

modèle de comportement du sable au cisaillement dans un état tridimensionnel de contrainte et de déformation

model of sand behaviour towards shearing
in three dimensional conditions of stress and deformation

S. CHAFFOIS

Chercheur, Laboratoire de géotechnique, I.N.S.A.*

J. MONNET

Maître-assistant, I.R.I.G.M., U.S.M.G.**

Résumé

Le modèle théorique qui est présenté, s'intéresse au comportement du sable pendant un essai de cisaillement triaxial vrai. L'intérêt principal de cette formulation réside dans le nombre limité de paramètres (5) qui se ramènent toujours à une signification physique.

Le sol est supposé obéir à un comportement élastique, en écrouissage durcissant et à une plasticité parfaite «non standard». On vérifie que l'énergie de déformation supposée correspond à l'énergie réellement dissipée pendant l'écrouissage. On fait également un parallèle entre cette théorie des milieux continus et une théorie de milieu discret.

Enfin une comparaison est menée entre les résultats théoriques calculés pour différents chemins de contrainte et les résultats expérimentaux correspondants.

Abstract

The theoretical model is related to the sand behavior when true triaxial shearing occurs. The main interest is the low number of parameters. This model uses only five parameters which are related to physical meaning.

The shearing behavior of the soil is assumed to be elastic, then plastic, with work hardening, and with non-associated flow rule. The theoretical dissipated work is shown to fit with the real one. A comparison takes place between the continuous mechanic theory and the discontinuous one.

Theoretical results of the true triaxial test are compared with the experimental ones for different stress paths.

* 69621 Villeurbanne Cedex.

** B.P. 53, 38401 Grenoble Cedex.

1. INTRODUCTION

La détermination classique du comportement effort-déformation d'un sol est réalisée au laboratoire par des essais triaxiaux à symétrie axiale de révolution. Cependant, dans un grand nombre de cas, le sol est soumis à un état tridimensionnel de contrainte et de déformation (pieux isolés et soutènement par pieux non jointifs, murs cellulaires, tirants d'ancrages, etc.) dans lequel l'influence du cisaillement est primordiale. On continue cependant à caractériser le sol par des lois de comportement et des paramètres mécaniques déterminés par des essais triaxiaux classiques.

Le développement de moyens sophistiqués de calcul par la méthode des éléments finis, impose de tendre à une cohérence entre les hypothèses de calcul adoptées et les lois traduisant le comportement mécanique des sols.

Les modèles théoriques exprimant le comportement du sol pendant l'état triaxial vrai sont :

— d'une part, des lois incrémentales comme celles de DARVE (1974), ROBINET et al. (1982) qui utilisent de nombreux paramètres mathématiques, et qui nécessitent des essais de laboratoires pour réaliser le calage du modèle ;

— d'autre part, des lois élastoplastiques complexes, comme celles de LADE et al. (1972) et AUBRY et al. (1982).

Tous ces modèles utilisent neuf à vingt-deux paramètres.

Nous présentons ici une loi à cinq paramètres utilisable au cisaillement du sol pulvérulent à dilatance positive dans un état tridimensionnel de contrainte.

2. THÉORIE DU COMPORTEMENT DU SOL PENDANT L'ÉTAT TRIDIMENSIONNEL VRAI DU SOL

De même qu'au cours du cisaillement en symétrie axiale (MONNET et al. 1979) et en déformation plane (MONNET, 1983), il est supposé que le sol réagit d'abord élastiquement, puis, à partir du minimum de volume expérimental (correspondant à l'état caractéristique mis en évidence par LUONG, 1978), on fait l'hypothèse d'une plastification progressive du sol, accompagné d'une dilatance. Ce phénomène est un écoulement, et le minimum de volume correspond au début de la plasticité du modèle. Enfin, lorsque le cisaillement maximum est atteint, il se produit un écoulement plastique parfait.

Tous les phénomènes de plasticité que ce soit pendant l'écrouissage ou à l'équilibre limite sont des écoulements « non standard », les incréments de déformation plastique n'étant pas dans l'espace des contraintes perpendiculaires à la surface de charge.

2.1. Comportement en élasticité

Il est donné par les relations classiques de l'élasticité linéaire et nécessite la connaissance du module d'élasticité (E) et du coefficient de Poisson (ν) constants. Ce comportement est suffisant pour représenter le cisaillement monotone du sol. On a :

$$\{\varepsilon\} = [E] \{\sigma\}$$

avec : $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$ déformations principales.

$$1/E - \nu/E - \nu/E$$

$$[E] = - \nu/E \quad 1/E - \nu/E$$

$$- \nu/E - \nu/E \quad 1/E$$

$\{\sigma\}^T = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ contraintes principales.

2.2. Comportement du sol en écoulement durcissant

2.2.1. Seuil de plasticité du modèle

Par rapport aux modèles précédents en symétrie axiale et en déformation plane, il apparaît nécessaire de faire varier le niveau de cisaillement au seuil d'écrouissage du modèle en fonction de la direction du cisaillement dans le plan octaédrique. Dans le plan octaédrique, le seuil de plasticité correspond à la courbe intérieure montrée figure 1 dont l'équation est une relation analogue à ce que propose Lade (1972) pour l'état limite :

$$f_1(\sigma) = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^3 - L_1 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad (1)$$

avec le paramètre constant L_1 .

$f_1(\sigma)$ est négatif en élasticité,

$f_1(\sigma)$ est nul au seuil d'écrouissage.

Dans le plan octaédrique la formule (1) correspond à la courbe intérieure montrée figure 1.

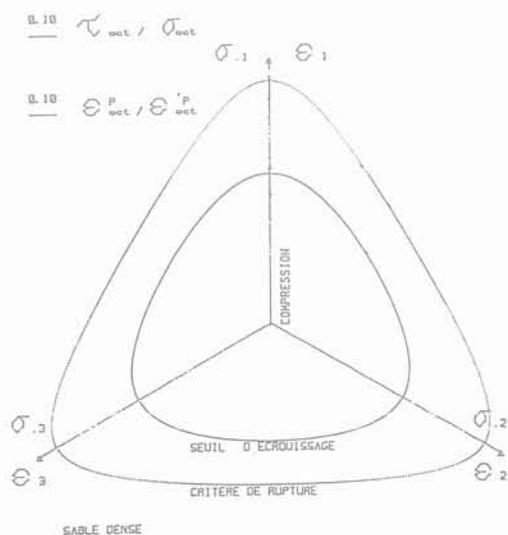


Fig. 1. — Les courbes correspondant au seuil d'écrouissage et à la rupture.

Au point A, l'état de contrainte est celui de l'essai triaxial de révolution pour lequel on a la relation 2 :

$$-\tau_{oct}/\sigma_{oct} = \text{tg } \phi_{\mu} \quad (\phi_{\mu} \text{ frottement intergranulaire}) \quad (2)$$

$$\text{et } \tau_{oct} = 1/3 \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ = (\sigma_3 - \sigma_1) \sqrt{2/3}$$

$$\sigma_{oct} = 1/3.(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = (\sigma_1 + 2\sigma_3)/3$$

et $0 > \sigma_2 = \sigma_3 > \sigma_1$ en compression.

avec $|\sigma_1| > |\sigma_3|$

$$\text{On a donc: } -(\sigma_3 - \sigma_1) \sqrt{2/3} / (\sigma_1 + 2\sigma_3) = \text{tg } \phi_{\mu}$$

$$\text{d'où: } \sigma_1 = \frac{(\sqrt{2} + \text{tg } \phi_{\mu})}{\sqrt{2} - \text{tg } \phi_{\mu}} \sigma_3 = k_1 \sigma_3$$

$$\text{et } L_1 = (\sigma_1 + 2\sigma_3)^3 / \sigma_1 \cdot \sigma_3^2 = (k_1 + 2)^3 / k_1$$

qui donne l'équivalence entre l'angle de frottement intergranulaire ϕ_{μ} et le paramètre L_1 de Lade pour l'essai triaxial de révolution.

L'angle ϕ_{μ} est une caractéristique physique du matériau et correspond au frottement solide du matériau sur lui-même.

Entre le point A et le point B, l'état de contrainte est complètement tridimensionnel. On remarque sur la figure 1 que le frottement dans le plan octaédrique varie en fonction de la direction γ du cisaillement. On notera α le terme :

$$-\frac{\tau_{oct}}{\sigma_{oct}} = \alpha \leq \text{tg } \phi_{\mu}$$

La direction du cisaillement est donnée par :

$$\text{tg } \gamma = \sqrt{3} (\sigma_2 - \sigma_3) / (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) \quad (3)$$

α est fonction de la direction γ du cisaillement dans le plan octaédrique.

Les formules 1 et 3 connaissant σ_3 permettent de trouver la valeur de α quand la direction du cisaillement varie.

2.2.2. Incrément d'énergie de déformation

Au-delà du seuil de plasticité pendant l'érouissage, il se produit des incréments de déformations qui sont totalement plastiques. Les déformations élastiques sont négligées et la variation d'énergie s'écrit alors :

$$dW_0 = \sigma_1 d\epsilon_1^p + \sigma_2 d\epsilon_2^p + \sigma_3 d\epsilon_3^p$$

et aussi

$$dW_1 = 3\sigma_{oct} d\epsilon_{oct}^p + 3\tau_{oct} d\epsilon_{oct}^p \cos(\gamma - \gamma') \quad (4)$$

$$\text{avec } \text{tg } \gamma' = \sqrt{3} (d\epsilon_2^p - d\epsilon_3^p) / (2 d\epsilon_1^p - d\epsilon_2^p - d\epsilon_3^p) \\ \text{direction de } d\epsilon_{oct}^p \quad (5)$$

On a $dW_0 = dW_1$ d'après Nadai (1963).

On suppose la colinéarité des axes principaux de contrainte et d'incrément de déformation.

Le terme $\cos(\gamma - \gamma')$ intervient du fait de la non colinéarité de τ_{oct} et de $d\epsilon_{oct}^p$.

FRYDMAN et al. (1973) avaient proposé une formule de l'énergie de cisaillement :

$$dW = -3\sigma_{oct} d\epsilon_{oct}^p \text{tg } \phi_{\mu}$$

Nous supposons que l'incrément d'énergie pendant le cisaillement peut s'écrire suivant une forme différente :

$$dW_3 = -3\sigma_{oct} d\epsilon_{oct}^p \beta \cdot \cos(\gamma - \gamma') \quad (6)$$

Le terme β est fonction de la direction du cisaillement dans le plan octaédrique. Il est déterminé par la formulation de Lade de paramètre L_2 tel que :

$$f_2(\sigma) = (\sigma_{1e} + \sigma_{2e} + \sigma_{3e})^3 - L_2 \sigma_{1e} \sigma_{2e} \sigma_{3e} = 0 \quad (7)$$

$$\text{avec } \text{tg } \gamma = \sqrt{3} (\sigma_{2e} - \sigma_{3e}) / (2\sigma_{1e} - \sigma_{2e} - \sigma_{3e}) \quad (8a)$$

$$\text{et } \text{tg } \gamma = \sqrt{3} (\sigma_2 - \sigma_3) / (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) \quad (8b)$$

$$\sigma_{3e} = \sigma_3 \quad (9)$$

On trouve alors :

$$-\tau_{octe} / \tau_{octe} = \beta$$

où les contraintes σ_{1e} , σ_{2e} , σ_{3e} déterminent les invariants τ_{octe} et σ_{octe} sont les solutions des équations (7), (8a), (8b) et 9.

Dans le cas de l'essai triaxial classique ($\sigma_2 = \sigma_3$) on peut écrire :

$$-\frac{\tau_{octe}}{\sigma_{octe}} = \text{tg } \phi_{\text{ecoul}}$$

avec $\phi_{\text{ecoul}} \leq \phi_{\mu}$

L_2 , ϕ_{ecoul} sont des constantes du matériau caractérisant l'écoulement plastique.

Nous supposons l'égalité des relations (4) et (6) :

$$dW_1 = dW_3$$

$$3\sigma_{oct} d\epsilon_{oct}^p + 3\tau_{oct} d\epsilon_{oct}^p \cos(\gamma - \gamma') \\ = -3\sigma_{oct} d\epsilon_{oct}^p \text{tg } \phi_{\text{ecoul}} \cos(\gamma - \gamma')$$

D'où :

$$-(\tau_{oct}/\sigma_{oct}) = \text{tg } \phi_{\text{ecoul}} + d\epsilon_{oct}^p / (d\epsilon_{oct}^p \cdot \cos(\gamma - \gamma')) \quad (10)$$

On remarque qu'au seuil de plasticité l'équation 10 se ramène à l'équation (2).

2.2.3. Direction de la composante $d\epsilon_{oct}^p$ du vecteur déformation plastique dans le plan octaédrique

L'incrément de déformation plastique est tel que :

$$\vec{d\epsilon}^p = \vec{d\epsilon}_{oct} + \vec{d\epsilon}'_{oct}$$

La direction de $d\epsilon_{oct}$ est confondue avec la trissectrice du trièdre des axes principaux. La direction de $d\epsilon'_{oct}$ est donnée par l'angle γ' (formule 4) dans le plan octaédrique. Pour déterminer γ' nous supposons que $d\epsilon'_{oct}$ est colinéaire à la projection sur le plan octaédrique de la normale à la surface d'équation :

$$f_1(\sigma) = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^3 - L_1 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3$$

ce qui correspond à la normalité dans le plan déviatoire à la surface d'équation $f_1(\sigma)$

On en déduit:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \gamma'' &= \frac{3(\partial f / \partial \sigma_2 - \partial f / \partial \sigma_3)}{2 \partial f / \partial \sigma_1 - \partial f / \partial \sigma_2 - \partial f / \partial \sigma_3} \\ \operatorname{tg} \gamma'' &= \frac{3(-L_1 \sigma_3 \sigma_1 + L_1 \sigma_1 \sigma_2)}{-2L_1 \sigma_2 \sigma_3 + L_1 \sigma_1 \sigma_3 + L_1 \sigma_2 \sigma_1} \\ \operatorname{tg} \gamma'' &= \frac{3\sigma_1(\sigma_2 - \sigma_3)}{\sigma_3 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_2 - 2\sigma_2 \sigma_3} = \operatorname{tg} \gamma' \end{aligned} \quad (11)$$

ce qui permet de trouver γ' en fonction de l'état de contrainte $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

2.2.4 Direction de la déformation plastique dans l'espace des contraintes

De même que MONNET (1977) et MONNET et al. (1979) on montre que la relation (8) conduit à la loi d'écoulement « non standard »:

$$\{d\epsilon^p\} = d\lambda \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix} \quad (12)$$

avec:

$$\begin{aligned} a &= - \frac{\sqrt{2} / \sqrt{3} \cdot \cos \gamma'}{\left(\frac{\tau_{\text{oct}}}{\sigma_{\text{oct}}} + \operatorname{tg} \phi_{\text{ecoul}} \right) \cdot \cos (\gamma - \gamma')} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ b &= - \frac{-1/\sqrt{6} \cos \gamma' + 1/\sqrt{2} \sin \gamma'}{\left(\tau_{\text{oct}} / \sigma_{\text{oct}} + \operatorname{tg} \phi_{\text{ecoul}} \right) \cdot \cos (\gamma - \gamma')} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ c &= - \frac{-1/\sqrt{6} \cos \gamma' - 1/\sqrt{2} \sin \gamma'}{\left(\tau_{\text{oct}} / \sigma_{\text{oct}} + \operatorname{tg} \phi_{\text{ecoul}} \right) \cdot \cos (\gamma - \gamma')} + \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

où γ' est donné par la relation (11), γ par la relation (3).

2.2.5 Fonction de charge

Dans le cas de l'essai triaxial vrai, on peut approximer l'énergie totale de la déformation par les formules:

$$W_2 = 3\sigma_{\text{oct}} \epsilon_{\text{oct}}^p + 3\tau_{\text{oct}} \epsilon_{\text{oct}}^p \quad (13)$$

$$\text{et } W_4 = -3\sigma_{\text{oct}} \epsilon_{\text{oct}}^p \cdot \alpha \quad (14)$$

où les déformations totales sont:

$$\epsilon_{\text{oct}}^p = 1/3 \cdot (\epsilon_1^p + \epsilon_2^p + \epsilon_3^p)$$

$$\epsilon_{\text{oct}}^p = 1/3 \cdot \sqrt{(\epsilon_1^p - \epsilon_2^p)^2 + (\epsilon_2^p - \epsilon_3^p)^2 + (\epsilon_3^p - \epsilon_1^p)^2}$$

On suppose l'égalité des relations (13) et (14) et on trouve ainsi l'équation:

$$-\tau_{\text{oct}} / \sigma_{\text{oct}} = \alpha + \epsilon_{\text{oct}}^p / \epsilon_{\text{oct}}^p$$

On pose:

$$k = \epsilon_{\text{oct}}^p / \epsilon_{\text{oct}}^p$$

et on en déduit la fonction de charge.

$$\begin{aligned} f_3(\sigma, k) &= \tau_{\text{oct}} + \sigma_{\text{oct}} (\alpha + k) \\ f(\sigma, k) &< 0 \text{ en élasticité} \\ f(\sigma, k) &= 0 \text{ en écrouissage} \end{aligned} \quad (15)$$

La fonction α varie suivant la direction γ du cisaillement dans le plan octaédrique.

On la trouve grâce à la formule de Lade déjà présentée:

$$f_1(\sigma) = (\sigma_{1s} + \sigma_{2s} + \sigma_{3s}) - L_1(\sigma_{1s} \cdot \sigma_{2s} \cdot \sigma_{3s}) = 0$$

avec:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sqrt{3}(\sigma_{2s} - \sigma_{3s})}{(2\sigma_{1s} - \sigma_{2s} - \sigma_{3s})} = \frac{\sqrt{3}(\sigma_2 - \sigma_3)}{(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)}$$

$$\sigma_{3s} = \sigma_3$$

où $\sigma_{1s}, \sigma_{2s}, \sigma_{3s}$ sont les contraintes au seuil décroissance

$$\text{et } -\tau_{\text{oct } s} / \sigma_{\text{oct } s} = \alpha$$

2.3. Comportement du sol en plasticité parfaite

Quand il arrive à l'état ultime, le sol subit un écoulement plastique non standard. La fonction de charge qui définit l'état limite du sol est la formule de Lade avec un paramètre L_3 différent de celui de l'écrouissage.

$$f_4(\sigma) = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^3 - L_3 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \quad (16)$$

Dans l'essai triaxial classique on a:

$$\sigma_2 = \sigma_3$$

et

$$\sigma_1 = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} \sigma_3 = k_2 \sigma_3$$

On en déduit:

$$L_3 = \frac{(\sigma_1 + 2\sigma_3)^3}{\sigma_1 \cdot \sigma_3^2} = \frac{(k_2 + 2)^3}{k_2}$$

ce qui donne l'équivalence entre le paramètre L_3 et l'angle de frottement interne ϕ du sable.

En plasticité parfaite, les déformations plastiques qui se produisent alors, caractérisent un état d'équilibre limite et sont de nature différente des déformations plastiques d'écrouissage. L'analyse faite précédemment peut être conduite de façon analogue. La direction de la déformation ultime est donnée par la formule (17)

$$\{d\epsilon^p\} = d\mu \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix}$$

où a, b, c sont les termes déjà définis dans la relation 12.

3. COMPARAISON AVEC LA THÉORIE DE THORNTON (1979)

Nous avons développé une théorie du comportement du sol dans le cas du cisaillement. Il peut être intéressant de comparer cette méthode à d'autres théories déjà connues comme celle de Thornton (1979).

La théorie de Thornton s'intéresse à un empilement de sphères rigides de diamètre uniforme soumis à un système de contraintes triaxiales vraies ($\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$).

Pour Thornton, la résistance ultime est atteinte quand les sphères commencent à se déplacer créant ainsi des intervalles entres elles, mais on ne tient pas compte du désenchevêtrement des particules. Ce mécanisme correspond au début de la plasticité dans notre théorie. On étudie l'empilement ordonné de sphères de la figure 2.

On ramène l'étude de l'état de contrainte à un équilibre de forces de contacts. Le tenseur incrément de déformation associé au mécanisme de glissement fut obtenu par PARKIN (1965).

$$\{d\epsilon\} = \begin{Bmatrix} d\epsilon_{zz}, & d\epsilon_{zy}, & d\epsilon_{zx} \\ d\epsilon_{yz}, & d\epsilon_{xy}, & d\epsilon_{yx} \\ d\epsilon_{xz}, & d\epsilon_{xy}, & d\epsilon_{xx} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} a + b, & 0, & 0 \\ 0, & -2b, & 0 \\ 0, & 0, & -2a \end{pmatrix}$$

où $a + b = 1$ dans le cas où les axes $x y z$ sont principaux.

Le tenseur contrainte s'écrit :

$$\{\sigma_{ij}\} = \frac{d}{v} \begin{Bmatrix} \frac{p + q + r + s}{2} + \frac{2(a + b)f}{F}, & & & \\ -\frac{p + q - r + s}{2\sqrt{2}}, & \frac{p - q - r + s}{2\sqrt{2}}, & & \\ -\frac{p + q - r + s}{2\sqrt{2}}, & \frac{p + q + r + s}{4}, & & \\ -\frac{2bf}{F}, & -\frac{p - q + r + s}{4}, & & \\ \frac{p - q - r + s}{2\sqrt{2}}, & -\frac{p - q + r + s}{4}, & & \\ \frac{p + q + r + s}{4}, & -\frac{2af}{F}, & & \end{Bmatrix}$$

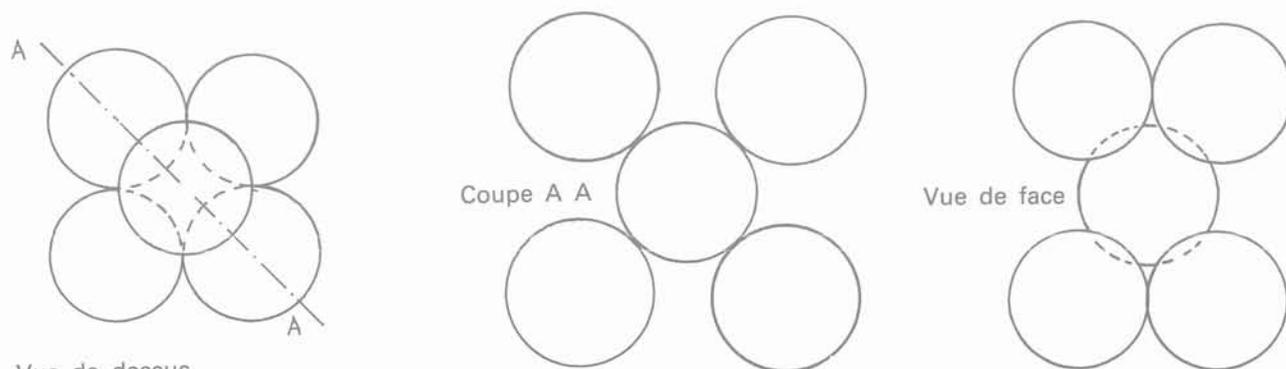


Fig. 2. — L'arrangement des sphères d'après Thornton (1979).

et

$$\{\sigma_{ij}\} = \frac{d}{v} \begin{Bmatrix} \frac{2p + 2f(a + b)}{F}, & 0, & 0 \\ 0, & p - \frac{2bf}{F}, & 0 \\ 0, & 0, & p - \frac{2af}{F} \end{Bmatrix}$$

dans le cas où x, y, z sont les axes principaux et où l'on a : $\sigma_2 = \sigma_3$ on a glissement au contact quand :

$$f = p.tg\phi_\mu$$

On démontre alors les relations :

— En compression triaxiale selon Z :

$$-\frac{\tau_{oct}}{\sigma_{oct}} = 1,061.tg\phi_\mu + \frac{d\epsilon_{oct}^p}{d\epsilon_{oct}^p}$$

En extension triaxiale selon Z :

$$-\frac{\tau_{oct}}{\sigma_{oct}} = 0,354.tg\phi_\mu + \frac{d\epsilon_{oct}^p}{d\epsilon_{oct}^p}$$

Dans le cas où l'empilement ordonné de sphère est constitué avec des billes non jointives dans le plan principal (figure 3). On démontre que dans le cas où x, y, z sont les axes principaux, il vient :

$$\{d\epsilon\} = \begin{Bmatrix} 3(a + b), & 0, & 0 \\ 0, & -2b, & 0 \\ 0, & 0, & -2a \end{Bmatrix} \text{ avec } a + b = 1$$

On démontre alors :

— En compression triaxiale selon Z la relation :

$$-\frac{\tau_{oct}}{\sigma_{oct}} = 0,918.tg\phi_\mu + \frac{d\epsilon_{oct}^p}{d\epsilon_{oct}^p}$$

— En extension triaxiale selon Z la relation :

$$-\frac{\tau_{oct}}{\sigma_{oct}} = 0,918.tg\phi_\mu + \frac{d\epsilon_{oct}^p}{d\epsilon_{oct}^p}$$

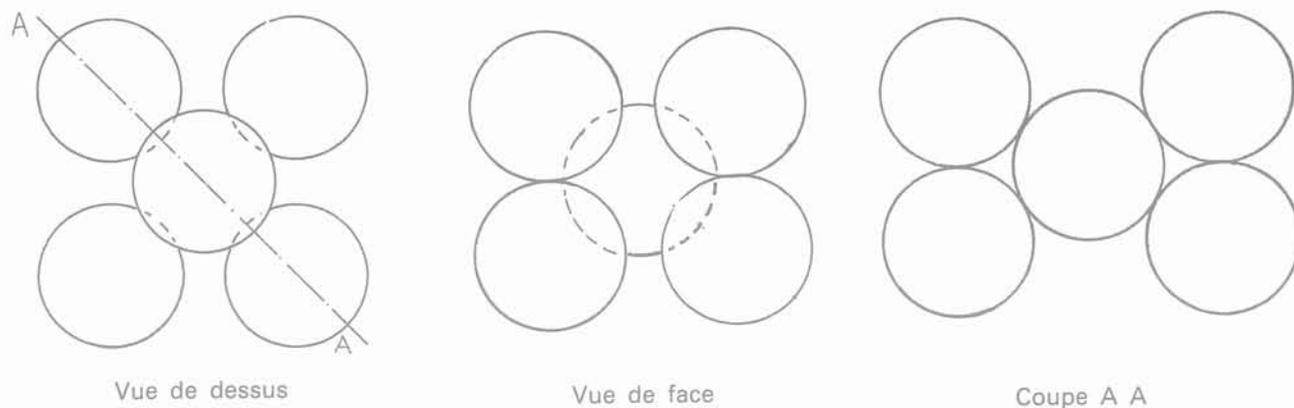


Fig. 3. — Un empilement non compact.

Dans le cas des sols réels, les empilements sont désordonnés, avec une densité intermédiaire. On peut admettre que le résultat moyen constitue une approche satisfaisante. On aura alors :

— En compression avec $\sigma_2 = \sigma_3$

$$-\frac{\tau_{\text{oct}}}{\sigma_{\text{oct}}} = 0,989 \operatorname{tg} \phi_{\mu} + \frac{d\epsilon_{\text{oct}}^p}{d\epsilon_{\text{oct}}^p}$$

— En extension avec $\sigma_2 = \sigma_3$

$$-\frac{\tau_{\text{oct}}}{\sigma_{\text{oct}}} = 0,636 \operatorname{tg} \phi_{\mu} + \frac{d\epsilon_{\text{oct}}^p}{d\epsilon_{\text{oct}}^p}$$

Dans le cas de notre théorie, un phénomène analogue de glissement relatif se produit dans le plan octaédrique pendant l'écroutissage, lorsque le frottement intergranulaire est dépassé. Le désenchevêtrement des grains conduit à la résistance ultime pour une valeur du cisaillement plus élevée.

La règle d'écoulement en compression est donnée par :

$$-\frac{\tau_{\text{oct}}}{\sigma_{\text{oct}}} = \operatorname{tg} \phi_{\mu} + \frac{d\epsilon_{\text{oct}}^p}{d\epsilon_{\text{oct}}^p}$$

Dans le cas de l'extension, les relations donnent :

$$-\frac{\tau_{\text{oct}}}{\sigma_{\text{oct}}} = 0,780 \operatorname{tg} \phi_{\mu} + \frac{d\epsilon_{\text{oct}}^p}{d\epsilon_{\text{oct}}^p}$$

Le terme $0,780 \operatorname{tg} \phi_{\mu}$ ici est égal à β en extension.

On observera que la variation du niveau de cisaillement au seuil de plasticité est prise en compte par les deux théories.

Notre théorie donne des valeurs identiques à celle de Thornton dans le cas de la compression et à une valeur en extension comprise dans la plage des résultats admissibles, tout en étant plus proche de la moyenne.

4. COMPARAISON AVEC L'EXPÉRIENCE

Nous avons choisi de vérifier nos hypothèses de calcul avec les résultats expérimentaux obtenus par Lade (1972) sur du sable soumis à un état de contrainte tridimensionnel. L'échantillon est un cube de 7,6 cm de côté. Chaque face est chargée par une plaque rigide et lubrifiée, ce qui donne un état de contrainte et de déformation homogène dans le sol.

4.1. Etude du seuil de plasticité ou état caractéristique

Le tableau I est relatif au sable dense. Nous avons porté en colonnes 2, 3, 4, les contraintes principales correspondant au minimum du volume expérimental, c'est-à-dire au seuil d'écroutissage, et en colonnes 5, 6, 7, les incréments de déformation correspondants. On en déduit colonne 8, la direction γ (formule 3) du cisaillement τ_{oct} dans le plan octaédrique et colonne 9, la direction γ' de la distorsion $d\epsilon_{\text{oct}}^p$ (formule 5) dans le plan octaédrique. On voit immédiatement que la distorsion n'est pas colinéaire au cisaillement puisque les angles diffèrent en moyenne de $8,6^\circ$ pour le sable dense.

On en déduit également le frottement $\tau_{\text{oct}}/\sigma_{\text{oct}}$ dans le plan octaédrique. Les mesures permettent également de trouver l'angle du critère de Mohr Coulomb (colonne 13) correspondant à chaque essai. On trouve alors un angle moyen de Mohr Coulomb de $38,3^\circ$ pour le sable dense. On trouve également le paramètre de Lade, L_1 , correspondant à chaque essai (colonne 14).

La pyramide de Mohr Coulomb d'angle moyen ($\varnothing = 38^\circ 3$) le mieux adapté aux données expérimentales coupe le plan octaédrique selon un hexagone irrégulier. Le frottement $\tau_{\text{oct}}/\sigma_{\text{oct}}$ correspondant à chaque essai est porté en colonne 15.

Le paramètre moyen de Lade ($L_1 = 47,8$) permet (colonne 17) de trouver le cisaillement correspondant à la formule de Lade, en fonction de l'orientation γ_{exp} .

Tableau I. Etude du seuil d'érouissage pour le sable dense ($e = 0,56$)

Essai	σ_1 10 ⁵ Pa	σ_2 10 ⁵ Pa	σ_3 10 ⁵ Pa	$d\epsilon_1$ %	$d\epsilon_2$ %	$d\epsilon_3$ %	$\gamma \sigma$ exp.	$\gamma' \epsilon$ exp.	γ'' Lade	γ''' Coulomb	τ_{oct} σ_{oct} exp.	ϕ Coulomb	L_1 Lade exp.	τ_{oct} σ_{oct} Coulomb	τ_{oct} σ_{oct} Drucker	τ_{oct} σ_{oct} Lade	b
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
TC1-D2.....	-2,000	-0,6	-0,6	-0,119	0,080	0,080	180	180	180	210	-0,618	32,6	44,5	-0,736		-0,646	0
CT1-D1.....	-2,600	-0,9	-0,6	-0,136	0,046	0,139	188,1	199,4	188,1	233,4	-0,644	38,7	49,1	-0,638		-0,631	0,1
CT1-D2.....	-2,335	-0,740	-0,6	-0,106	0	0,134	187,8	213,9	210,4	232,4	-0,642	36,4	47,9	-0,551		-0,582	0,3
CT1-D3.....	-2,880	-1,740	-0,6	-0,158	-0,071	0,281	209,8	229,2	233,5	233,6	-0,535	40,9	47,3	-0,506		-0,539	0,5
CT1-D4.....	-2,840	-2,270	-0,6	-0,093	-0,043	0,168	225,6	229,6	237,5	233,0	-0,499	40,6	48,2	-0,477	-0,551	-0,497	0,7
CT1-D6.....	-2,720	-2,472	-0,6	-0,141	-0,120	0,338	234,0	237,8	239,1	233,3	-0,491	39,7	48,3	-0,478		-0,487	0,9
CT1-D52.....	-2,680	-2,654	-0,6	-0,108	-0,120	0,302	239,2	241,4	239,9	233,4	-0,493	39,4	49,1	-0,484		-0,486	1
CT1-D53.....	-2,600	-2,570	-0,6	-0,078	-0,083	0,213	239,1	240,8	239,8	233,1	-0,488	38,7	48,1	-0,484		-0,486	1
Ecart moyen							8,6		0,4	13,8			0,007	0,007		0,026	

Nous avons porté en colonne 16, le frottement moyen correspondant à la formulation de Drucker, le mieux adapté.

Si nous étudions l'écart entre le frottement théorique de Coulomb (colonne 15) et l'expérience (colonne 12), on trouve un écart moyen de 0,019. Enfin, la formule de Lade donne l'erreur moyenne la plus faible (0,014) et correspond donc le mieux à l'expérience.

L'étude du sable lâche qui a été faite conjointement conduit à des résultats analogues.

Nous avons représenté sur la figure 6 le critère de Lade correspondant au seuil d'érouissage pour le

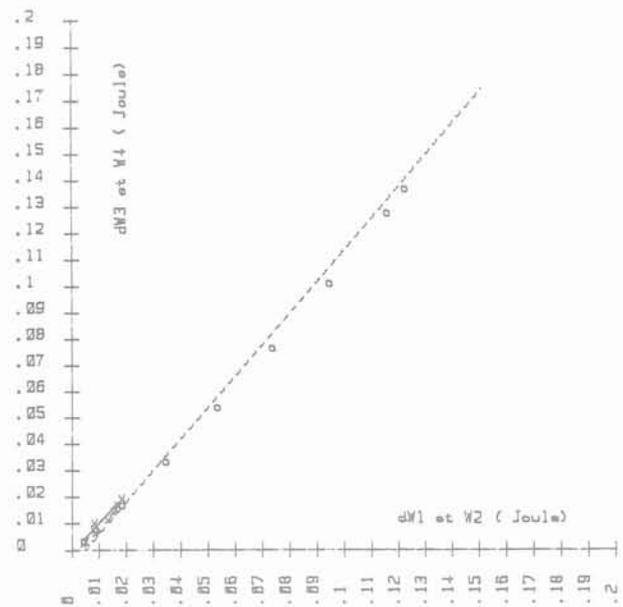


Fig. 5. — Comparaison des énergies plastiques réelles et supposées pour l'essai CT1-D4.

sable dense et le sable lâche. On observe bien que les ponts expérimentaux sont proches de la courbe théorique.

4.2. Etude de l'érouissage

4.2.1. Etude de l'incrément d'énergie de déformation au cours de l'érouissage

Nous avons supposé l'égalité des incréments d'énergie dW_1 (formule 4) et dW_3 (formule 6).

Nous avons alors porté sur les figures dW_3 en fonction de dW_1 pour le sable dense. Dans l'expression de dW_3 nous utilisons la fonction β déduite du frottement τ_{oct}/σ_{oct} (dans la direction γ considérée) donnée par la formule de Lade de paramètre L_2 ($= 38$ pour le sable dense).

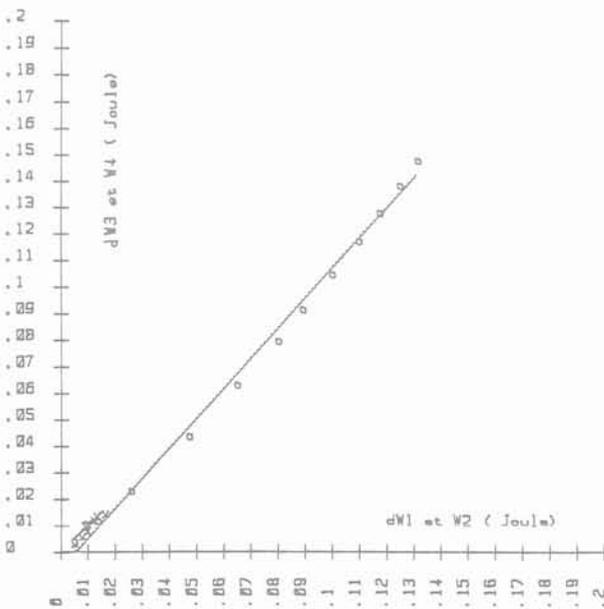


Fig. 4. — Comparaison des énergies plastiques réelles et supposées pour l'essai CT1-D3.

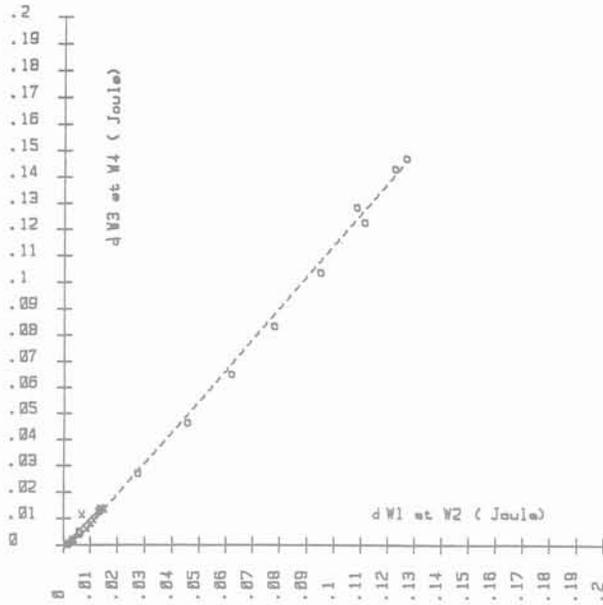


Fig. 6. — Comparaison des énergies plastiques réelles et supposées pour l'essai CT1-D5/2.

On observe sur les figures 4 à 6 pour les essais CT1-D3, CT1-D4, CT1-D5/2, que les droites de régression, tracées en trait continu, ont une pente moyenne de 1,003, proche de la pente 1 correspondant à l'hypothèse utilisée.

Le tableau III regroupe l'ensemble des essais et donne la pente et le coefficient de corrélation entre les deux incréments d'énergie. On constate que les coefficients de corrélation (colonne 3) sont également proches de 1 (0,9663) pour chaque sable. La formule (8) peut être utilisée en écoulement.

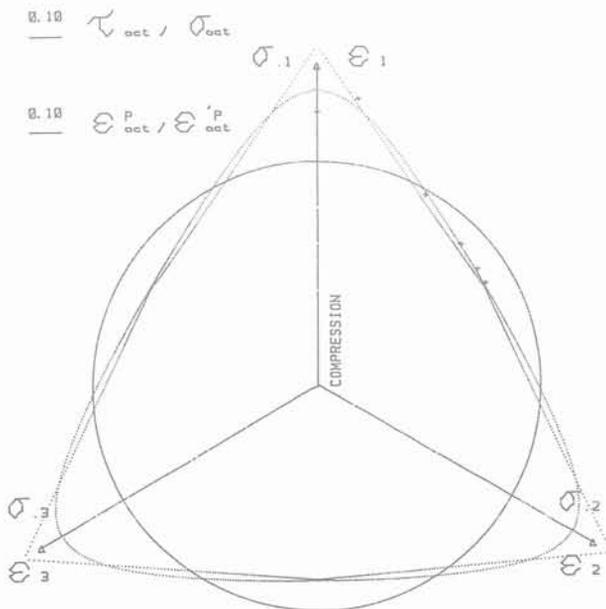


Fig. 7. — Les courbes correspondant aux différentes formulations.

4.2.2. Direction de la composante de_{oct}^p du vecteur incrément de déformation plastique dans le plan octaédrique

La valeur de γ'' est donnée par la formule (11) en fonction de l'état de contrainte. Nous avons porté sur le tableau I, la valeur de l'angle γ'' (colonne 10) pour le sable dense, la comparaison avec la direction γ' de la distorsion plastique expérimentale (colonne 9) donne une erreur moyenne de $0,4^\circ$. Ces résultats sont meilleurs que pour la comparaison de γ' (colonne 8) et γ et pour lesquels on a une erreur moyenne de $8,6^\circ$.

Nous considérerons alors que l'égalité $\gamma' = \gamma''$ correspond bien à la réalité. Comme d'autre part, la formule (10) a été aussi vérifiée, ceci nous permet d'utiliser la formule (12) exprimant la règle d'écoulement.

4.2.3. Etude de l'énergie de déformation plastique pendant l'écroutissage

Nous avons supposé l'égalité des énergies W_2 et W_4 (formules 13 et 14). Nous avons également porté sur les figures W_4 en fonction de W_2 .

Dans l'expression de W_2 , nous utilisons la fonction α déduite du frottement τ_{oct}/σ_{oct} (dans la direction γ considérée) donnée par le critère de Lade de paramètre L_1 . On a $L_1 = 43$ pour le sable dense.

Nous avons tracé en trait discontinu sur les figures 4 à 6, W_4 en fonction de W_2 . Sur dix-sept essais, on trouve une pente moyenne de 1,049 et un coefficient de corrélation moyen de 0,9915, ce qui justifie notre hypothèse $W_2 = W_4$.

La formule (15) de la fonction de charge, qui est directement issue de cette constatation peut être considérée comme vérifiant l'expérience.

4.3. Etude de l'équilibre limite

4.3.1. Etude du critère de rupture

Le tableau II est relatif au sable dense. On a porté les contraintes au niveau de l'équilibre limite (colonnes 2, 3, 4) et les incréments de déformation plastique correspondant (colonnes 5, 6 et 7). On trouve, de même que précédemment, la direction γ du cisaillement octaédrique (colonne 8) et de la distorsion plastique γ' (colonne 9), ainsi que le frottement expérimental dans le plan octaédrique τ_{oct}/σ_{oct} (colonne 12).

Quand on compare le cisaillement expérimental au cisaillement théorique donné par le critère de Lade (avec $L = 99,3$) on trouve une erreur moyenne (col. 14 plus faible (0,014) que lorsque l'on utilise les critères de Coulomb (colonne 15) avec $\phi = 55,2^\circ$ (erreur moyenne de 0,019).

On voit donc que le critère de Lade définit le mieux la rupture, ce qui justifie notre fonction de charge (15).

Nous avons porté sur la figure 7 les différents critères (Coulomb, Drucker, Lade). Les points expérimentaux sont très proches du critère de Lade.

Tableau II. Etude de la rupture pour le sable dense ($e = 0,56$)

Essai	σ_1 10 ⁵ Pa	σ_2 10 ⁵ Pa	σ_3 10 ⁵ Pa	$d\varepsilon_1$ %	$d\varepsilon_2$ %	$d\varepsilon_3$ %	γ σ	γ' ε	γ'' Lade	γ''' Coulomb	τ_{oct} σ_{oct}	ϕ Coulomb	L_3 Lade	τ_{oct} σ_{oct} Coulomb	τ_{oct} σ_{oct} Drucker	τ_{oct} σ_{oct} Lade	b
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
TC1-D2	-3,370	-0,6	-0,6	-0,085	0,083	0,083	180	180	180	210	-0,857	44,2	78,7	-1,075			
CT1-D1	-6,551	-1,512	-0,6	-0,382	0,104	0,749	188,2	214,6	222,7	235,7	-0,906	56,3	109,4	-0,901		-0,930	0
CT1-D2	-7,026	-2,824	-0,6	-0,175	0	0,388	199,9	222,3	235,9	235,9	-0,765	57,4	95,9	-0,752		-0,886	0,1
CT1-D3	-7,020	-3,827	-0,6	-0,268	-0,039	0,709	210,1	227,1	235,9	235,9	-0,687	57,4	93,1	-0,675		-0,775	0,3
CT1-D4	-7,198	-5,538	-0,6	-0,090	-0,033	0,257	226	231,2	238,6	236	-0,630	57,8	99,2	-0,617	-0,734	-0,697	0,5
CT1-D6	-7,131	-6,431	-0,6	-0,070	-0,047	0,248	234,4	236,2	239,5	236	-0,620	57,6	103,2	-0,609		-0,631	0,7
CT1-D52	-6,550	-6,450	-0,6	-0,183	-0,235	0,594	239,1	243,2	239,9	235,4	-0,617	57	102,8	-0,610		-0,616	0,9
CT1-D53	-6,831	-6,713	-0,6	-0,115	-0,203	0,722	239,2	244,9	239,9	235,8	-0,614	56,3	99,2	-0,610		-0,614	1
Ecart moyen							10,3		5,9	11,9			0,063	0,120		0,012	1

4.3.2. Direction de la distorsion plastique $d\varepsilon_{oct}^p$ et loi d'écoulement

Pour le sable dense (tableau II), on observe que la distorsion plastique n'est pas colinéaire au cisaillement (on a un écart moyen de 10,3) et que la direction donnée par la perpendicularité au critère de Lade γ (colonne 10) présente un meilleur coefficient de corrélation (0,971) avec la direction de γ' que si l'on utilise γ (0,921) et un écart moyen (4,1°) plus faible.

Nous pouvons donc utiliser la relation (11) pour trouver la direction de la distorsion plastique à la rupture.

Nous supposons que la formule (10) reste valable à l'état ultime et nous utiliserons alors la formule (12) donnant la direction générale de la déformation plastique à l'état ultime.

Tableau III. Etude des pentes des droites énergétiques

Essai 1	Pente de $dW_3 = f(dW_1)$ 2	Corrélation 3	Pente de $W_2 = f(W_4)$ 4	Corrélation 5
TC1 - L2/2	1,027	0,9989	1,066	0,9999
CT1 - L1	1,000	0,9995	0,957	0,9999
CT1 - L1/2	1,093	0,9985	0,998	0,9999
CT1 - L3/4	1,096	0,9989	0,864	0,9443
CT1 - L3/2	1,091	0,9999	1,070	0,9998
CT1 - L4/2	0,505	0,9649	0,977	0,9970
CT1 - L4	1,031	0,9959	0,989	0,9998
CT1 - L6	1,029	0,9976	0,985	0,9997
CT1 - L5/3	1,034	0,9978	0,992	0,9998
CT1 - L5/4	1,085	0,9979	1,016	0,9997
CT1 - L5/2	0,994	0,9948	0,963	0,9999
CT1 - D3	0,989	0,9191	1,135	0,9976
CT1 - D1	0,946	0,9104	0,921	0,9995
CT1 - D4	1,084	0,919	1,196	0,9146
CT1 - D6	1,035	0,9399	1,240	0,9982
CT1 - D5/3	0,930	0,8816	1,222	0,9990
CT1 - D5/2	0,935	0,8855	1,189	0,9979
CT1 - D2	1,024	0,9932	1,107	0,9997

donnant la direction générale de la déformation plastique à l'état ultime.

5. COMPARAISON ENTRE LES RÉSULTATS THÉORIQUES ET LES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

Nous avons adapté notre formulation théorique à un programme de calcul sur microordinateur, ce qui nous a permis de calculer théoriquement chaque essai de Lade. Les résultats que nous avons portés sur les figures 8 à 15, ne sont pas des essais de calage de la loi de comportement, et montrent bien une comparaison effective entre la théorie et l'expérience. Nous ne présentons ici que les résultats relatifs au sable dense, dans un but de simplification.

Sur les mêmes figures, nous avons fait la comparaison entre les résultats du programme (représentés par les astérisques) et les résultats expérimentaux de Lade (représentés par les croix). Nous avons suivi pour la loi théorique, le même chemin de contrainte que lors des essais, et les déformées sont le résultat du calcul.

Nous utilisons pour la modélisation des six essais sur le sable dense, seulement cinq paramètres qui sont constants et ont pour valeur :

$E = 825 \cdot 10^5 \text{ Pa}$

$\nu = 0,36$

$L_1 = 47,8$ qui correspond à $\phi_\mu = 32,9^\circ$

$L_2 = 38$ qui correspond à $\phi_{ecoul} = 27,8^\circ$

$L_3 = 99,3$ qui correspond à $\phi = 47,9$

On constate globalement une bonne correspondance entre les courbes contrainte déformation ($\sigma_1 - \varepsilon_1$ ou $\sigma_2 - \varepsilon_2$) et les courbes expérimentales pour tous les essais.

D'autre part, on trouve que la dilatance (gonflement en fonction de ε_1) est très bien reproduite par le modèle.

Comparaison des résultats du calcul et de l'expérience pour les essais ci-dessous :

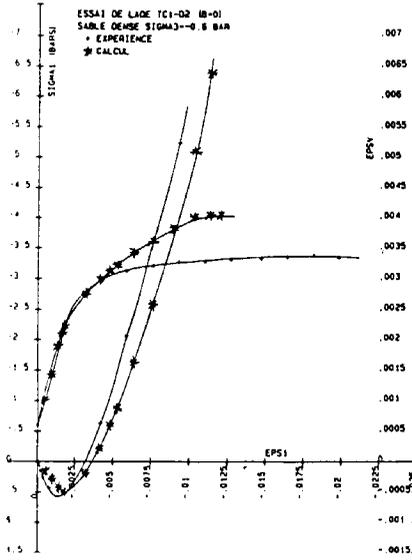


Fig. 8. — Essai TC1-D2.

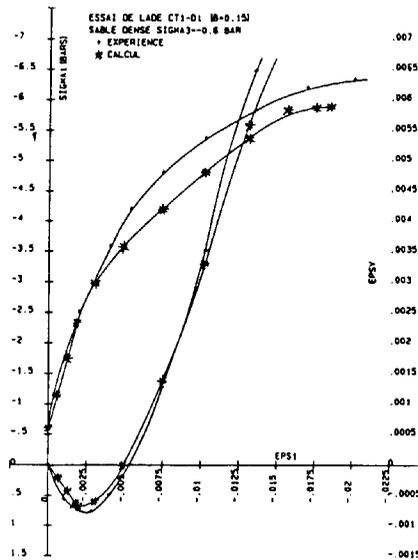


Fig. 9. — Essai CT1-D1.

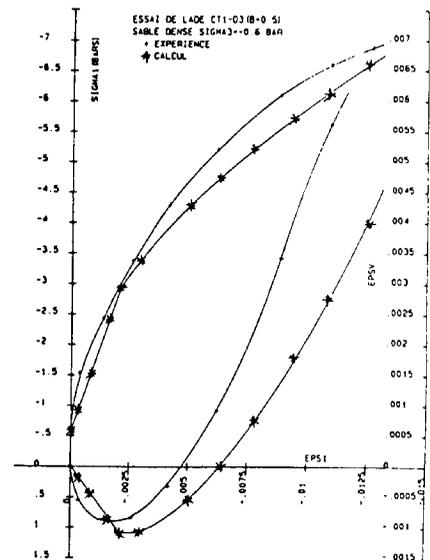


Fig. 10. — Essai CT1-D3.

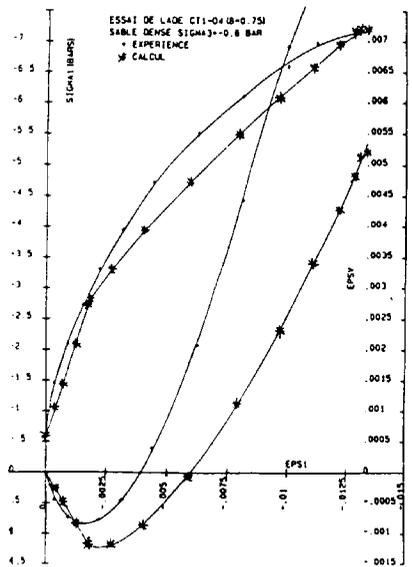


Fig. 11. — Essai CT1-D4.

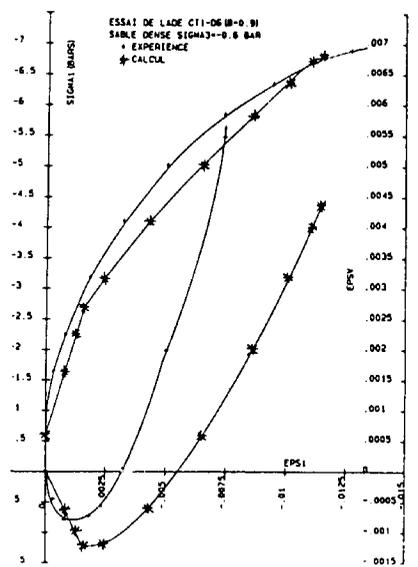


Fig. 12. — Essai CT1-D6.

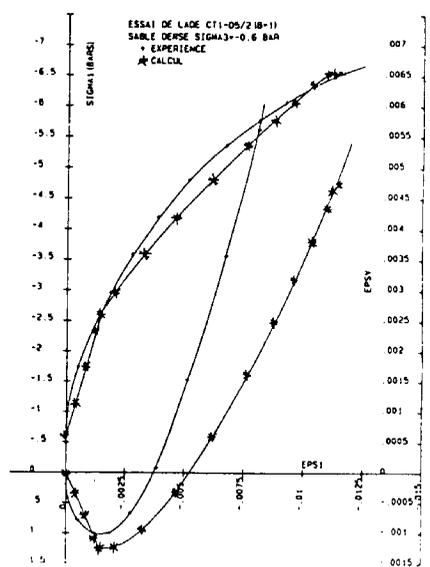
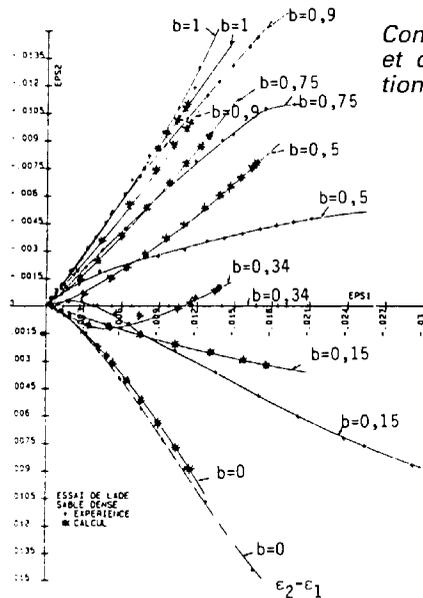


Fig. 13. — Essai CT1-D5.



Comparaison des résultats du calcul et de l'expérience pour les déformations suivantes :

◀ Fig. 14. — E_2-E_1 .

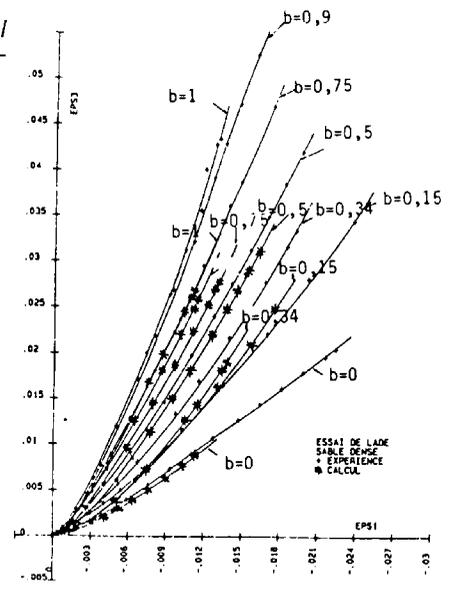


Fig. 15. — E_3-E_1 ▶

6. CONCLUSION

Nous avons mis au point une nouvelle loi de comportement utilisable au cisaillement triaxial vrai et qui nécessite cinq paramètres constants pour le sol pulvérulent (E , ν , L_1 , L_2 , L_3) qui sont liés aux caractéristiques physiques du sol. Ce modèle, utilisable sur microordinateur, présente une simplicité plus grande que d'autres lois déjà publiées et montre une bonne concordance avec les résultats d'essais triaxiaux vrais. Les différentes réponses du modèle sont dues uniquement aux chemins de contraintes qui diffèrent et qui impliquent des déformations plastiques spécifiques.

Pour les sables lâches on constate que les valeurs L_1 et L_2 sont identiques, ce qui ramène la formulation à un modèle à quatre paramètres constants.

BIBLIOGRAPHIE

1. AUBRY; HUJEU; LASSOUDIÈRES; MEIMON (1982). — *A double memory model with multiple mechanics for cyclic soil behaviour*. Int. Symposium on numerical method. Zurich 1982, p. 3-13.
2. DARVE (1974). — *Contribution à la détermination de la loi rhéologique incrémentale des sols*. Thèse Docteur Ingénieur Grenoble, 1974.
3. FRYDMAN; ZEITLEN; ALPAN (1973). — *The yielding behaviour of particulate media*. Canadian Geotechnical Journal 10, 1973, p. 341-362.
4. LADE (1972). — *The stress strain characteristics of cohesionless soils*. Phi. thesis Berkeley 1972.
5. LUONG. — *Etat caractéristique du sol*. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 287, Décembre 1978, N° 15 p. 305-307.
6. MONNET (1977). — *Détermination de la loi d'écroutissement des sols et utilisation de la Méthode des Eléments finis*. Thèse Docteur Ingénieur — I.N.S.A. de Lyon, 1977.
7. MONNET (1983). — *Détermination d'une loi de comportement des sols en écroutissement et plasticité parfaite. Utilisation par la Méthode des Eléments finis*. Thèse Docteur ès-Sciences, I.N.S.A. de Lyon, 1983.
8. MONNET; GIELLY (1979). — *Détermination d'une loi de comportement pour le cisaillement du sol pulvérulent*. Revue Française de Géotechnique, 1979, n° 7, p. 45-66.
9. NADAI (1963). — *Theory of flow and fracture of solid*. Ed. Mac. Graw Hill, Vol. 2.
10. PARKIN (1965). — *On the strength of packed spheres*. J. Aust. math. Soc. 5, p. 443-452.
11. ROBINET-DOANH (1982). — *A non linear incremental constitutive law for clays*. International Symposium on Numerical model in Geomechanics, Zurich 1982, p. 163-171.
12. THORNTON (1979). — *The condition of failure of face centered cubic arrays of uniform rigid spheres*. Géotechnique 29, n° 4, Déc. 1979, p. 441-459.