# contraintes et déplacements dans un massif semi-infini isotrope ou à isotropie transverse soumis à des charges rectangulaires souples et rigides en surface

F. VAN CAUWELAERT
Docteur - Ingénieur
Chef du Département des Constructions à
l'Institut Supérieur Industriel Catholique
du Hainaut*

## 1. MASSIF SEMI-INFINI ISOTROPE SOUMIS A UNE CHARGE UNIFORME EN SURFACE

### 1.1. Solution générale en coordonnées cylindriques

Boussinesq (1885) a résolu le problème du massif semi-infini soumis à une charge ponctuelle verticale en surface en faisant appel aux fonctions de Legendre, solutions de l'équation de Laplace exprimée en coordonnées sphériques.

Burmister (1943) a généralisé la solution de Boussinesq aux charges circulaires uniformément réparties en utilisant les fonctions de Bessel, solutions de l'équation de Laplace exprimée en coordonnées cylindriques.

Muki (1960) enfin a donné la solution générale pour un massif soumis à des charges inclinées. Il décompose la charge inclinée en une charge verticale, problème résolu par Burmister, et une charge tangentielle horizontale.

Il généralise pour cela les expressions de Love (1927) aux charges non axisymétriques.

Il a exprimé la solution sous forme d'équations différentielles des déplacements. Elle peut tout aussi bien l'être sous forme d'équations différentielles des contraintes :

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\nabla^2\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\nabla^2\phi - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

* 27, avenue de l'Hôpital, B7000 - Mons (Belgique).

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\mu)\,\nabla^2\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right] \qquad (1)$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(1-\mu)\,\nabla^2\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right] - \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z}$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\mu)\,\nabla^2\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right] + \frac{1}{2}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial z}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial z}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\phi}{r}\right) - \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

$$\text{où } \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}.$$

Introduisant les relations (1) dans les équations d'équilibre :

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

$$\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0,$$

on constate que celles-ci sont satisfaites, à condition que les fonctions $\phi$ et $\psi$ soient respectivement solutions de :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\right) = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}\right) = 0. \qquad (3)$$

Les solutions générales de (3) sont données par :

$$\phi = J_1(tr)\,[Ae^{tz} - Be^{-tz} + zCe^{tz} - zDe^{-tz}]\cos\theta$$

$$\psi = J_1(tr)\,[Ee^{tz} - Fe^{-tz}]\sin\theta \qquad (4)$$

Les coefficients A et F sont obtenus en développant $\phi$ et $\psi$ en séries de Fourier-Bessel et en appliquant la transformation inverse de Hankel :

$$f(r) = \int_0^\infty t\,dt \int_0^a qJ_0(tR)J_0(tr)R\,dr, \qquad (5)$$

dans laquelle q est la charge tangentielle répartie uniformément en surface sur un cercle de rayon a.

Dans le cas d'un massif semi-infini, les coefficients A, C et E sont nécessairement nuls.

Les coefficients B, D et F sont solutions des expressions des conditions aux limites en surface ($z = 0$) :

$$\begin{aligned} &\sigma_z = 0 && \text{pour } r[0,\ \infty] \\ &\tau = \tau_{rz}\cos\theta + \tau_{\theta z}\sin\theta = q && \text{pour } r[0,\ a] \\ &\tau = 0 && \text{pour } r[a,\ \infty] \end{aligned} \qquad (6)$$

## 1.2. Transformation en coordonnées cartésiennes

Posons : $x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$ (7)

Les transformations des dérivées partielles sont données par :

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{x}{x^2+y^2}\,\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{x^2+y^2}\,\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{1}{x^2+y^2}\left(x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} \tag{8}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{1}{x^2+y^2}\left(-y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{1}{x^2+y^2}\left(y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - y\frac{\partial f}{\partial y} - x\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} = \frac{1}{x^2+y^2}\left[-xy\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (x^2-y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + xy\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

Les contraintes en coordonnées cartésiennes sont obtenues par:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \sigma_r \cos^2\theta + \sigma_\theta \sin^2\theta - 2\tau_{r\theta}\cos\theta \sin\theta \\
\sigma_y &= \sigma_r \sin^2\theta + \sigma_\theta \cos^2\theta + 2\tau_{r\theta}\cos\theta \sin\theta \\
\sigma_z &= \sigma_z \\
\tau_{yz} &= \tau_{\theta z}\cos\theta + \tau_{rz}\sin\theta \\
\tau_{xz} &= -\tau_{\theta z}\sin\theta + \tau_{rz}\cos\theta \\
\tau_{xy} &= (\sigma_r - \sigma_\theta)\cos\theta \sin\theta + \tau_{r\theta}(\cos^2\theta - \sin^2\theta)
\end{aligned} \tag{9}$$

Transformant les relations (1) par (7) et (8) et introduisant dans (9), on obtient les expressions différentielles des contraintes en coordonnées cartésiennes:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\nabla^2\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y} \\
\sigma_y &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\nabla^2\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial y} \\
\sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\mu)\nabla^2\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right] \\
\tau_{yz} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[(1-\mu)\nabla^2\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right] - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial z} \\
\tau_{xz} &= \frac{\partial}{\partial z}\left[(1-\mu)\nabla^2\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial y \partial z} \\
\tau_{xy} &= -\frac{\partial^3\phi}{\partial x \partial y \partial z} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) \\
\text{où } \nabla^2\phi &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}
\end{aligned} \tag{10}$$

Les expressions d'équilibre:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\
\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} &= 0
\end{aligned} \tag{11}$$

sont satisfaites si $\phi$ et $\psi$ sont solution de:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right) &= 0 \\
\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} &= 0
\end{aligned} \tag{12}$$

Les équations des déplacements sont obtenues par:

$$u = \int \varepsilon_x dx \qquad v = \int \varepsilon_y dy \qquad w = \int \varepsilon_z dz$$

d'où :

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1+\mu}{E}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\right) \\ v &= -\frac{1+\mu}{E}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) \\ w &= \frac{1+\mu}{E}\left[2\,(1-\mu)\,\nabla^2\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right]. \end{aligned} \tag{13}$$

## 1.3. Contrainte verticale sous charge verticale rectangulaire

Considérons un massif soumis à une charge verticale uniforme p répartie sur un rectangle de longueur 2a et de largeur 2b. La charge totale P = 4abp. La solution des équations de compatibilité est obtenue par séparation des variables.

Posons :

$$\begin{aligned} \phi &= \cos tx \,.\, \cos sy \,.\, f(z) \\ \psi &= \sin tx \,.\, \sin sy \,.\, g(z) \end{aligned} \tag{14}$$

Introduisant (14) dans (12), on obtient

$$\begin{aligned} f(z) &= Ae^{mz} - Be^{-mz} + zCe^{mz} - zDe^{-mz} \\ g(z) &= Ee^{mz} - Fe^{-mz} \end{aligned} \tag{15}$$

où : $m = (t^2 + s^2)^{1/2}$

Dans le cas d'un massif semi-infini A, C et E sont nuls, d'où les expressions des contraintes :

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \cos tx \,.\, \cos sy\,[mt^2Be^{-mz} + (mt^2z - 2\mu m^2 - t^2)\,De^{-mz} - stFe^{-mz}] \\ \sigma_y &= \cos tx \,.\, \cos sy\,[ms^2Be^{-mz} + (ms^2z - 2\mu m^2 - s^2)\,De^{-mz} + stFe^{-mz}] \\ \sigma_z &= -\cos tx \,.\, \cos sy\,[m^3Be^{-mz} + (m^3z - 2\mu m^2 + m^2)\,De^{-mz}] \\ \tau_{yz} &= -\cos tx \,.\, \sin sy\left[m^2sBe^{-mz} + (m^2sz - 2\mu ms)\,De^{-mz} - \frac{mt}{2}Fe^{-mz}\right] \\ \tau_{xz} &= -\sin tx \,.\, \cos sy\left[m^2tBe^{-mz} + (m^2tz - 2\mu mt)\,De^{-mz} + \frac{ms}{2}Fe^{-mz}\right] \\ \tau_{xy} &= -\sin tx \,.\, \sin sy\left[mstBe^{-mz} + (mstz - st)\,De^{-mz} + \frac{t^2 - s^2}{2}Fe^{-mz}\right] \end{aligned} \tag{16}$$

Les conditions aux limites en surface sont :

$$\begin{aligned} &\sigma_z = p \text{ pour } x[-a,\ a] \\ &\qquad \text{et pour } y[-b,\ b] \\ &\sigma_z = 0 \text{ ailleurs} \\ &\tau_{xz} = 0 \\ &\tau_{yz} = 0 \end{aligned} \tag{17}$$

Les conditions (17) peuvent être exprimées par transformation intégrale de Fourier à deux variables des relations (16), Spiegel (1974),

$$\sigma_z = \frac{4p}{\pi^2}\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \frac{\cos tx \,.\, \cos sy \,.\, \sin ta \,.\, \sin sb}{ts}\,dtds$$

d'où :

$$\sigma_z = \frac{4p}{\pi^2} \cdot \begin{bmatrix} \pi/2\ (|x| < a) \\ \pi/4\ (|x| = a) \\ 0\ (|x| > a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \pi/2\ (|y| < b) \\ \pi/4\ (|y| = b) \\ 0\ (|y| > b) \end{bmatrix} = \begin{cases} p \\ p/4 \\ 0 \end{cases} \tag{18}$$

et les conditions aux limites s'écrivent pour z = 0 :

$$\begin{aligned} (\sigma_z) \quad & m^3B + m^2\,(1 - 2\mu)\,D = -1 \\ (\tau_{yz}) \quad & m^2sB - 2\mu msD - \frac{mt}{2}F = 0 \\ (\tau_{xz}) \quad & m^2tB - 2\mu mtD + \frac{ms}{2}F = 0 \end{aligned}$$

d'où l'on tire :

$$B = -\frac{2\mu}{m^3}$$
$$D = -\frac{1}{m^2} \qquad (19)$$
$$F = 0.$$

Il n'est donc pas nécessaire de faire appel à la fonction de tension $\psi$ dans le cas d'une charge verticale uniforme.

L'expression de la contrainte verticale devient :

$$\sigma_z = \frac{4p}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\cos tx \,.\, \cos sy \,.\, \sin ta \,.\, \sin sb}{ts}(1 + mz)\, e^{-mz} ds dt. \qquad (20)$$

Au centre de la charge ($x = 0$, $y = 0$), on a :

$$\sigma_z = \frac{4p}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin ta \,.\, \sin sb}{ts}(1 + mz)\, e^{-mz} ds dt, \qquad (21)$$

qui dans le cas d'une charge ponctuelle P se transforme en :

$$\sigma_z = \lim_{\substack{a \to o \\ b \to o}} \frac{P}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin ta \,.\, \sin sb}{abts}(1 + mz)\, e^{-mz} ds dt = \frac{P}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(1 + mz)\, e^{-mz} ds dt. \qquad (22)$$

Cette relation se résout en transformant les paramètres t et s en coordonnées polaires :

$$t = \rho \cos \alpha$$
$$s = \rho \sin \alpha$$

d'où :

$$m = \rho$$
$$dtds = \rho d\rho d\alpha$$

et :

$$\sigma_z = \frac{P}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty}(1 + \rho z)e^{-\rho z}\rho d\rho d\alpha$$
$$\sigma_z = \frac{P}{2\pi}\int_0^{\infty}(1 + \rho z)e^{-\rho z}\rho d\rho$$
$$\sigma_z = \frac{3P}{2\pi z^2} \qquad (23)$$

qui est la relation de Boussinesq.

La contrainte verticale en dehors de la charge ponctuelle s'obtient par :

$$\sigma_z = \frac{P}{\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cos tx \,.\, \cos sy \,.\, (1 + mz)e^{-mz} ds dt, \qquad (24)$$

dont la solution peut également être obtenue en passant en coordonnées polaires :

$$\sigma_z = \frac{P}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty}\cos(x\rho\cos\alpha) \,.\, \cos(y\rho\sin\alpha)\ \ (1 + \rho z)e^{-\rho z}\rho d\rho d\alpha. \qquad (25)$$

On a d'après Watson (1966, p. 55),

$$\cos u = \left(\frac{\pi u}{2}\right)^{1/2} . J_{-1/2}(u) \qquad (26)$$

où $J_{-1/2}$ est la fonction de Bessel d'ordre $-1/2$.

La relation (25) devient ainsi :

$$\sigma_z = \frac{P}{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty}[(xy)^{1/2}J_{-1/2}(x\rho\cos\alpha) \,.\, J_{-1/2}(y\rho\sin\alpha) \,.\, \cos^{1/2}\alpha \,.\, \sin^{1/2}\alpha \,.\, (1 + \rho z)\rho^2 e^{-\rho z} d\rho d\alpha] \qquad (27)$$

L'intégrale :

$$\int_0^{\pi/2} J_{-1/2}(x\rho\cos\alpha) \,.\, J_{-1/2}(y\rho\sin\alpha) \,.\, \cos^{1/2}\alpha \,.\, \sin^{1/2}\alpha d\alpha$$

s'assimile à la seconde intégrale de Sonine dont la solution peut être trouvée chez Watson (1966, p. 376):

$$\int_0^{\pi/2} J_\mu(z \sin \theta) \,.\, J_\nu(Z \cos \theta) \sin^{\mu+1}\theta \,.\, \cos^{\nu+1}\theta \,.\, d\theta = \frac{z^\mu Z^\nu J_{\mu+\nu+1}[(z^2 + Z^2)^{1/2}]}{(z^2 + Z^2)^{1/2\,(\mu+\nu+1)}}. \qquad (28)$$

On a par (27) que:

$$\mu = \nu = -1/2$$

On obtient donc:

$$\int_0^{\pi/2} J_{-1/2}(x\rho \cos \alpha) \,.\, J_{-1/2}(y\rho \sin \alpha) \,.\, \cos^{1/2}\alpha \,.\, \sin^{1/2}\alpha d\alpha = \frac{J_0[p(x^2 + y^2)^{1/2}]}{p(xy)^{1/2}}$$

et (27) devient:

$$\sigma_z = \frac{P}{2\pi} \int_0^\infty J_0[\rho(x^2 + y^2)^{1/2}](1 + \rho z)e^{-\rho z} \,.\, \rho \,.\, d\rho. \qquad (29)$$

On a d'après Watson (1966, p. 386):

$$\int_0^\infty e^{-at} J_\nu(bt) t^{\nu+1} dt = \frac{2a(2b)^\nu \Gamma(\nu + 3/2)}{(a^2 + b^2)^{\nu + 3/2} (\pi)^{1/2}} \qquad (30)$$

d'où, avec $\nu = 0$,

$$\sigma_z = \frac{P}{2\pi} \int_0^\infty J_0[\rho(x^2 + y^2)^{1/2}]\rho e^{-\rho x} d\rho = \frac{P}{2\pi} \frac{2z\Gamma(3/2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} \,.\, (\pi)^{1/2}} = \frac{P}{2\pi} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

On a d'autre part, Watson (1966, p. 385),

$$\int_0^\infty e^{-at} J_\nu(bt)\, t^{\mu-1} dt = \frac{(1/2b)^\nu \,.\, \Gamma(\mu + \nu)}{(a^2 + b^2)^{1/2\,.\,(\mu+\nu)}\, \Gamma(\nu + 1)} \,.\, F\left(\frac{\mu + \nu}{2}, \frac{1 - \mu + \nu}{2}; \nu + 1; \frac{b^2}{a^2 + b^2}\right), \qquad (31)$$

où F représente la série hypergéométrique de Gauss:

$$F(\alpha, \beta; \rho; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n \,.\, (\beta)_n}{n!\,(\rho)_n} \,.\, z^n$$

avec:

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha + 1) \,....\, (\alpha + n - 1), \; (\alpha)_0 = 1.$$

D'où, avec $\nu = 0$ et $\mu = 3$:

$$\frac{P}{2\pi} \int_0^\infty J_0[\rho(x^2 + y^2)^{1/2}]\, \rho^2 z\, e^{-\rho z} d\rho$$

$$= \frac{P}{2\pi}\, z \frac{\Gamma(3)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}\, \Gamma(1)} \,.\, F\left(\frac{3}{2}, -1; 1; \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}\right)$$

$$= \frac{P}{2\pi}\, z \frac{2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \left[1 + \frac{3/2 \,.\, (-1)}{1\,!\,1} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}\right]$$

$$= \frac{P}{\pi} \left[\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{3}{2} \frac{z(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}\right].$$

La solution complète de (29) devient alors:

$$\sigma_z = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}. \qquad (32)$$

Dans l'axe de la charge ($x = 0$, $y = O$) on obtient évidemment à nouveau la solution de Boussinesq:

$$\sigma_z = \frac{3P}{2\pi z^2}.$$

La contrainte verticale sous une charge répartie est donnée par (20), relation qui n'est pas intégrable analytiquement.

Dans l'axe de la charge cette expression se réduit à:

$$\sigma_z = \frac{4p}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin ta \,.\, \sin sb}{ts} (1 + mz)\, e^{-mz} ds dt. \qquad (33)$$

La solution de (33) peut être obtenue par intégration de (32) sur l'aire de rectangle (2a, 2b), comme cela l'a été fait par Florin (1959).

Pour rester dans le formalisme retenu, nous avons tenu à résoudre (33) sous sa forme générale.

Transformant (33) de la même manière que (22) on obtient:

$$\sigma_z = \frac{4p}{\pi^2} \int_0^{\pi/2}\int_0^{\infty} \frac{\sin(a\rho\cos\theta)\,.\,\sin(b\rho\sin\theta)\,(1+\rho z)\,e^{-\rho z}d\rho d\theta}{\rho\cos\theta\sin\theta} \tag{34}$$

Posons:

$$a\cos\theta = A$$
$$b\sin\theta = B$$

On a, d'après Watson (1966, p. 54):

$$\sin(A\rho) = \sqrt{\frac{\pi A\rho}{2}}\,.\,J_{1/2}(A\rho)$$
$$\sin(B\rho) = \sqrt{\frac{\pi B\rho}{2}}\,.\,J_{1/2}(B\rho) \tag{35}$$

et:

$$\sigma_z = \frac{2p}{\pi}ab\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{AB}}\int_0^{\infty} J_{1/2}(A\rho)\,J_{1/2}(B\rho)\,(1+\rho z)\,e^{-\rho z}d\rho d\theta \tag{36}$$

On a d'autre part d'après Watson (1966, p. 389):

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho z}\,J_{1/2}(A\rho)\,J_{1/2}(B\rho)\,\rho^{\mu-1}d\rho = \frac{(AB)^{1/2}\,.\,\Gamma(\mu+1)}{\pi z^{(\mu+1)}\,\Gamma(2)}\int_0^{\pi}F\left(\frac{\mu+1}{2},\frac{\mu+2}{2};\frac{3}{2};-\frac{\omega^2}{z^2}\right)\sin\phi d\phi \tag{37}$$

où:

$$\omega^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\phi.$$

La relation (36) se scinde en:

$$\sigma_{z,\,1} = \frac{2p}{\pi}ab\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{AB}}\int_0^{\infty} J_{1/2}(A\rho)\,J_{1/2}(B\rho)e^{-\rho z}d\rho d\theta$$
$$\sigma_{z,\,2} = \frac{2p}{\pi}ab\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{AB}}\int_0^{\infty} J_{1/2}(A\rho)\,J_{1/2}(B\rho)\,.\,\rho z\,.\,e^{-\rho z}d\rho d\theta.$$

D'où par (37):

$$\sigma_{z,\,1} = \frac{2p}{\pi^2}\,\frac{ab}{z^2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi}F\left(1,\frac{3}{2};\frac{3}{2};-\frac{\omega^2}{z^2}\right)\sin\phi d\phi d\theta$$
$$\sigma_{z,\,2} = \frac{4p}{\pi^2}\,\frac{ab}{z^2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi}F\left(\frac{3}{2},2;\frac{3}{2};-\frac{\omega^2}{z^2}\right)\sin\phi d\phi d\theta.$$

On a, d'après Wayland (1970):

$$F\left(1,\frac{3}{2};\frac{3}{2};-\frac{\omega^2}{z^2}\right) = \frac{z^2}{z^2+\omega^2}$$
$$F\left(\frac{3}{2},2;\frac{3}{2};-\frac{\omega^2}{z^2}\right) = F\left(2,\frac{3}{2};\frac{3}{2};-\frac{\omega^2}{z^2}\right) = \frac{z^4}{(z^2+\omega^2)^2}.$$

D'où:

$$\sigma_{z,\,1} = \frac{2p}{\pi^2}ab\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi}\frac{\sin\phi d\phi}{z^2+A^2+B^2-2AB\cos\phi}\,d\theta$$
$$= \frac{p}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\frac{ab}{AB}\,.\,\ln\frac{z^2+A^2+B^2+2AB}{z^2+A^2+B^2-2AB}\,d\theta$$
$$= \frac{p}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\cos\theta\,.\,\sin\theta}\,.\,\ln\left[\frac{1+\dfrac{2ab\cos\theta\sin\theta}{(z^2+a^2)\cos^2\theta+(z^2+b^2)\sin^2\theta}}{1-\dfrac{2ab\cos\theta\sin\theta}{(z^2+a^2)\cos^2\theta+(z^2+b^2)\sin^2\theta}}\right]d\theta$$

$$\sigma_{z,\,1} = \frac{p}{\pi^2}\int_0^{\pi/2}\frac{2}{\cos\theta\sin\theta}\left[\frac{2ab\cos\theta\sin\theta}{(z^2+a^2)\cos^2\theta+(z^2+b^2)\sin^2\theta}+\frac{1}{3}(\quad)^3+\frac{1}{5}(\quad)^5+\ldots\right]d\theta.$$

L'intégrale :

$$I = \int_0^{\pi/2}\frac{(\cos\theta\sin\theta)^{n-1}}{[(z^2+a^2)\cos^2\theta+(z^2+b^2)\sin^2\theta]^n}\,d\theta$$

se résoud en posant $u = \text{tg}\,\theta$.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\infty}\frac{u^{n-1}}{[(z^2+a^2)+(z^2+b^2)u^2]^n}\,du\\
&= \frac{1}{z^2+b^2}\int_0^{\infty}\frac{u^{n-3}}{[z^2+a^2)+(z^2+b^2)u^2]^{n-1}}\,du-\frac{z^2+a^2}{z^2+b^2}\int_0^{\infty}\frac{u^{n-3}}{[(z^2+a^2)+(z^2+b^2)u^2]^n}\,du\\
\sigma_{z,\,1} &= \frac{2p}{\pi}\left[\frac{ab}{[(z^2+a^2)(z^2+b^2)]^{1/2}}+\frac{1}{6}\,\frac{a^3b^3}{[(z^2+a^2)(z^2+b^2)]^{3/2}}+\frac{1}{40}\,\frac{a^5b^5}{[(z^2+a^2)(z^2+b^2)]^{5/2}}+\ldots\right]\\
&= \frac{2p}{\pi}\,\text{arc sin}\left[\frac{ab}{(z^2+a^2)^{1/2}(z^2+b^2)^{1/2}}\right]\\
&= \frac{2p}{\pi}\,\text{arc tg}\left[\frac{ab}{z(z^2+a^2+b^2)^{1/2}}\right].
\end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
\sigma_{z,\,2} &= \frac{4p}{\pi^2}\,\frac{ab}{z^2}\int_0^{\pi/2}\!\!\int_0^{\pi}\frac{z^4\sin\phi\,d\phi}{[z^2+A^2+B^2-2AB\cos\phi]^2}\,d\theta\\
&= \frac{2p}{\pi^2}\,z^2\int_0^{\pi/2}\frac{ab}{AB}\left[\frac{1}{z^2+(A-B)^2}-\frac{1}{z^2+(A+B)^2}\right]d\theta
\end{aligned}$$

Posons également $u = \text{tg}\theta$ :

$$\begin{aligned}
\sigma_{z,\,2} &= \frac{2pz^2}{\pi^2}\int_0^{\infty}\left[\frac{1+u^2}{u\,[(z^2+a^2)-2abu+(z^2+a^2)u^2]}-\frac{1+u^2}{u\,[(z^2+a^2)+2abu+(z^2+b^2)u^2]}\right]du\\
&= \frac{2pz^2}{\pi^2}\left[\frac{ab\,.\,\pi}{z(z^2+a^2)(z^2+a^2+b^2)^{1/2}}+\frac{ab\,.\,\pi}{z(z^2+b^2)(z^2+a^2+b^2)^{1/2}}\right]\\
&= \frac{2pz}{\pi}\,\frac{ab(2z^2+a^2+b^2)}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)(z^2+a^2+b^2)^{1/2}}
\end{aligned}$$

D'où enfin :

$$\sigma_z = \frac{2p}{\pi}\left[\text{arc tg}\,\frac{ab}{z(z^2+a^2+b^2)^{1/2}}+\frac{zab(2z^2+a^2+b^2)}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)(z^2+a^2+b^2)^{1/2}}\right]. \tag{38}$$

On déduit de (38) que :

$$\int_0^{\infty}\!\!\int_0^{\infty}\frac{\sin ta\,.\,\sin sb}{ts}\,e^{-mz}ds\,dt = \frac{\pi}{2}\,\text{arc tg}\,\frac{ab}{z(z^2+a^2+b^2)^{1/2}} \tag{39}$$

$$\int_0^{\infty}\!\!\int_0^{\infty}\frac{\sin ta\,.\,\sin sb}{ts}\,mze^{-mz}ds\,dt = \frac{\pi}{2}\,\frac{zab(2z^2+a^2+b^2)}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)(z^2+a^2+b^2)^{1/2}} \tag{40}$$

Ces intégrales multiples peuvent également s'écrire

$$\int_0^{\infty}\!\!\int_0^{\infty}\frac{J_{1/2}(at)\,J_{1/2}(bs)}{(ts)^{1/2}}\,e^{-mz}ds\,dt = \frac{1}{(ab)^{1/2}}\,\text{arc tg}\,\frac{ab}{z(z^2+a^2+b^2)^{1/2}}$$

$$\int_0^{\infty}\!\!\int_0^{\infty}\frac{J_{1/2}(at)\,J_{1/2}(bs)}{(ts)^{1/2}}\,me^{-mz}ds\,dt = \frac{(ab)^{1/2}\,.\,(2z^2+a^2+b^2)}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)(z^2+a^2+b^2)^{1/2}}$$

avec $m = (t^2+s^2)^{1/2}$.

## 1.4. Contrainte verticale sous charge inclinée rectangulaire

La charge inclinée q, que nous supposons uniformément répartie, peut se décomposer en:
— une charge verticale: $\sigma_z = q \,.\, \cos\alpha = p$
— et une charge de cisaillement horizontale: $\tau = q \,.\, \sin\alpha$
où $\alpha$ est l'angle que fait la charge avec la verticale.

Le cas de la charge verticale a été résolu dans le paragraphe précédent.

La charge horizontale se décompose à son tour en:

$$\tau_{xz} = \tau\cos\theta = \tau_1$$
$$\tau_{yz} = \tau\sin\theta = \tau_2$$

où $\theta$ est l'angle que fait la composante $\tau$ avec l'axe des abcisses x.

Compte tenu de la forme des relations (10) on choisira comme fonctions de tension:
— dans le cas de la charge $\sigma_z = p$

$$\phi_1 = \cos tx \, \cos sy \, f(z)$$
$$\psi_1 = \sin tx \, \sin sy \, g(z)$$

— dans le cas de la charge $\tau_{xz} = \tau_1$

$$\phi_2 = \sin tx \, \cos sy \, f(z)$$
$$\psi_2 = \cos tx \, \sin sy \, g(z)$$

— dans le cas de la charge $\tau_{yz} = \tau_2$

$$\phi_3 = \cos tx \, \sin sy \, f(z)$$
$$\psi_3 = \sin tx \, \cos sy \, g(z)$$

Les conditions aux limites sont données par (19) dans le cas de la charge $\sigma_z = p$. Pour $\tau_{xz} = \tau_1$, $\sigma_z = \tau_{yz} = 0$ elles s'écrivent:

$$m^3B + m^2(1 - 2\mu)D = 0$$
$$m^2sB - 2\mu msD - \frac{mt}{2}F = 0$$
$$m^2tB - 2\mu mtD + \frac{ms}{2}F = -1,$$

d'où l'on tire:

$$B = -\frac{(1 - 2\mu)t}{m^4}$$
$$D = \frac{t}{m^3}$$
$$F = -\frac{2s}{m^3}$$

et pour $\tau_{yz} = \tau_2$, $\sigma_z = \tau_{xz} = 0$ elles s'écrivent:

$$m^3B + m^2(1 - 2\mu)D = 0$$
$$m^2sB - 2\mu msD - \frac{mt}{2}F = -1$$
$$m^2tB - 2\mu mtD + \frac{ms}{2}F = 0$$

d'où l'on tire:

$$B = -\frac{(1 - 2\mu)s}{m^4}$$
$$D = \frac{s}{m^3}$$
$$F = \frac{2t}{m^3}.$$

Les conditions en surface sont exprimées par:

$$\sigma_z = \frac{4p}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\cos tx \,.\, \cos sy \,.\, \sin ta \,.\, \sin sb}{ts}\,dsdt$$

$$\tau_{xz} = \frac{4\tau_1}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos tx \,.\, \cos sy \,.\, \sin ta \,.\, \sin sb}{ts} dsdt$$

$$\tau_{yz} = \frac{4\tau_2}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos tx \,.\, \cos sy \,.\, \sin ta \,.\, \sin sb}{ts} dsdt.$$

Remplaçant dans $\sigma_z$ donné par (16), les valeurs de B et D par celles obtenues à partir des conditions aux limites on obtient, par exemple, la relation de la contrainte verticale :

$$\sigma_z = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \sin ta \,.\, \sin sb \left[ p \frac{\cos tx \,.\, \cos sy}{ts} (1 + mz) - \tau_1 \frac{\sin tx \,.\, \cos sy}{s} z - \tau_2 \frac{\cos tx \,.\, \sin sy}{t} z \right] e^{-mz} dsdt.$$

## 2. DÉFLECTION VERTICALE A LA SURFACE D'UN MASSIF ISOTROPE SOUMIS A UNE CHARGE VERTICALE RECTANGULAIRE

### 2.1. Massif soumis à une charge verticale uniforme

Le déplacement vertical est donné par (13) :

$$w = \frac{1+\mu}{E} \left[ 2(1-\mu)\nabla^2\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \right]$$

$$= \frac{1+\mu}{E} \left[ 2(1-\mu)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + 2(1-\mu)\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + (1-2\mu)\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \right] \quad (41)$$

Introduisant (14) dans (41), il vient :

$$w = \frac{1+\mu}{E} \cos tx \cos sy \left[ Bm^2 e^{-mz} + zDm^2 e^{-mz} + 2(1-2\mu) Dme^{-mz} \right]$$

et par (19) :

$$w = -\frac{1+\mu}{E} \frac{\cos tx \cos sy}{m} \left[ 2(1-\mu)e^{-mz} + mze^{-mz} \right]$$

d'où après transformation :

$$w = -\frac{4p}{\pi^2} \frac{1+\mu}{E} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\cos tx \cos sy \sin ta \sin sb}{mts} . \left[ 2(1-\mu)e^{-mz} + mze^{-mz} \right] dsdt \quad (42)$$

relation qui en surface ($z = 0$) et dans l'axe ($x = 0$, $y = 0$) se réduit à :

$$w = -\frac{8p}{\pi^2} \frac{(1-\mu^2)}{E} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin ta \,.\, \sin sb}{mts} dsdt. \quad (43)$$

La résolution de (43) nécessité le recours à quelques artifices.
Posons :

$$t = \rho \cos \theta$$
$$s = \rho \sin \theta$$

d'où :

$$m = \rho$$
$$dsdt = \rho d\rho d\theta$$

et :

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin ta \,.\, \sin sb}{mts} dsdt = \int_0^{\pi/2} \int_0^\infty \frac{\sin(a\rho \cos\theta \,.\, \sin(b\rho \sin\theta)}{\rho^2 \sin\theta \,.\, \cos\theta} d\rho d\theta.$$

Posons :

$$\alpha = a \cos \theta$$
$$\beta = b \sin \theta$$

et remplaçons $\sin \alpha\rho$ par $\sqrt{\frac{\pi\alpha\rho}{2}} J_{1/2}(\alpha\rho)$.

Il vient, d'après Watson (1966, p. 405) :

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha\rho \,.\, \sin \beta\rho}{\rho^2} \, d\rho = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \sqrt{\alpha\beta} \, \frac{J_{1/2}(\alpha\rho) \, J_{1/2}(\beta\rho)}{\rho} \, d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2} \sqrt{\alpha\beta} \,.\, \begin{cases} (\beta/\alpha)^{1/2} \text{ si } \beta < \alpha \\ (\alpha/\beta)^{1/2} \text{ si } \alpha < \beta \end{cases}$$

d'où :

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha\rho \,.\, \sin \beta\rho}{\rho^2} \, d\rho = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \,.\, \beta \text{ si } \beta < \alpha \\ \frac{\pi}{2} \,.\, \alpha \text{ si } \alpha < \beta. \end{cases}$$

Il vient alors avec $\beta \lesseqgtr \alpha$ équivalent à $\theta \lesseqgtr \text{arc tg } a/b$ :

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty \frac{\sin(a\rho \cos \theta) \, \sin(b\rho \sin \theta)}{\rho^2 \sin \theta \cos \theta} \, d\rho d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^{\text{arc tg} a/b} \frac{b \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} \, d\theta + \frac{\pi}{2} \int_{\text{arc tg } a/b}^{\pi/2} \frac{a \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} \, d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}\left( - b \ln \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \bigg|_0^{\text{arc tg } a/b} + a \ln \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \bigg|_{\text{arc tg } a/b}^{\pi/2} \right)$$

$$= - \frac{\pi}{2} \left[ a \ln \frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)} + b} + b \ln \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)} + a} \right].$$

L'expression finale de la flèche devient :

$$w = \frac{4p}{\pi} \, \frac{(1 - \mu^2)}{E} \left[ a \ln \frac{a}{\sqrt{(a^2 + b^2)} + b} + b \ln \frac{b}{\sqrt{(a^2 + b^2)} + a} \right]. \qquad (44)$$

Dans le cas d'une semelle carrée ($a = b$), l'expression (44) se réduit à :

$$w = - \frac{8pa}{\pi} \, \frac{(1 - \mu^2)}{E} \ln(1 + \sqrt{2}).$$

La flèche sous une charge circulaire de rayon R est donnée par :

$$w = - 2pR \frac{(1 - \mu^2)}{E}.$$

La flèche au centre d'une semelle carrée de côté 2a est donc identique à celle au centre d'une semelle circulaire de rayon :

$$R = \frac{4}{\pi} \ln(1 + \sqrt{2})a$$

$$= 1,\ 12a.$$

## 2.2. Massif soumis à une charge transmise par un support rigide

Les développements qui précèdent se basent sur l'hypothèse que la contrainte verticale appliquée à la surface du massif est uniformément répartie. Physiquement cela revient à supposer que la semelle de fondation est infiniment souple. En mécanique des sols, où les semelles de fondation sont en général très, sinon extrêmement rigides, cette hypothèse est donc peu vraisemblable.

Le cas de la semelle infiniment rigide, c'est-à-dire non déformable, peut être traité par une expression appropriée du noyau dans l'intégrale de Fourier (18).

Les conditions aux limites en surface sont ici

$$\sigma_z = p(x, y) \text{ pour } x[- a, a],\ y[- b, b]$$
$$\sigma_z = 0 \text{ ailleurs}$$

$$\begin{aligned} w &= \text{Cte pour } x[-a, a],\ y[-b, b] \\ \tau_{xz} &= 0 \\ \tau_{yz} &= 0 \end{aligned} \tag{47}$$

Par analogie avec une charge circulaire rigide, Muki (1960), Dahan (1981), et avec une charge bidimensionnelle rigide, Van Cauwelaert (1983), on peut rencontrer ces conditions par la transformée intégrale :

$$\sigma_z = K \int_0^\infty \int_0^\infty \cos tx \cos sy\ J_0(at)\ J_0(bs)\ dsdt, \tag{48}$$

dans laquelle K est une constante dont la valeur dépend de la charge appliquée totale P.

On a, en surface, d'après Watson (1966, p. 405).

$$\sigma_z = \begin{cases} \dfrac{K}{\sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)}} & \text{pour } \begin{cases} |x| < a \\ |y| < b \end{cases} \\ \infty & \text{pour } x = a \text{ et/ou } y = b \\ 0 & \text{pour } \begin{cases} |x| > a \\ |y| > b \end{cases} \end{cases}$$

La valeur de K s'obtient par :

$$P = \int_{-a}^{a} \int_{-b}^{b} \frac{K}{\sqrt{(a^2 - x^2)(b^2 - y^2)}} dxdy = K\pi^2$$

d'où : $K = \dfrac{P}{\pi^2}$.

Il faudrait à ce stade et pour être complètement rigoureux, montrer que l'expression correspondante de la flèche en surface répond également aux conditions (47). Nous n'avons pu le faire par voie analytique : les intégrales concernées posent des problèmes de convergence à divers stades intermédiaires d'une complexité telle que les développements mathématiques correspondants en deviennent difficilement maitrisables. Les résultats numériques que nous avons obtenus sont cependant, comme nous le montrerons plus loin, suffisamment cohérents pour que nous estimions pouvoir utiliser la transformée (48) sans démonstration supplémentaire, du moins, dans l'état actuel de la question.

Les expressions des paramètres B, D et F, sont, comme dans le cas précédent, données par (19).

L'expression de la contrainte verticale devient ainsi dans l'axe de la charge :

$$\sigma_z = \frac{P}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty J_0(at)\ J_0(bs)\ (1 + mz)e^{-mz} dsdt. \tag{49}$$

Cette relation n'est pas intégrable analytiquement par suite de la présence du facteur mz (Watson, 1966, p. 389).

Dans le cas d'un massif anisotrope à isotropie transverse, ce facteur disparaît. La relation correspondante de la contrainte verticale peut alors être obtenue sans problème analytique majeur ; le cas isotrope en sera déduit par passage à la limite.

## 3. MASSIF SEMI-INFINI A ISOTROPIE TRANSVERSE

### 3.1. Equations différentielles des contraintes et des déplacements

Considérons un massif semi-infini caractérisé par les constantes élastiques suivantes :

E : module de Young dans le sens vertical.
E/n : module de Young dans le plan horizontal.
$\mu$ : coefficient de Poisson caractérisant une déformation dans le plan horizontal provoquée par une contrainte dans le sens vertical.

Par symétrie, le coefficient de Poisson caractérisant une déformation verticale provoquée par une contrainte dans le plan horizontal est égal à $\mu/n$.

Dans le cas des matériaux granulaires et des sols il n'est guère possible de déterminer le coefficient de Poisson dans le plan horizontal ni le module de cisaillement dans un plan vertical (anisotrope).

On admettra dans ce qui suit, avec Barden (1963), Eftimie (1973) et Van Cauwelaert (1983),
$\nu$ (coefficient de Poisson horizontal) = $\mu/n$
$G_{xz}$ (module de cisaillement vertical) = $E/(1 + n = 2\mu)$.

Dans un système de coordonnées cylindriques, les équations différentielles suivantes des contraintes sont solution des équations d'équilibre (Van Cauwelaert, 1983):

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z}\left[(\mu^2 - n)\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \mu(n + \mu)\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \mu(n + \mu)\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + \mu(n + \mu)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu(n + \mu)\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + (\mu^2 - n)\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \mu(n + \mu)\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + (\mu^2 - n)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\right] - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}$$

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z}\left[(n^2 + \mu n + n - \mu^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + (n^2 + \mu n + n - \mu^2)\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + (n^2 - \mu^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + (n^2 + \mu n + n - \mu^2)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\right] \tag{50}$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[(n - \mu^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + (n - \mu^2)\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} - \mu(n + \mu)\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + (n - \mu^2)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\right] - \frac{n + \mu}{1 + n + 2\mu}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z}$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r}\left[(n - \mu^2)\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + (n - \mu^2)\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} - \mu(n + \mu)\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} + (n - \mu^2)\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\right] + \frac{n + \mu}{1 + n + 2\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial z}$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial z}\left[- n(1 + \mu)\frac{\partial\phi}{\partial r} + n(1 + \mu)\frac{\phi}{r}\right] - \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{n + \mu}{1 + n + 2\mu}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

Appliquant les transformations (7), (8) et (9) on obtient les équations des contraintes dans un système d'axes cartésiens:

$$\sigma_x = \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu(n + \mu)\nabla^2\phi - n(1 + \mu)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right] + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}$$

$$\sigma_y = \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu(n + \mu)\nabla^2\phi - n(1 + \mu)\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right] - \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}$$

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z}\left[(n^2 + \mu n + n - \mu^2)\nabla^2\phi - n(1 + \mu)\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right] \tag{51}$$

$$\tau_{yz} = \frac{\partial}{\partial y}\left[(n - \mu^2)\nabla^2\phi - n(1 + \mu)\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right] - \frac{n + \mu}{1 + n + 2\mu}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}$$

$$\tau_{xz} = \frac{\partial}{\partial x}\left[(n - \mu^2)\nabla^2\phi - n(1 + \mu)\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right] + \frac{n + \mu}{1 + n + 2\mu}\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z}$$

$$\tau_{xy} = - n(1 + \mu)\frac{\partial^3\phi}{\partial x\partial y\partial z} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right).$$

Ces relations satisfont aux équations d'équilibre et de compatibilité si $\phi$ et $\psi$ sont solution de:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{n^2 - \mu^2}{n - \mu^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{2(n + \mu)}{1 + n + 2\mu}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0. \tag{52}$$

Les équations des déplacements sont données par:

$$u = \int \varepsilon_x dx = \frac{1}{E}\int (n\sigma x - \mu\sigma y - \mu\sigma z)dx$$

$$v = \int \varepsilon_y dy = \frac{1}{E} \int (n\sigma y - \mu\sigma x - \mu\sigma z)dy$$

$$w = \int \varepsilon_z dz = \frac{1}{E} \int (\sigma z - \mu\sigma x - \mu\sigma y)dz$$

$$u = -\frac{n+\mu}{E}\left[n(1+\mu)\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\right] \qquad (53)$$

$$v = -\frac{n+\mu}{E}\left[n(1+\mu)\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\right]$$

$$w = \frac{1}{E}\left[(n-\mu^2)(1+n+2\mu)\nabla^2\phi - n(1+\mu)^2\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right].$$

Les expressions explicites de $\phi$ et de $\psi$ sont de la même forme que celles données par les relations (15) et obtenues par résolution des équations de compatibilité (52). On a :

$$\phi = \cos tx \cos sy\ [Ae^{mz} - Be^{-mz} + Ce^{k_1mz} - De^{-k_1mz}]$$

$$\psi = \sin tx \sin sy\ [Ee^{k_2mz} - Fe^{-k_2mz}] \qquad (54)$$

où les indices d'anisotropie, $k_1$ et $k_2$, sont respectivement égaux à :

$$k_1 = \sqrt{\frac{n-\mu^2}{n^2-\mu^2}} \qquad k_2 = \sqrt{\frac{1+n+2\mu}{2(n+\mu)}}. \qquad (55)$$

## 3.2. Contrainte verticale et flèche en surface dans le cas d'une charge rectangulaire uniformément répartie

Introduisant (54) dans (51) on obtient, compte tenu de $A = C = E + 0$,

$$\sigma_z = -\cos tx \cos sy\ [n(1+\mu)m^3Be^{-mz} + nk_1(n+\mu)m^3De^{-mk_1z}]$$

$$\tau_{yz} = -\cos tx \sin sy\ [n(1+\mu)m^2sBe^{-mz} + nk_1^2(n+\mu)m^2sDe^{-mk_1z}] + \frac{n+\mu}{1+n+2\mu}k_2\,mtFe^{-k_2mz}\Big] \qquad (56)$$

$$\tau_{xz} = -\sin tx \cos sy\left[n(1+\mu)m^2tBe^{-mz} + nk_1^2(n+\mu)m^2tDe^{-mk_1z} - \frac{n+\mu}{1+n+2\mu}k_2msFe^{-k_2mz}\right]$$

Les conditions aux limites (17) s'écrivent :

$$n(1+\mu)m^3B + nk_1(n+\mu)m^3D = -1$$

$$n(1+\mu)m^2sB + nk_1^2(n+\mu)m^2sD + \frac{n+\mu}{1+n+2\mu}k_2mtF = 0$$

$$n(1+\mu)m^2tB + nk_1^2(n+\mu)m^2tD + \frac{n+\mu}{1+n+2\mu}k_2msF = 0 \qquad (57)$$

d'où l'on tire :

$$n(1+\mu)m^3B = \frac{-k_1}{k_1-1}$$

$$nk_1(n+\mu)m^3D = \frac{1}{k_1-1} \qquad (58)$$

$$F = 0$$

d'où enfin l'expression de la contrainte verticale :

$$\sigma_z = \cos tx \cos sy\ \frac{1}{(k_1-1)}[k_1e^{-mz} - e^{-mk_1z}]. \qquad (59)$$

Appliquant la transformation (18) on a :

$$\sigma_z = \frac{4p}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\cos tx \cos sy \sin ta \sin sb}{ts}\ \frac{1}{(k_1-1)}(k_1e^{mz} - e^{-mk_1z})dsdt$$

dont la solution dans l'axe de la charge ($x = 0$, $y = 0$) est donnée par (39) :

$$\sigma_z = \frac{2p}{\pi}\ \frac{1}{(k_1-1)}\left[k_1 \operatorname{arc\,tg}\frac{ab}{z(a^2+b^2+z^2)^{1/2}} - \operatorname{arc\,tg}\frac{ab}{k_1z(a^2+b^2+k_1^2z^2)^{1/2}}\right] \qquad (60)$$

Dans le cas d'une charge isolée on a par (29):

$$\sigma_z = \frac{P}{2\pi}\int_0^\infty J_0\,[\rho(x^2+y^2)^{1/2}]\,\frac{1}{(k_1-1)}\,[k_1e^{-\rho z}-e^{-k_1\rho z}]\rho d\rho$$

$$= \frac{P}{2\pi}\,\frac{k_1 z}{(k_1-1)}\left[\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}-\frac{1}{(x^2+y^2+k_1^2z^2)^{3/2}}\right] \quad (61)$$

relation qui devient dans l'axe de la charge ($x = 0$, $y = 0$):

$$\sigma_z = \frac{P}{2\pi}\cdot\frac{k_1^2+k_1+1}{k_1^2\,z^2}. \quad (62)$$

Pour $k_1 = 1$ et donc $n = 1$ (massif isotrope), (62) se transforme dans le résultat de Boussinesq:

$$\sigma_z = \frac{3P}{2\pi z^2}.$$

L'analyse de (62) montre le rôle que l'indice d'anisotropie $k_1$ peut jouer en tant que «facteur de concentration des contraintes» (Van Cauwelaert, 1980, 1983). En l'assimilant par exemple au facteur de concentration $\nu$ des contraintes de Fröhlich (1934) on a par (62):

$$\frac{k_1^2+k_1+1}{k_1^2} = \nu.$$

On peut d'autre part montrer (van Cauwelaert 1982, 1983) qu'à la *limite de rupture*, l'indice d'anisotropie est, dans le cas d'un sol pulvérulent, égal au coefficient de poussée active des terres:

$$k_1 = K_A.$$

On obtient l'expression explicite de la flèche verticale en surface ($z = 0$) en introduisant (54) et (58) dans (53):

$$w = -\frac{4p}{\pi^2E}\,\frac{k_1(n-1)}{(k_1-1)}\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty \frac{\cos tx\cos sy\sin ta\sin sb}{mts}\,dsdt$$

dont la solution dans l'axe de la charge ($x = y = 0$) est obtenue par application de (43) et (44):

$$w = -\frac{2p}{\pi E}\,\frac{k_1(n-1)}{(k_1-1)}\left[a\ln\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}+b}+b\ln\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}+a}\right]. \quad (63)$$

## 3.3. Contrainte verticale dans le cas d'une charge rectangulaire rigide

L'expression de la contrainte verticale dans l'axe de la charge est obtenue par application de (49) et (59):

$$\sigma_z = \frac{P}{\pi^2}\,\frac{1}{(k_1-1)}\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty J_0(at)\,J_0(bs)\,[k_1e^{-mz}-e^{-mk_1z}]dsdt. \quad (64)$$

Posons:

$$t = \rho\cos\theta$$
$$s = \rho\sin\theta$$
$$m = \rho$$
$$dsdt = \rho d\rho d\theta$$

On a:

$$\sigma_z = \frac{P}{\pi^2}\,\frac{1}{(k_1-1)}\int_0^{\pi/2}\!\!\int_0^\infty J_0(a\rho\cos\theta)\,J_0(b\rho\sin\theta)\,[k_1e^{-\rho z}-e^{-k_1\rho z}]\rho d\rho d\theta,$$

et avec: $\alpha = a\cos\theta$, $\beta = b\sin\theta$,

$$\sigma_z = \frac{P}{\pi^2}\,\frac{1}{(k_1-1)}\int_0^{\pi/2}\!\!\int_0^\infty J_0(\alpha\rho)\,.\,J_0(\beta\rho)\,[k_1e^{-\rho z}-e^{-k_1\rho z}]\rho d\rho d\theta. \quad (65)$$

On a, d'après Watson (1966, p. 389):

$$\int_0^\infty e^{-\rho z}\,J_0(\alpha\rho)\,J_0(\beta\rho)\rho^{\mu-1}d\rho = \frac{\Gamma(\mu)}{\pi z^\mu}\int_0^\pi F\left(\frac{\mu}{2},\frac{\mu+1}{2};1;-\frac{\omega^2}{z^2}\right)d\phi \quad (66)$$

où:

$$\omega^2 = z^2+\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\phi.$$

La série hypergéométrique dans (66) se réduit à une forme élémentaire pour $\mu = 1$ ou $\mu = 2$ puisque (Wayland, 1970):

$$F(a, c; c; z) = (1 - z)^{-a}.$$

Dans le cas de (65), $\mu = 2$. Dans le cas isotrope exprimé par (49) on a par contre $\mu = 2$ et $\mu = 3$ ce qui nécessite le détour par la théorie anisotrope. Posant $\mu = 2$, (65) devient:

$$\sigma_z = \frac{P}{\pi^3}\,\frac{k_1 z}{(k_1 - 1)} \int_0^{\pi/2}\!\!\int_0^{\pi} \left[\frac{1}{(z^2 + \omega^2)^{3/2}} - \frac{1}{(k_1 z^2 + \omega^2)^{3/2}}\right] d\phi d\theta \tag{67}$$

et passant à la limite ($k_1 = 1$), on obtient pour un massif isotrope:

$$\sigma_z = \frac{3P}{\pi^3} z^3 \int_0^{\pi/2}\!\!\int_0^{\pi} \frac{1}{(z^2 + \omega^2)^{5/2}}\, d\phi d\theta. \tag{68}$$

Les relations (67) et (68) peuvent facilement être intégrées numériquement.

Egalant d'autre part (68) à (49) on en déduit que:

$$F\left(\frac{3}{2}, 2; 1; -\frac{\omega^2}{z^2}\right) = \frac{1 - \omega^2/2z^2}{(1 + \omega^2/z^2)^{5/2}}.$$

Il est intéressant de comparer la relation (67) avec celle donnant la contrainte verticale sous une charge isolée en coordonnées cartésiennes (61):

$$\sigma_z = \frac{P}{2\pi}\,\frac{k_1 z}{(k_1 - 1)} \left[\frac{1}{(z^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{1}{(k_1^2 z^2 + x^2 + y^2)^{3/2}}\right]$$

ou en coordonnées cylindriques (Van Cauwelaert, 1980):

$$\sigma_z = \frac{P}{2\pi}\,\frac{k_1 z}{(k_1 - 1)} \left[\frac{1}{(z^2 + r^2)^{3/2}} - \frac{1}{(k_1^2 z^2 + r^2)^{3/2}}\right].$$

On trouvera au tableau I une série de valeurs de $\sigma_z$ pour différentes valeurs de z/a, b/a et $k_1$.

Les contraintes sont exprimées en fonction de $p = P/4ab$.

Rappelons qu'en surface la contrainte verticale dans l'axe de la charge est égale à $4p/\pi^2 = 0{,}405$ p.

## 3.4. Flèche en surface sous une charge rectangulaire rigide

L'expression de la flèche en surface est obtenue à partir de (53) à laquelle on applique la transformation donnée par (48):

$$w = \frac{P}{\pi^2}\,\frac{k_1(n - 1)}{E(k_1 - 1)} \int_0^{\infty}\!\!\int_0^{\infty} \frac{\cos tx \cos sy\; J_0(at)\; J_0(bs)}{m} dsdt. \tag{69}$$

L'élimination du facteur m dans le dénominateur s'obtient en effectuant la transformation déjà utilisée $t = \rho \cos \theta$, $s = \rho \sin \theta$ et donc:

$$w = \frac{P}{\pi^2}\,\frac{k_1(n - 1)}{E(k_1 - 1)} \int_0^{\pi/2}\!\!\int_0^{\infty} \cos(\rho x \cos\theta) \cos(\rho y \sin\theta)\; J_0(\rho a \cos\theta)\; J_0(\rho b \sin\theta) d\rho d\theta. \tag{70}$$

Dans l'axe de la charge ($x = y = 0$) la relation (70) se simplifie:

$$w = \frac{P}{\pi^2}\,\frac{k_1(n - 1)}{E(k_1 - 1)} \int_0^{\pi/2}\!\!\int_0^{\infty} J_0(\rho a \cos\theta)\; J_0(\rho b \sin\theta) d\rho d\theta. \tag{71}$$

La solution générale de cette intégrale a été établie par Gegenbauer (Watson, 1966, p. 407)*:

* Notons que la solution générale publiée par Watson contient une erreur. Le facteur précédant la série F n'est pas:

$$\frac{(ab)^\nu\, \Gamma(\nu - \lambda/2 + 1/2)}{2^\lambda (a^2 + b^2)^{\nu - \lambda/2 + 1/2}\, \Gamma(\nu + 1)}$$

mais bien:

$$\frac{(ab)^\nu\, \Gamma(\nu - \lambda/2 + 1/2)}{2^\lambda (a^2 + b^2)^{\nu - \lambda/2 + 1/2}\, \Gamma(\nu + 1/2)}$$

*Contraintes verticales dans l'axe d'une semelle rectangulaire*

| | b/a | 0,2 | 0,2 | 0,5 | 0,5 | 1,0 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | z/a | Rigide | Souple | Rigide | Souple | Rigide | Souple |
| | 0,5 | 0,408 | 0,738 | 0,445 | 0,945 | 0,430 | 0,984 |
| | 1,0 | 0,304 | 0,471 | 0,448 | 0,789 | 0,463 | 0,914 |
| | 1,5 | 0,230 | 0,325 | 0,408 | 0,629 | 0,467 | 0,808 |
| $K_1 = 0,3$ | 2,0 | 0,180 | 0,238 | 0,355 | 0,499 | 0,446 | 0,690 |
| | 2,5 | 0,144 | 0,181 | 0,303 | 0,398 | 0,412 | 0,594 |
| | 3,0 | 0,118 | 0,142 | 0,256 | 0,322 | 0,373 | 0,505 |
| $\gamma = 15,4$ | 3,5 | 0,097 | 0,113 | 0,219 | 0,263 | 0,333 | 0,430 |
| | 4,0 | 0,081 | 0,093 | 0,187 | 0,218 | 0,297 | 0,368 |
| | 4,5 | 0,069 | 0,077 | 0,161 | 0,183 | 0,263 | 0,317 |
| | 5,0 | 0,059 | 0,065 | 0,139 | 0,155 | 0,234 | 0,274 |
| | 0,5 | 0,369 | 0,613 | 0,459 | 0,902 | 0,445 | 0,971 |
| | 1,0 | 0,241 | 0,343 | 0,429 | 0,667 | 0,479 | 0,847 |
| | 1,5 | 0,170 | 0,218 | 0,351 | 0,473 | 0,456 | 0,685 |
| $K_1 = 0,5$ | 2,0 | 0,125 | 0,149 | 0,275 | 0,340 | 0,399 | 0,538 |
| | 2,5 | 0,094 | 0,107 | 0,215 | 0,252 | 0,337 | 0,422 |
| | 3,0 | 0,072 | 0,080 | 0,170 | 0,191 | 0,281 | 0,334 |
| $\gamma = 7,0$ | 3,5 | 0,057 | 0,062 | 0,136 | 0,149 | 0,234 | 0,269 |
| | 4,0 | 0,046 | 0,049 | 0,111 | 0,119 | 0,196 | 0,219 |
| | 4,5 | 0,038 | 0,040 | 0,091 | 0,097 | 0,165 | 0,181 |
| | 5,0 | 0,032 | 0,033 | 0,076 | 0,080 | 0,141 | 0,152 |
| | 0,5 | 0,335 | 0,531 | 0,464 | 0,859 | 0,456 | 0,955 |
| | 1,0 | 0,205 | 0,275 | 0,400 | 0,575 | 0,481 | 0,784 |
| | 1,5 | 0,137 | 0,166 | 0,300 | 0,377 | 0,426 | 0,587 |
| $K_1 = 0,7$ | 2,0 | 0,096 | 0,109 | 0,220 | 0,256 | 0,347 | 0,432 |
| | 2,5 | 0,069 | 0,076 | 0,164 | 0,182 | 0,275 | 0,322 |
| | 3,0 | 0,052 | 0,055 | 0,124 | 0,134 | 0,218 | 0,246 |
| $\gamma = 4,5$ | 3,5 | 0,040 | 0,042 | 0,097 | 0,103 | 0,175 | 0,192 |
| | 4,0 | 0,032 | 0,033 | 0,077 | 0,081 | 0,143 | 0,153 |
| | 4,5 | 0,026 | 0,026 | 0,063 | 0,065 | 0,118 | 0,125 |
| | 5,0 | 0,021 | 0,022 | 0,052 | 0,053 | 0,098 | 0,103 |
| | 0,5 | 0,309 | 0,475 | 0,464 | 0,818 | 0,466 | 0,938 |
| | 1,0 | 0,181 | 0,234 | 0,372 | 0,508 | 0,473 | 0,726 |
| | 1,5 | 0,116 | 0.136 | 0,262 | 0,315 | 0,393 | 0,514 |
| $K_1 = 0,9$ | 2,0 | 0,078 | 0,087 | 0,184 | 0,207 | 0,303 | 0,362 |
| | 2,5 | 0,055 | 0,059 | 0,133 | 0,144 | 0,232 | 0,262 |
| | 3,0 | 0,041 | 0,043 | 0,099 | 0,105 | 0,179 | 0,196 |
| $\gamma = 3,4$ | 3,5 | 0,031 | 0,032 | 0,076 | 0,079 | 0,141 | 0,151 |
| | 4,0 | 0,024 | 0,025 | 0,060 | 0,062 | 0,113 | 0,119 |
| | 4,5 | 0,020 | 0,020 | 0,048 | 0,050 | 0,092 | 0,096 |
| | 5,0 | 0,016 | 0,016 | 0,040 | 0,041 | 0,077 | 0,079 |
| | 0,5 | 0,299 | 0,454 | 0,463 | 0,800 | 0,469 | 0,930 |
| | 1,0 | 0,172 | 0,219 | 0,359 | 0,481 | 0,467 | 0,701 |
| | 1,5 | 0,109 | 0,125 | 0,247 | 0,293 | 0,378 | 0,484 |
| $K_1 = 1,0$ | 2,0 | 0,072 | 0,079 | 0,171 | 0,190 | 0,286 | 0,336 |
| | 2,5 | 0,051 | 0,054 | 0,122 | 0,131 | 0,215 | 0,241 |
| | 3,0 | 0,037 | 0,039 | 0,090 | 0,095 | 0,165 | 0,179 |
| $\gamma = 3,0$ | 3,5 | 0,028 | 0,029 | 0,069 | 0,072 | 0,129 | 0,137 |
| | 4,0 | 0,022 | 0,023 | 0,054 | 0,056 | 0,103 | 0,108 |
| | 4,5 | 0,018 | 0,018 | 0,044 | 0,045 | 0,084 | 0,087 |
| | 5,0 | 0,015 | 0,015 | 0,036 | 0,037 | 0,069 | 0,072 |

$$k_1 = \sqrt{\frac{n-\mu^2}{n^2-\mu^2}},\quad v = \frac{k_1^2+k_1+1}{k_1^2},\quad n = \frac{E_v}{E_h}$$

En regard des contraintes verticales dans l'axe d'une semelle rigide on trouvera les contraintes correspondantes dans l'axe d'une semelle souple obtenues par (38) pour un massif isotrope et par (60) pour un massif anisotrope.

On constate qu'à partir d'une profondeur de l'ordre de 5a les contraintes deviennent indépendantes du mode d'application de la charge (principe de Saint-Venant).

L'intérêt pratique des résultats du tableau réside dans le fait qu'ils permettent de calculer facilement les tassements. Puisque ceux-ci sont uniformes sous la semelle rigide, leur détermination peut être faite en n'importe quel endroit sous la semelle et donc en particulier dans l'axe. Ceci permet d'éviter d'avoir recours à des techniques plus compliquées telle la méthode graphique de Newmark (1947).

Le tableau renseigne également la valeur du facteur v de Fröhlich déterminée en fonction du degré d'anisotropie par $v = (k_1^2 + k_1 + 1)/k_1^2$ de manière à en faciliter l'usage au lecteur plus familiarisé au formalisme du Fröhlich.

$$\int_0^{\infty} J_0(\rho a\cos\theta)\, J_0(\rho b\sin\theta)d\rho = \frac{1}{a(\cos^2\theta + b^2/a^2\sin^2\theta)^{1/2}} \,.\, F\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; 1; \frac{4b^2/a^2 \,.\, \cos^2\theta\sin^2\theta}{(\cos^2\theta + b^2/a^2\sin^2\theta)^2}\right]. \tag{72}$$

Cette intégrale ne converge par pour $a\cos\theta = b\sin\theta$, c'est-à-dire pour $\theta = \mathrm{arctg}(a/b)$ ce qui empêche d'intégrer (71) par voie numérique. Lorsque $a = b$, cas de la semelle carrée, la solution peut toutefois être trouvée par voie analytique. Ceci explique aussi les raisons pour lesquelles nous n'avons pu résoudre le cas général comme nous l'avons signalé au § 2.2. Lorsque $a = b$, on a :

$$\int_0^{\infty} J_0(\rho a\cos\theta)\, J_0(\rho a\sin\theta)d\rho = \frac{1}{a} F\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; 1; \sin^2 2\theta\right],$$

et (71) devient :

$$w = \frac{P}{\pi^2}\,\frac{k_1(n-1)}{E(k_1-1)}\,\frac{1}{a}\int_0^{\pi/2} F\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; 1; \sin^2 2\theta\right]d\theta.$$

Posant $\omega = 2\theta$, il vient :

$$w = \frac{P}{\pi^2}\,\frac{k_1(n-1)}{E(k_1-1)}\,\frac{1}{a}\int_0^{\pi/2}\left[1 + \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}{1\,.\,1}\sin^2\omega + \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{4}}{1\,.\,2\,.\,1\,.\,2}\sin^4\omega + \ldots\right]d\omega$$

$$= \frac{P}{\pi^2}\,\frac{k_1(n-1)}{E(k_1-1)}\,\frac{1}{a}\,\frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}{1\,.\,1}\cdot\frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{4}}{1\,.\,2\,.\,1\,.\,2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} + \ldots\right]$$

La série entre crochets converge cette fois et tend approximativement vers 1,3, d'où :

$$w = \frac{0{,}65\,P}{\pi}\,\frac{k_1(n-1)}{E(k_1-1)}\,\frac{1}{a}. \tag{73}$$

Dans le cas d'un massif isotrope, il vient :

$$w = -\frac{1{,}3\,P}{\pi}\,\frac{(1-\mu^2)}{E}\,\frac{1}{a}. \tag{74}$$

Comparant (73) à (63) on trouve que le rapport des flèches dans le cas de semelles carrées est égal à :

$$\frac{w_{rigide}}{w_{souple}} = -\frac{0{,}65}{\pi} \times \frac{\pi}{\ln\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}} = 0{,}74$$

et qu'il est indépendant du degré d'anisotropie du sol.

Dans le cas de semelles circulaires on trouve (Zimpfer, 1961), (Van Cauwelaert, 1983) :

$$\frac{w_{rigide}}{w_{souple}} = 0{,}79 \qquad (\pi/4).$$

La contrainte verticale dans l'axe d'une semelle carrée rigide est égale à $4/\pi^2$ fois la contrainte uniforme sous une semelle souple. Elle est donc plus faible que celle dans l'axe d'une semelle circulaire rigide égale à 0,5 fois la contrainte uniforme.

Il est dès lors logique que le rapport des flèches dans le cas de semelles carrées soit également plus faible que dans le cas de semelles circulaires. Cette conclusion nous rassure quant à la valeur du choix de la transformée intégrale (48) pour exprimer les conditions aux limites sous semelle rectangulaire rigide.

## 4. CONCLUSION

L'intérêt des solutions proposées ici est double.

D'une part les valeurs renseignées au tableau permettent le calcul rapide des tassements sous semelle rigide rectangulaire.

Mais les solutions obtenues par application des transformées intégrales permettent d'autre part et surtout leur utilisation dans le cas de massifs stratifiés et de présenter donc des solutions directement utilisables dans la pratique sous forme d'une série d'abaques.

C'est à quoi nous comptons nous attacher dans un article prochain.

## BIBLIOGRAPHIE

BARDEN (1963). — *Stresses and Displacements in a Cross-Anisotropic Soil.* — Geotechnique n° 13, pp. 198-210. London.

BOUSSINESQ (1885). — *Application des potentiels à l'Etude de l'Equilibre et du Mouvement des Solides Elastiques.* — Gauthier-Villars. Paris.

BURMISTER (1943). — *The Theory of Stresses and Displacements in Layered Systems.* — Proc. Highway Research Board. 23 rd Meeting. Washington.

DAHAN (1979). — *Poinçons axisymétriques rigides sur un massif élastique semi-infini transversalement isotrope.* — Journal de Mécanique Appliquée, 3, 373-386.

EFTIMIE (1973). — *Starea de tensiune in terenurile anizotrofe de fundatie.* — Buletinul Institutului Politehnic di Tasi. Tome XIX, fasc. 1-2.

FLORIN (1959). — *Fundamentals of Soil Mechanics.* — Gosstroïzdat. Moscou.

FROHLICH (1934). — *Druckverteilung in Baugrunde.* — Springer Verlag. Wien.

LOVE (1927). — *Mathematical Theory of Elasticity.* — Cambridge University Press. New York.

MUKI (1960). — *Asymetric problems of the theory of elasticity for a semi-infinite solid and a thick plate.* — Progress in Solid Mechanics. Edited by Sneddon and Hill. North Holland Publishing Company. Amsterdam.

NEWMARK (1947). — *Influence charts for the Computation of Vertical Displacements in Elastic Foundations.* — University of Illinois. Bulletin n° 45.

SPIEGEL (1971). — *Advanced Mathematics for Engineers and Scientists.* — Schaum's outline series. Mc Graw Hill Book Company. New York.

VAN CAUWELAERT (1980). — *Contraintes et déplacements dans un massif semi-infini anisotrope à plan isotrope.* — Annales des Travaux Publics de Belgique n° 2. Bruxelles.

VAN CAUWELAERT, CERISIER (1982). — *Bearing capacity considered as a geotechnical concept.* — Proc. of the Int. Symp. on Bearing Capacity of roads and airfields. Trondheim (Norvège).

VAN CAUWELAERT (1983). — *L'élasticité anisotrope appliquée à la mécanique des milieux granulaires et des roches.* — Thèse de Doctorat E.P.F.L. Lausanne.

WATSON (1966). — *A Treatise on the Theory of Bessel Functions.* — Cambridge University Press. Cambridge.

WAYLAND (1970). — *Complex variables applied in Science and Engineering.* — Van Nostrand Reinhold Company. New York.

ZIMPFER (1961). — *Plate Bearing Tests and Flexible Pavement Design in Florida.* — University of Florida.