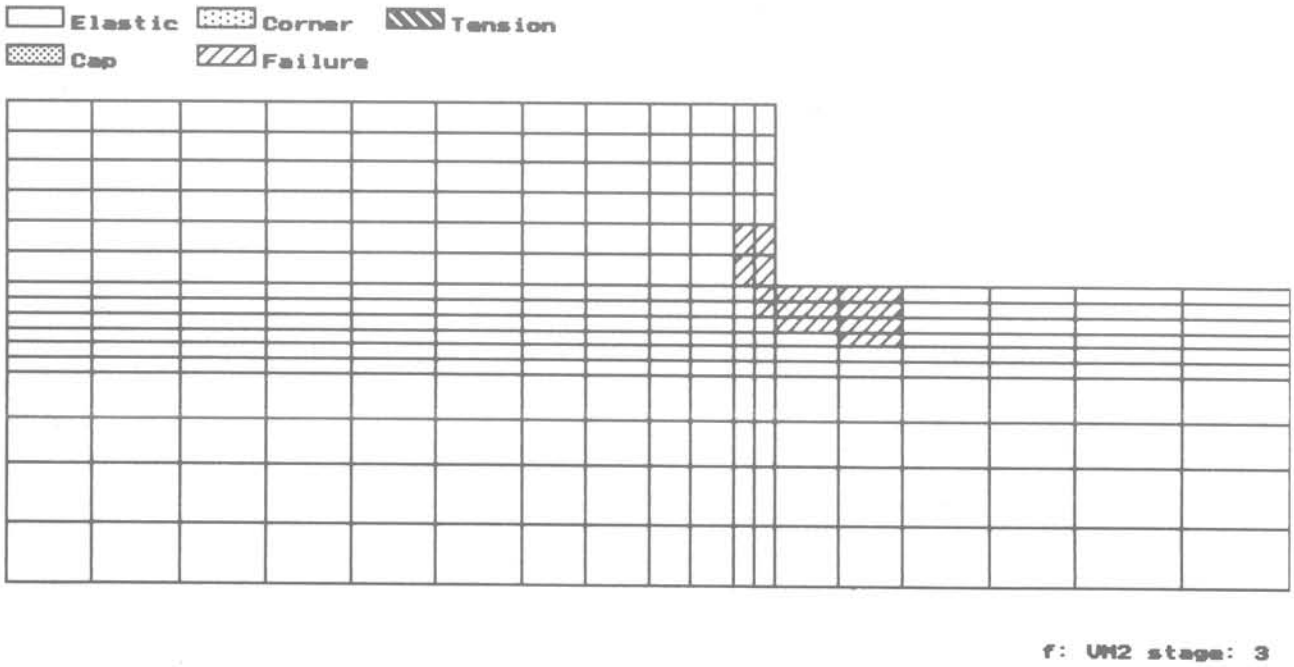


▲
Fig. 4. — Exemple 1, maillage final déformé (amplifié par un facteur égal à 5).
Fig. 4. — Example 1, final deformed mesh (exaggereted by a factor of 5).



◄
Fig. 5. — Critère de VON MISES.
Fig. 5. — VON MISES criterion.

Fig. 6. — Exemple 2, état de contraintes aux points d'intégration, étape 3.
Fig. 6. — Example 2, state of stress at integration points, stage 3.
▼



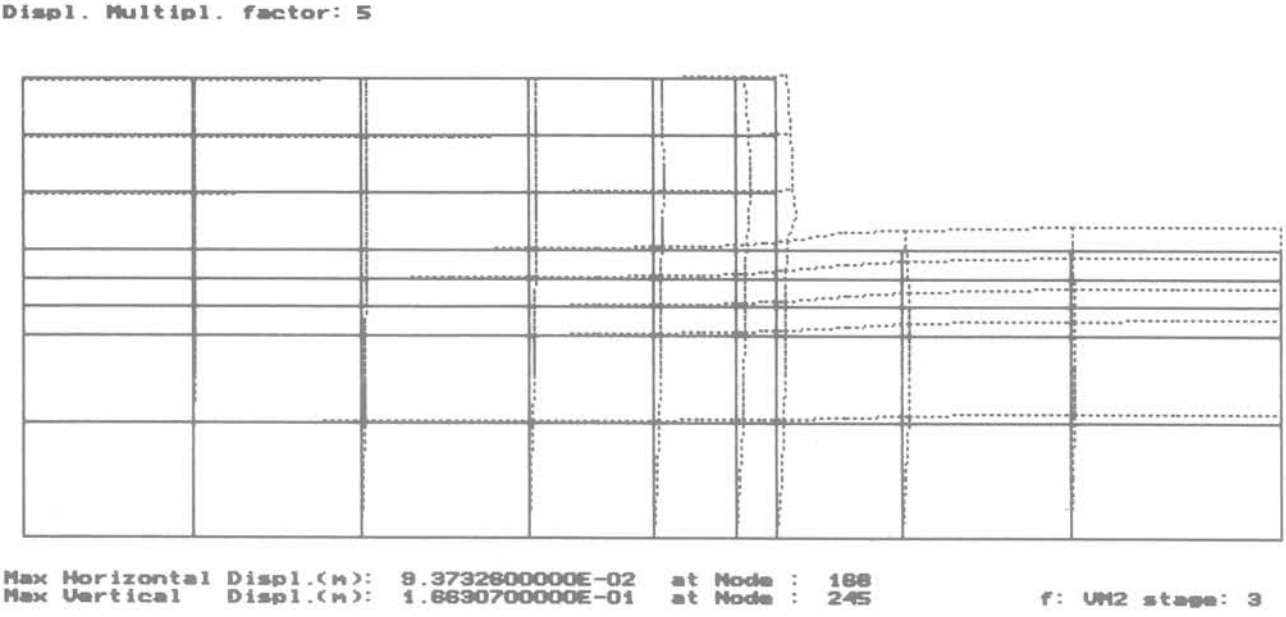


Fig. 7. — Exemple 2, maillage final déformé (amplifié par un facteur égal à 5).
Fig. 7. — Example 2, final deformed mesh (exaggereted by a factor of 5).

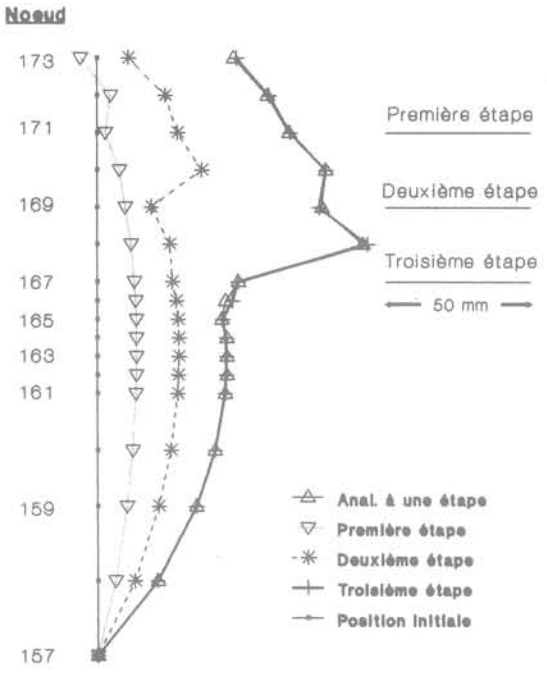


Fig. 8. — Exemple 2, évolution des déplacements horizontaux à la limite verticale de l'excavation.
Fig. 8. — Example 2, evolution of horizontal excavation induced displacements along the vertical excavation boundary.

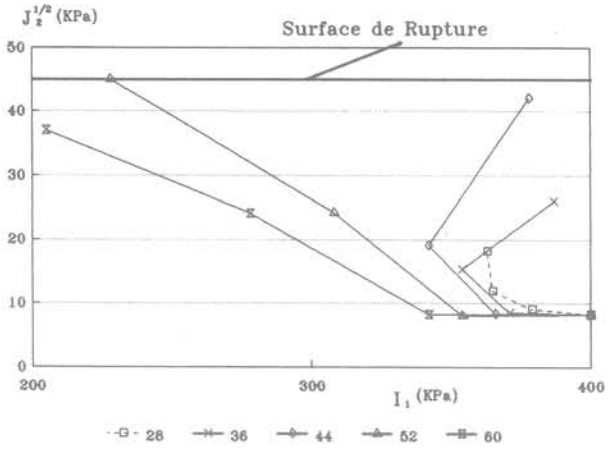


Fig. 9. — Exemple 2, chemins des contraintes.
Fig. 9. — Example 2, stress paths.

à la frontière verticale de l'excavation, alors que sur la figure 9 on peut suivre les chemins des contraintes de quelques éléments caractéristiques pendant l'évolution de l'excavation.

La comparaison de ces deux dernières analyses montre une certaine différence entre les solutions finales, qui peut être imputée à la différence entre l'incrément de déformation produit aux éléments plastifiés. Les déplacements calculés à la frontière verticale sont plus grands que ceux de l'élasticité linéaire à cause de la diminution de la rigidité élémentaire des éléments plastifiés.

Exemple 3 : modèle élastique parfaitement-plastique de DRUCKER-PRAGER

La différence principale du critère de DRUCKER-PRAGER par rapport à celui de VON MISES consiste en la prise en compte du premier invariant des contraintes, I_1, qui transforme l'équation 39 par l'équation 41 et la figure 5 par la figure 10.

$$f(\sigma_{ij}) = \sqrt{J_2} - k - a\, I_1 = 0 \qquad (41)$$

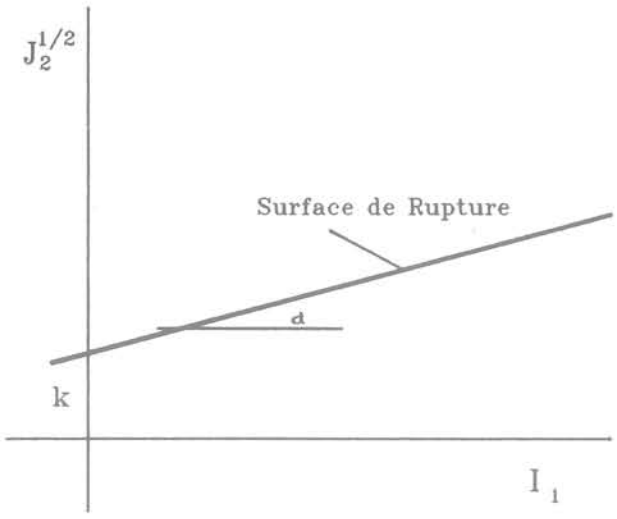


Fig. 10. — Critère de Drucker-Prager.
Fig. 10. — Drucker-Prager criterion.

La relation contraintes-déformations est donnée par l'équation 42.

$$d\sigma_{ij} = 2\,G\,de_{ij} + K\,d\epsilon_{kk}\,d_{ij} - \lambda \left[\frac{G}{\sqrt{J_2}}\,S_{ij} + 3\,K\,a\,\delta_{ij}\right] \qquad (42)$$

dans laquelle λ exprime le multiplicateur plastique qui est égal à :

$$\lambda = \frac{\frac{G}{J_2}\,S_{ij}\,de_{ij} + 3\,K\,a\,d\epsilon_{kk}}{G + 9\,K\,a^2} \qquad (43)$$

La matrice C^{ep} est construite à partir de ces deux équations. Le modèle de DRUCKER-PRAGER peut être utilisé pour décrire les sols pulvérulents. Il présente une dilatation continue sans limite, égale à $d\epsilon^p_{kk} = 3\alpha\lambda$.

Les résultats principaux sont présentés sur les figures 11, 12, 13, 14, 15 et 16. Les figures 11, 12, 13 indiquent l'état de contraintes aux points d'intégration des éléments pendant l'évolution des étapes de l'excavation. Le maillage déformé final est donné par la figure 14. La figure 15 montre l'évolution des déplacements horizontaux à la frontière verticale de l'excavation, alors que sur la figure 16 on peut suivre quelques chemins des contraintes pendant l'évolution des étapes.

Exemple 4 : modèle élastoplastique avec écrouissage isotrope type CAP

Dans cet exemple on utilise le critère de DRUCKER-PRAGER associé avec le modèle CAP, (fig. 17). Le modèle comprend une surface de rupture de type DRUCKER-PRAGER et une surface de chargement elliptique, exprimées par l'équation 44, qui délimitent le domaine d'élasticité. La surface de chargement peut se déplacer selon la fonction d'écrouissage donnée par l'équation 45.

$$H(I_1, \sqrt{J_2}, g) = \sqrt{J_2} - \frac{1}{R}\{[X(g) - L(g)]^2 - [I - L(g)]^2\}^{1/2} \qquad (44)$$

$$g = \epsilon^p_{kk} = W\,\{1 - \exp\,[-D\,X(g)]\} \qquad (45)$$

ϵ^p_{kk} étant la valeur des déformations volumiques plastiques et D, W, R les paramètres du matériau.

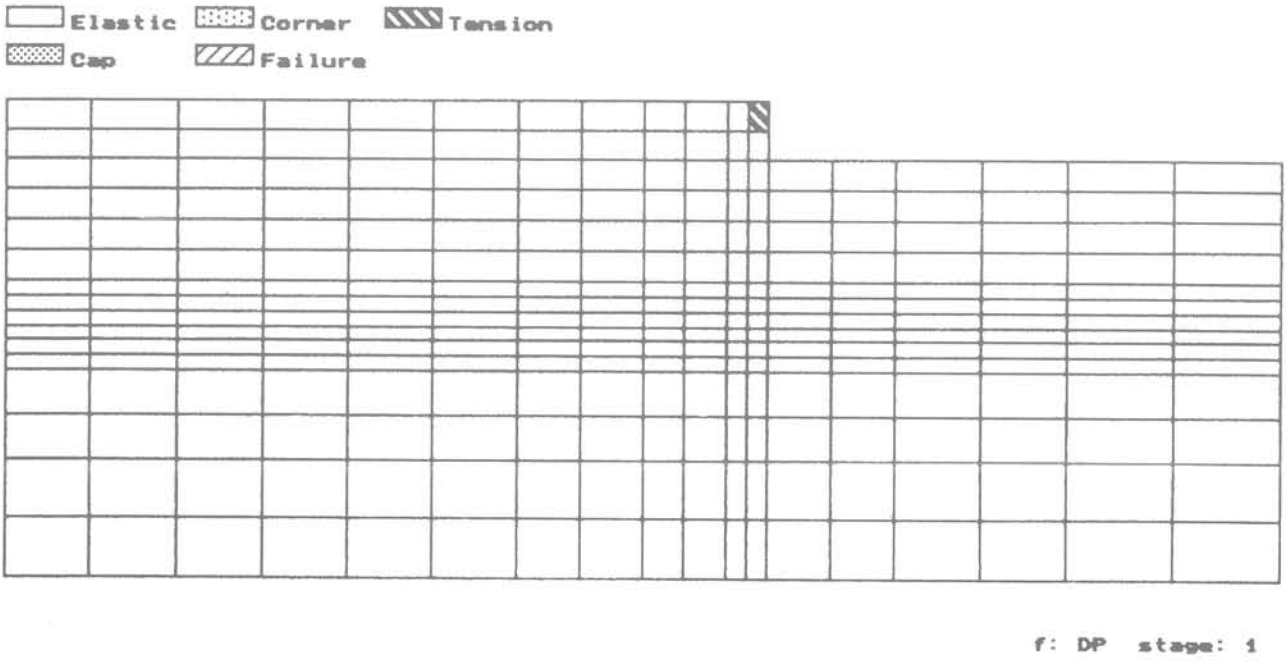


Fig. 11. — Exemple 3, état de contraintes aux points d'intégration, étape 1.
Fig. 11. — Example 3, state of stress at integration points, stage 1.

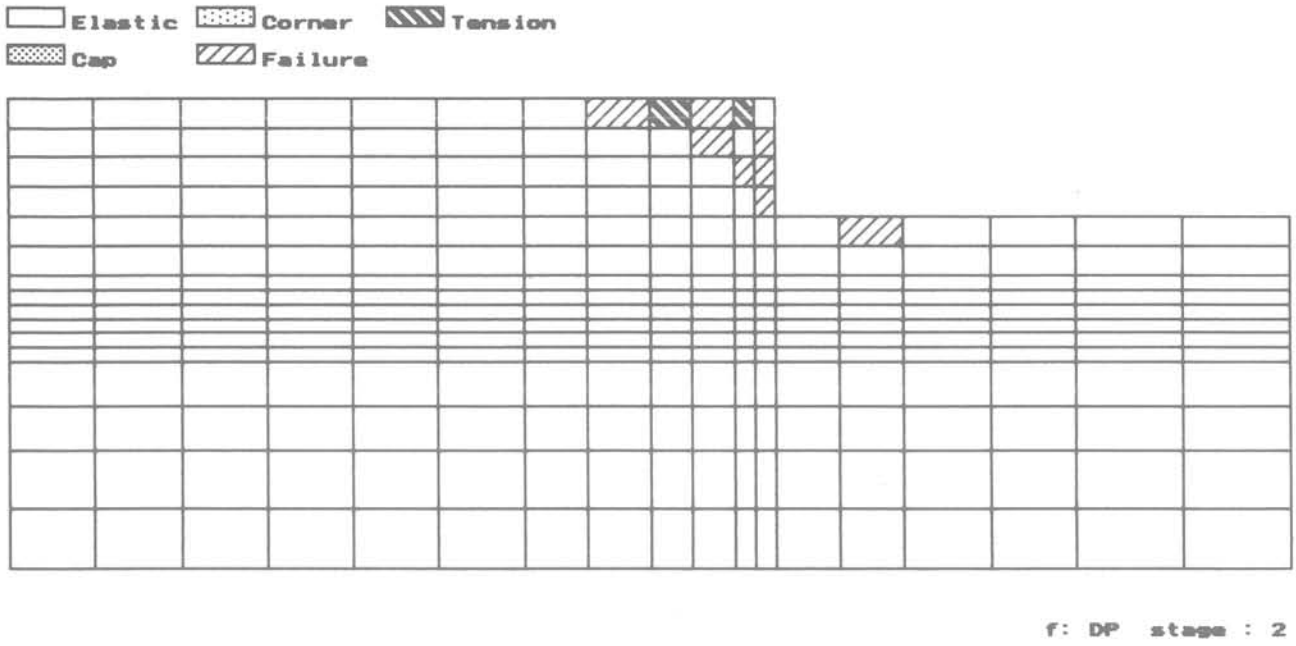


Fig. 12. — Exemple 3, état de contraintes aux points d'intégration, étape 2.
Fig. 12. — Example 3, state of stress at integration points, stage 2.

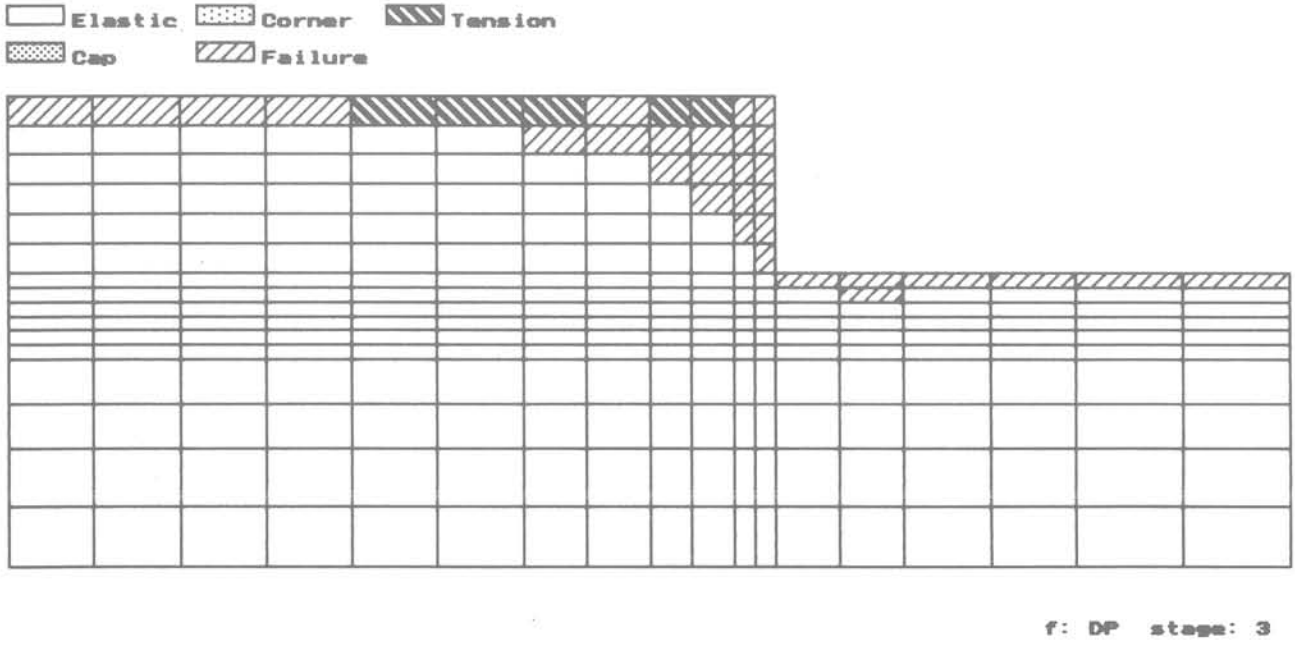


Fig. 13. — Exemple 3, état de contraintes aux points d'intégration, étape 3.
Fig. 13. — Example 3, state of stress at integration points, stage 3.

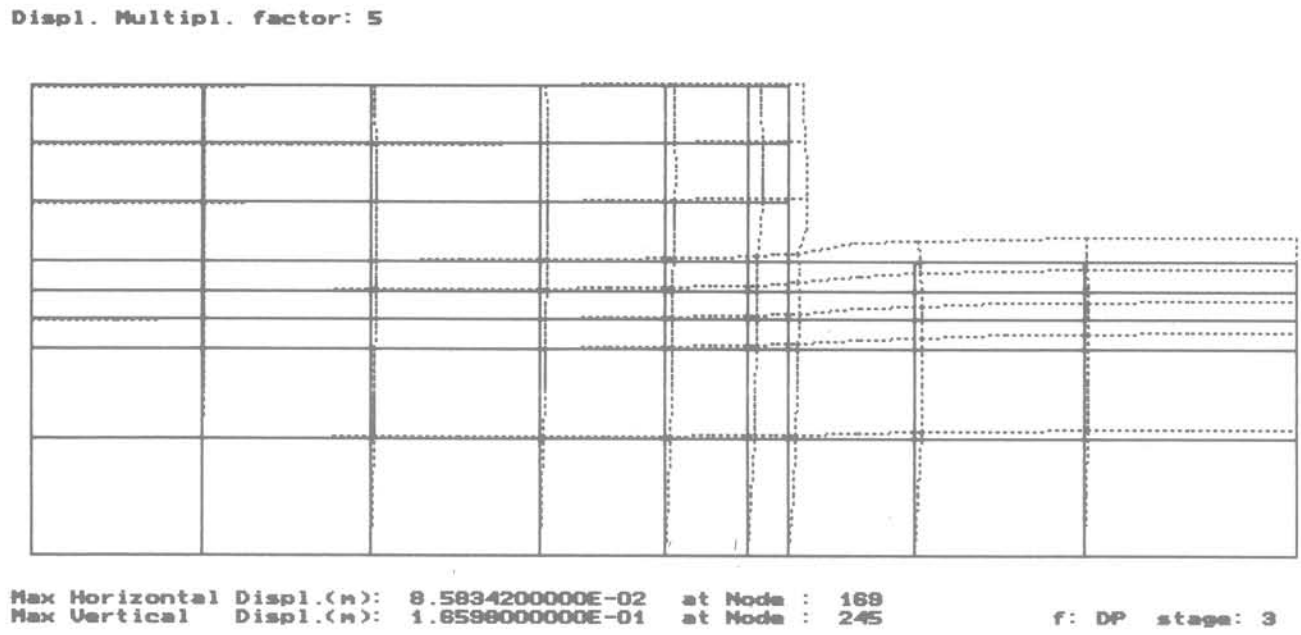


Fig. 14. — Exemple 3, maillage final déformé (amplifié par un facteur égal à 5).
Fig. 14. — Example 3, final deformed mesh (exaggereted by a factor of 5).

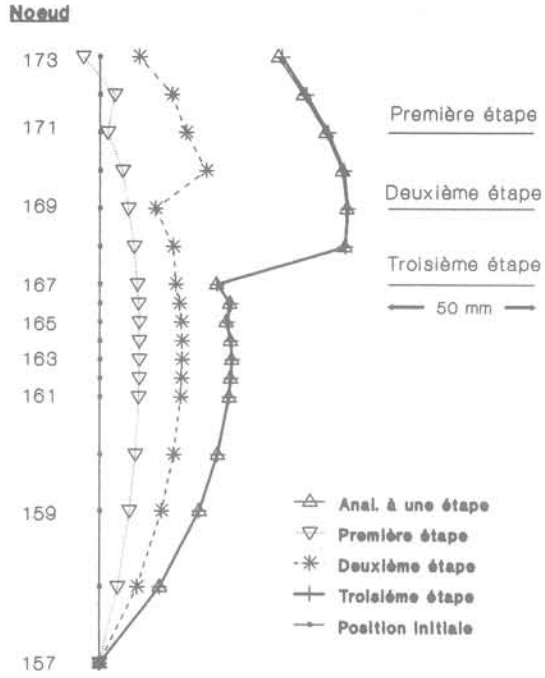


Fig. 15. — Exemple 3, évolution des déplacements horizontaux à la limite verticale de l'excavation.
Fig. 15. — Example 3, evolution of horizontal excavation induced displacements along the vertical excavation boundary.

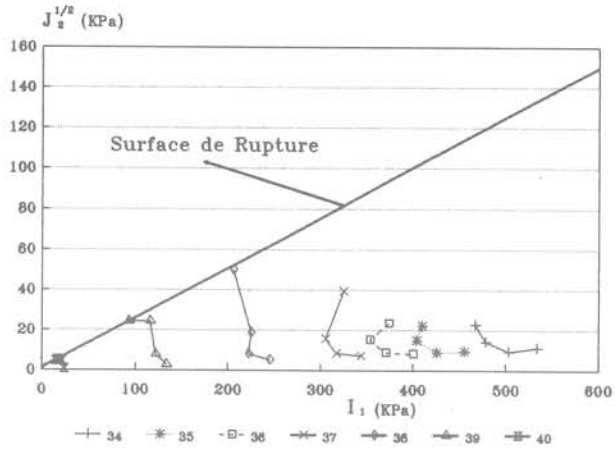


Fig. 16. — Exemple 3, chemins des contraintes.
Fig. 16. — Example 3, stress paths.

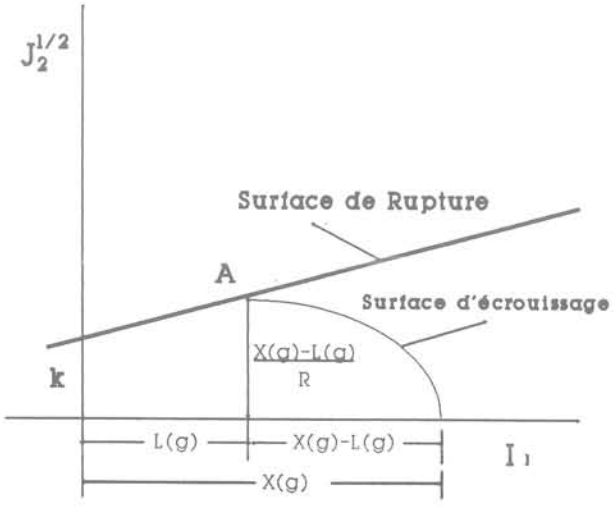


Fig. 17. — Représentation schématique du modèle CAP.
Fig. 17. — Schematic presentation of CAP model.

Le concept de ce modèle a été établi sur la notion de la « densité critique » [3], selon laquelle le matériau se contracte (ou se dilate selon son état initial) jusqu'à ce qu'il atteigne une déformation volumique constante qui est sa valeur caractéristique critique. La satisfaction de cette notion se justifie par la terminaison du chemin des contraintes, après que le matériau se soit dilaté (pénétration de la surface de rupture) ou contracté (pénétration de la surface elliptique) au point A, figure 17, qui détermine la variation de déformations volumiques plastiques nulle.

Nous avons traité le même problème d'excavation que celui des trois exemples précédents. Les résultats principaux de l'analyse avec le modèle du type CAP sont présentés sur les figures 18, 19, 20, 21, 22 et 23. Les figures 18, 19, 20 indiquent l'évolution de l'état des contraintes pendant l'excavation, et la figure 21

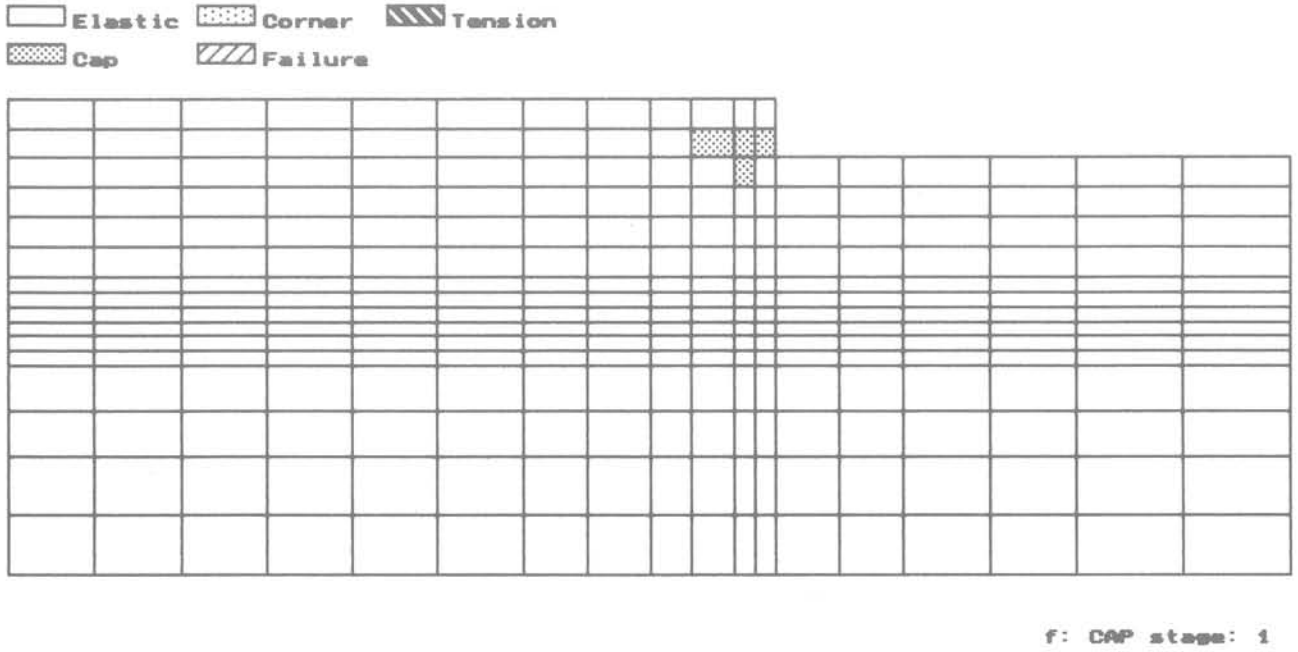


Fig. 18. — Exemple 4, état de contraintes aux points d'intégration, étape 1.
Fig. 18. — Example 4, state of stress at integration points, stage 1.

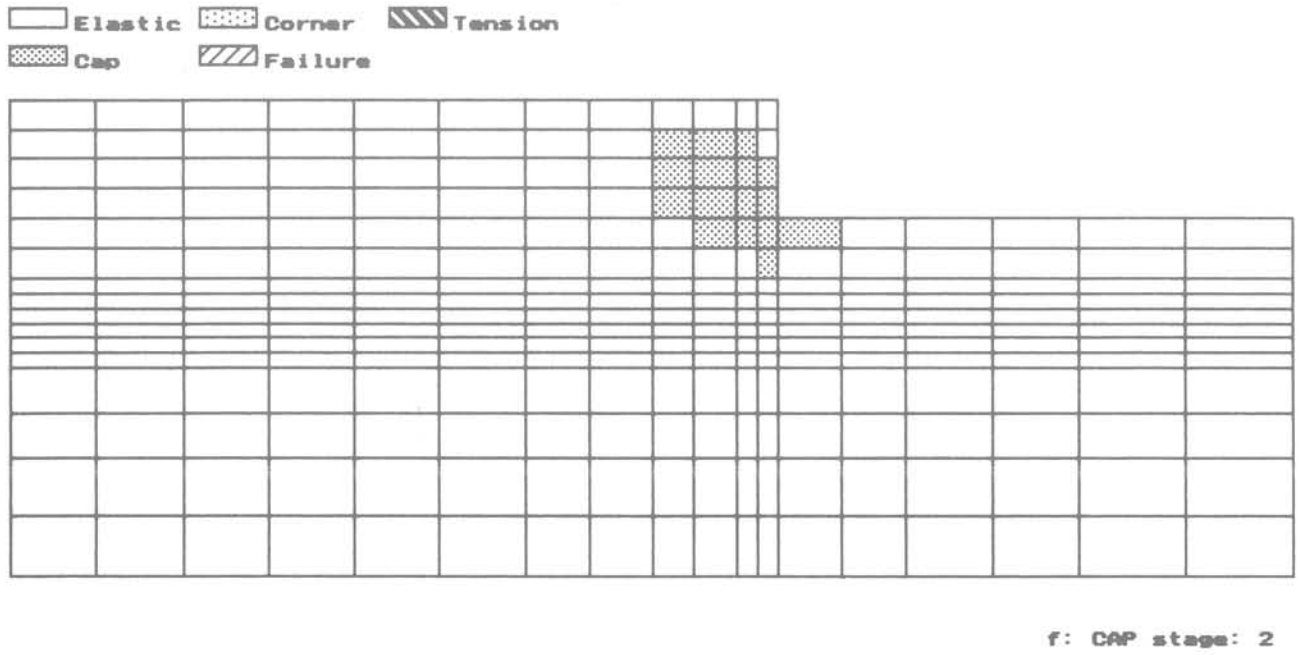


Fig. 19. — Exemple 4, état de contraintes aux points d'intégration, étape 2.
Fig. 19. — Example 4, state of stress at integration points, stage 2.

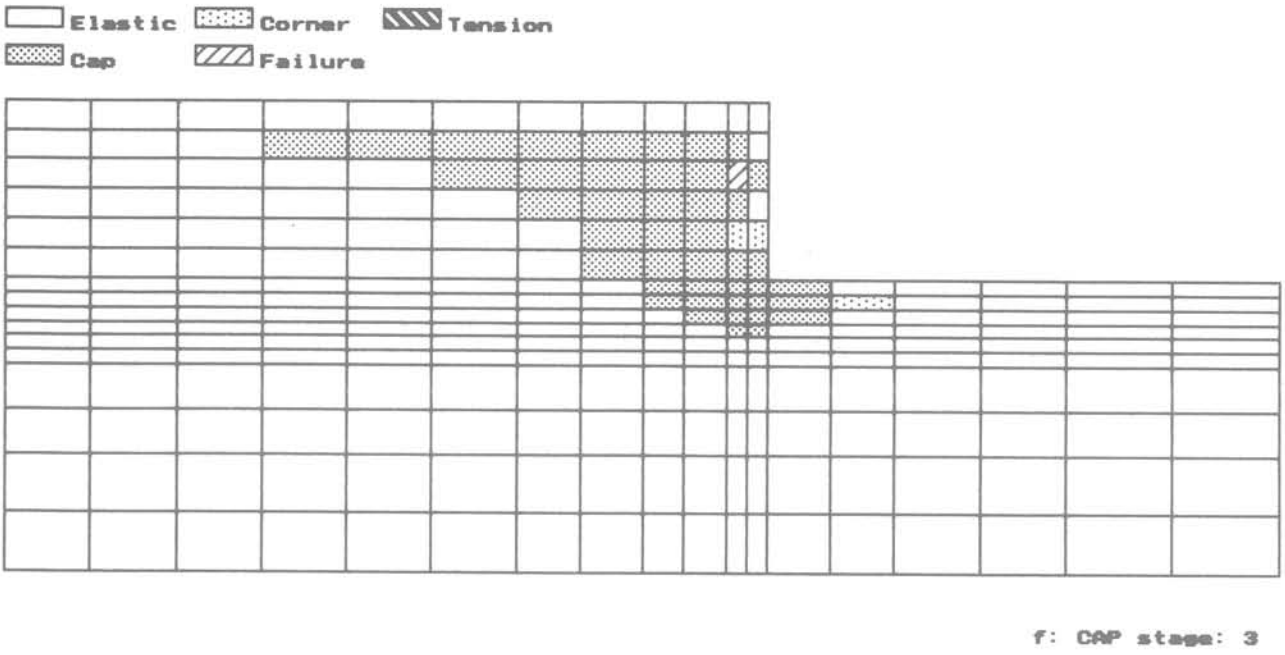


Fig. 20. — Exemple 4, état de contraintes aux points d'intégration, étape 3.
Fig. 20. — Example 4, state of stress at integration points, stage 3.

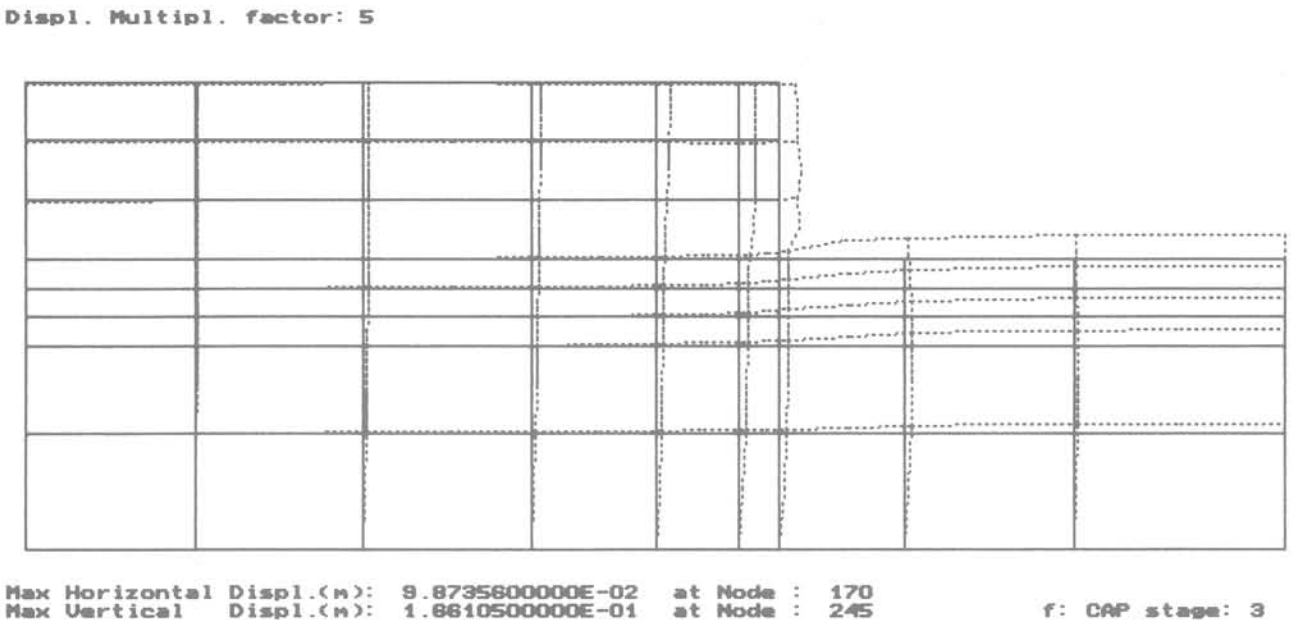


Fig. 21. — Exemple 4, maillage final déformé (amplifié par un facteur égal à 5).
Fig. 21. — Example 4, final deformed mesh (exaggereted by a factor of 5).

présente le maillage déformé. Sur la figure 22, l'évolution des déplacements horizontaux de la frontière de l'excavation est présentée, tandis que la figure 23 montre le chemin des contraintes du quatrième point d'intégration des éléments 34, 35, 36, 37, 38, 39 et 40.

5. DISCUSSION

La figure 24 présente une comparaison des déplacements horizontaux de la solution finale fournie par l'analyse en élasticité linéaire, celle en élastoplasticité parfaite (DRUCKER-PRAGER) et celle en élastoplasticité avec écrouissage (CAP). De la plastification des éléments, qui conduit à une diminution de la rigidité globale résulte une augmentation des déplacements par rapport à l'élasticité linéaire.

A cause de la délimitation du domaine élastique, le modèle CAP présente une sensibilité particulière par rapport au modèle de DRUCKER-PRAGER. Cette sensibilité peut être expliquée par la figure 25, où l'on observe que des chemins de contraintes, comme

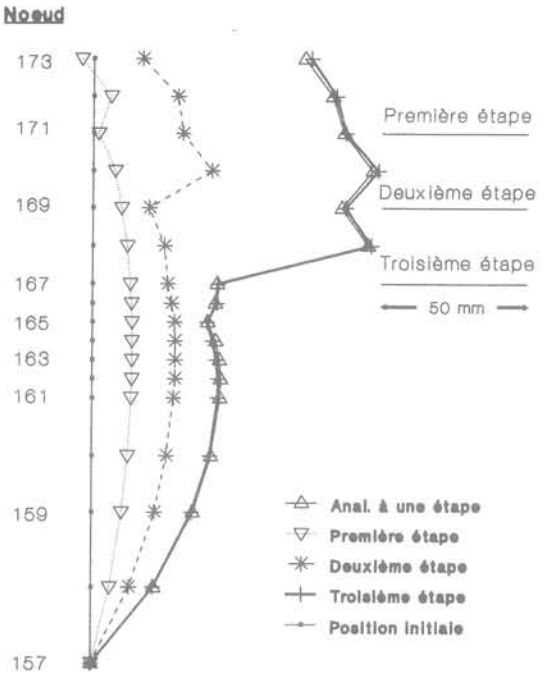


Fig. 22. — Exemple 4, évolution des déplacements horizontaux à la limite verticale de l'excavation.
Fig. 22. — Example 4, evolution of horizontal excavation induced displacements along the vertical excavation boundary.

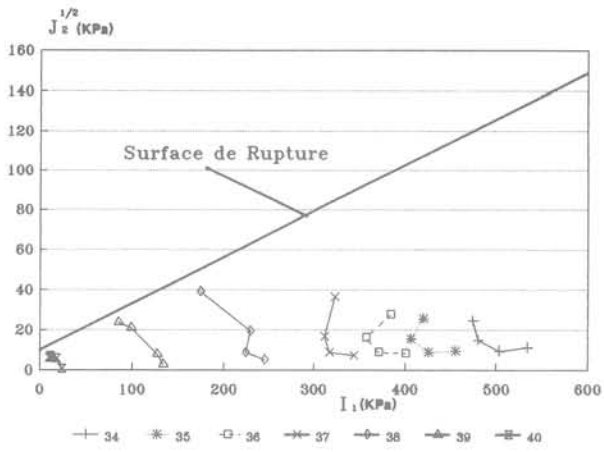


Fig. 23. — Exemple 4, chemins des contraintes.
Fig. 23. — Example 4, stress paths.

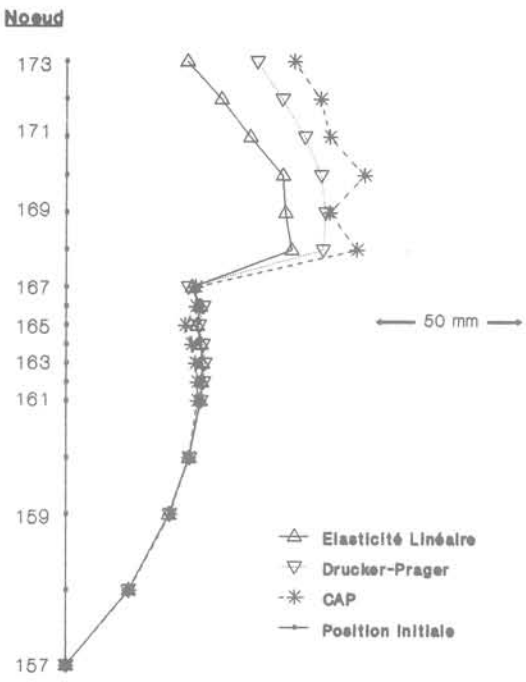


Fig. 24. — Comparaison des solutions finales élastiques-linéaires, Drucker-Prager et du modèle CAP.
Fig. 24. — Comparison of linear-elastic, Drucker-Prager and CAP final solutions.

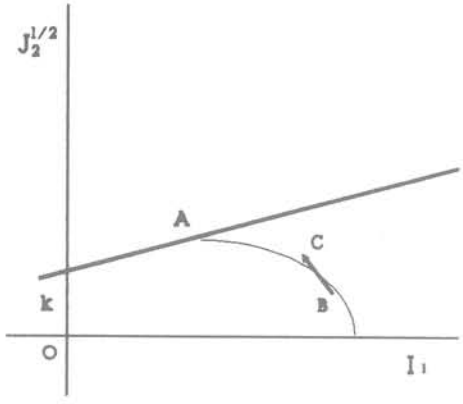


Fig. 25. — Chemin des contraintes élastique linéaire pour le modèle Drucker-Prager mais élastoplastique avec écrouissage pour le CAP.
Fig. 25. — Linear elastic stress path for the Drucker-Prager model but plastic with hardening in the case of CAP.

ceux des éléments 36, 37, 38, 39, 40 (voir fig. 20, 23), provoquent un comportement élastique linéaire pour l'analyse DRUCKER-PRAGER, mais plastique avec écrouissage dans le cas de l'analyse CAP. Cet événement provoque une diminution de sa matrice de rigidité globale si bien que le CAP donne des déplacements plus grands.

Sur les figures 26, 27 on peut observer les déplacements des nœuds 168 et 173, étape par étape, dans les trois cas et les comparer avec ceux qui correspondent à une seule étape. On constate une petite différence dans le cas élastoplastique.

6. CONCLUSION

Un algorithme, dans le contexte de la méthode des éléments finis, pour la simulation des excavations a été proposé. Grâce à l'utilisation du principe des travaux virtuels les équations non-linéaires, de l'algorithme proposé, sont dérivées d'une formulation variationelle qui tient en compte la variation du domaine initial. Les résultats obtenus par les analyses numériques effectuées nous amènent aux conclusions suivantes :

— le principe de la solution unique est satisfait dans le cas de l'élasticité linéaire ;

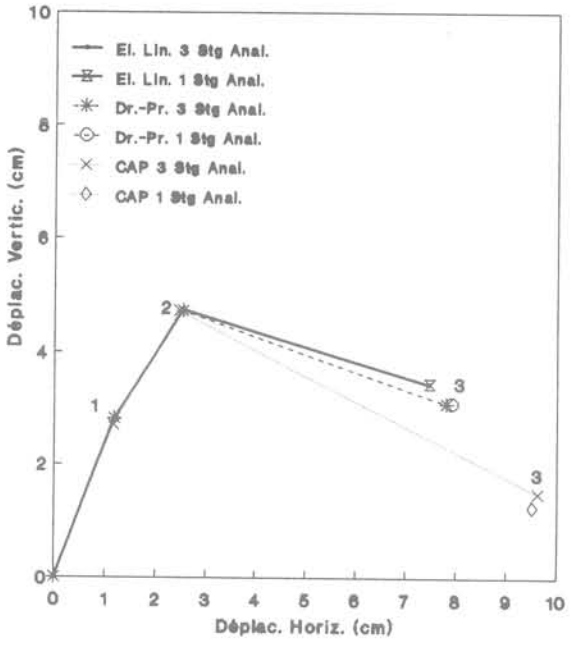


Fig. 26. — Comparaison des déplacements du nœud 168 en analyse élastique linéaire, Drucker-Prager et CAP.
Fig. 26. — Comparison of displacements of node 168 produced by a linear elastic, Drucker-Prager and CAP analysis

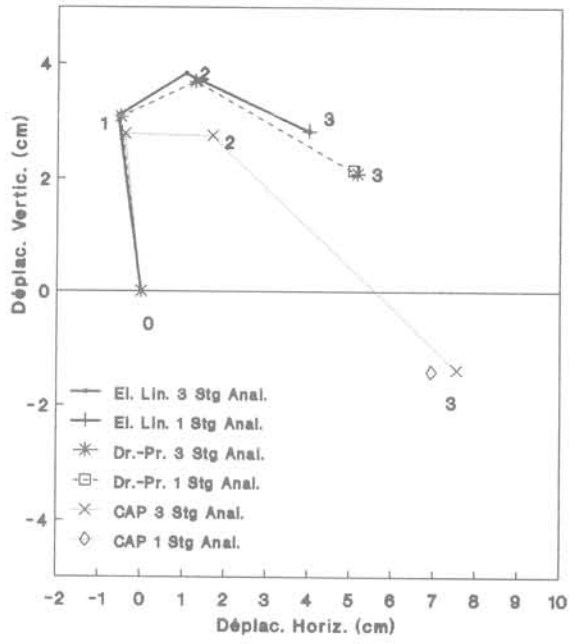


Fig. 27. — Comparaison des déplacements du nœud 173 en analyse élastique linéaire, Drucker-Prager et CAP
Fig. 27. — Comparison of displacements of node 173 produced by a linear elastic, Drucker-Prager and CAP analysis.

— l'algorithme proposé garantit que le travail intérieur produit par les éléments faisant partie du domaine de l'excavation est nul ;

— l'analyse numérique des exemples élastoplastiques de divers critères de plastification nous a montré que la même solution peut être atteinte, indépendamment du nombre des étapes. Cependant, quand on approche la rupture, qui se manifeste par la mise en plasticité d'un grand nombre des éléments, on observe une petite différence entre les deux solutions. Dans ce cas l'analyse en une seule étape par ses propres principes ne peut pas prendre en compte la redistribution progressive des contraintes ainsi que la modification de la topologie du maillage et par conséquent on doit simuler l'excavation en plusieurs étapes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BATHE K.J., WILSON E.L. (1976), *Numerical methods in finite element analysis.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

[2] BORJA R.I., LEE S.R., SEED R.B. (1989), *Numerical simulation of excavation in elastoplastic soils.* Int. J. Num. Anal. Meth. in Geomech., vol. 13, 231-249.

[3] CASAGRANDE A. (1936), *Characteristics of cohesionless soils affecting the stability of slopes and earth fills.* J. Boston Soc. Civil Eng., pp. 257-276.

[4] CHANG C.Y., DUNCAN J.M. (1970), *Analysis of soil movement around a deep excavation.* J. Soil Mech. Found. Division, ASCE, vol. 96, No SM5, 1655-1681.

[5] CHEN W.F., BALADI G.Y. (1986), *Soil plasticity-Theory and implementation.* Elsevier Science Publishing Company, Inc. NY.

[6] CHRISTIAN J.T., WONG I.H. (1973), *Errors in simulation of excavation in elastic media by finite elements.* Soils Foundations, vol. 13, No 1, pp. 1-10.

[7] CLOUGH G.W., MANA A.I. (1976), *Lessons learned in finite element analysis of temporary excavations.* in Proc. 2nd Int. Conf. on Numer. Meth. in Geomech., ASCE, Blacksburg, VA.

[8] COMODROMOS E., HATZIGOGOS T., PITILAKIS K. (1990), *Finite element excavation in elastoplastic soils.* in Proc. 2nd Eur. Spec. Numer. Meth. Geotech. Eng., Santander, Spain.

[9] DESAI C.S., SANGRAND S. (1984), *Hybrid FE procedure for soil-structure interaction.* J. Geotech. Eng., (ASCE), vol. 110, pp. 473-486.

[10] DESAI C.S., SIRIWARDANE H.J. (1984), *Constitutive laws for engineering materials with emphasis on geological materials.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ 07632.

[11] DHATT G., TOUZOT G. (1984), *Une présentation de la méthode des éléments finis.* 2e édition, collection de l'Université de Compiègne, Ed. Maloine SA, Paris.

[12] DUNCAN J.M., CHANG C.Y. (1970), *Nonlinear analysis of stress and strain in soils.* J. Soil Mech. Found. Division, ASCE, vol. 96, No SM5, 1629-1653.

[13] DUNCAN J.M., DUNLOP P. (1969), *Slopes in stiff fissured clay and shales.* J. of S. Mech.

Found. Div. ASCE, vol. 95, No SM2, pp. 81-104.

[14] DUNLOP P., DUNCAN J.M. (1970), *Development of failure around excavated slopes.* J. Soil Mech. Found. Div., ASCE, vol. 96, SM2, pp. 471-493.

[15] GHABOUSSI J., PECKNOLD D.A. (1984), *Incremental finite element analysis of geometrically altered structures.* Int. J. Numer. Meth. Eng., 20, 2051-2064.

[16] HUANG T.K., CHEN W.F. (1990), *Simple procedure for determining cap-plasticity-model-parameters.* J. Geotech. Eng. Div., ASCE, Vol. 116, No. 3, pp. 492-513.

[17] HUMPREY D.N., HOLTZ R.D. (1988), *Cap parameters for clayey soils.* In Proc. Numerical Meth. in Geomech. Vol. 1, Innsbruck, Swoboda (ed.), Balkema Press, Rotterdam, pp. 441-446.

[18] ISHIHARA K. (1970), *Relations between process of cutting and uniqueness of solutions.* Soils and Foundations, vol. 10, No 3, pp. 50-65.