# rupture d'argiles naturelles par surfaces de cisaillement à l'essai triaxial

par
**Félix Darve**
Institut de Mécanique de Grenoble

Section
Modèles Numériques
Bibliothèque

## Introduction

L'analyse de la ruine des ouvrages par rupture au sein du massif de sol fait le plus souvent apparaître l'existence de surfaces de fortes discontinuités cinématiques : les « surfaces de glissement ». Le long de celles-ci le cisaillement du sol a été maximal : on les appelle aussi « surfaces de cisaillement ». Au laboratoire également les échantillons de sols se rompent souvent dans l'appareil triaxial du fait de l'apparition d'une ou de plusieurs surfaces de cisaillement, alors que l'échantillon était sensiblement homogène au début de l'essai. Au cours de l'expérience, nous avons donc eu un changement du mode de déformation de l'échantillon : d'un mode initial proche de l'homogène (l'échantillon restant sensiblement cylindrique) jusqu'à un mode très fortement hétérogène (existence de surfaces de cisaillement) par localisation des déformations le long de surfaces privilégiées.

Dans notre étude, nous ferons l'hypothèse que cette localisation des déformations est due à une instabilité de la loi de comportement du matériau : nous suivons ici une démarche maintenant classique dans l'étude de la rupture des structures métalliques (par exemple, Hill [18], Rice [24]). Ce point d'instabilité de la loi de comportement, qui se traduit par le passage d'un mode de déformation diffus à un mode strictement localisé alors que les conditions aux limites imposées à l'échantillon restent identiques, peut être qualifié de « point de bifurcation » du champ des déformations, situant ainsi notre problème dans le cadre beaucoup plus vaste de la théorie des bifurcations (dont une application à la mécanique est, par exemple, donnée dans l'ouvrage de Thompson et Hunt [28]). Ce concept de bifurcation est lui-même d'ailleurs un cas particulier du concept beaucoup plus général de « catastrophe » (exposé, par exemple, dans l'ouvrage de René Thom [27]). Dans de précédents articles (Darve et al. [12, 16]) nous avions repris un exemple de Thompson et Hunt, montrant un système mécanique simple — comportant une barre rigide articulée et un ressort — dont la rupture s'effectue par passage d'un mode de déformation « restreinte » à un second mode de déformation « importante ». Dans cet exemple, le point de bifurcation est déterminé par l'intersection de deux chemins d'équilibre.

Dans l'analyse du comportement d'un échantillon de sol à l'appareil triaxial, deux modes possibles de déformation, pour un échantillon initialement homogène, correspondent le premier à la poursuite d'une déformation homogène, le second au glissement le long d'une ou de plusieurs surfaces de cisaillement. Ce second mode pourra être atteint si « le critère de localisation » est vérifié (pour un chemin de sollicitation donné) avant le critère de rupture plastique homogène. Il nous faut donc, tout d'abord, déterminer ce critère de localisation et nous rappellerons la démonstration de Hill [18] ou Rice [24], qui exprime l'apparition d'une surface de discontinuité cinématique au sein d'un milieu. Nous verrons qu'il nous permet, en outre, de calculer la direction locale (initiale) de la surface de glissement.

Dans l'expression de ce critère de localisation, figure la loi rhéologique du matériau par l'intermédiaire du tenseur L reliant l'incrément de contrainte à la petite déformation pure dans une écriture incrémentale de cette loi. Nous savons que, pour des matériaux possédant des irréversibilités plastiques, ce tenseur L dépend de la « direction » de l'incrément de contrainte (par exemple, ce tenseur prend deux valeurs différentes pour deux incréments opposés en direction). Nous avions développé précédemment une loi incrémentale octo-linéaire (Darve et al. [11, 13, 14], Boulon et al. [2, 4]) dans laquelle le tenseur L pouvait prendre huit déterminations différentes suivant la direction de l'incrément de contrainte. Nous avions vérifié que la continuité de la réponse incrémentale était bien assurée lors d'un changement de détermination : en particulier, sur la frontière commune à deux ou plusieurs zones tensorielles (zones de l'espace des incréments de contraintes, associées à une même détermination) la réponse est la même quelle que soit la détermination de L (associée aux zones adjacentes)

que l'on considère. Par contre, pour des calculs de bifurcation correspondant à des chemins de sollicitation situés sur une telle frontière commune, se pose le problème du choix de la détermination. Or les calculs effectués pour l'étude des structures métalliques ont montré toute l'influence de la loi de comportement choisie sur les résultats obtenus (par exemple, Rice et Rudnicki [25], Christoffersen et Hutchinson [6], Hutchinson et Neale [19]). Il était donc important d'utiliser une loi rhéologique dont le tenseur L variât continuement avec la direction de l'incrément de contrainte. Nous avons développé une loi incrémentale non-linéaire du second ordre à cet effet : elle généralise notre précédente loi octo-linéaire et nous en présenterons les principales caractéristiques dans cet article.

Au cours d'un séjour au sein du Département de Génie Civil de la Faculté des Sciences Appliquées de Sherbrooke (Québec), nous avions eu l'occasion d'analyser le comportement des argiles « structurées » de l'Est du Canada sur la base de l'étude expérimentale très complète menée au sein du Département dans le cadre de contrats passés avec la Société d'Énergie de la Baie James. Ces argiles, sous faible contrainte, se rompent avec de forts maxima du déviateur de contraintes et avec des surfaces de glissement très visibles : elles se prêtaient donc bien à l'application de nos calculs. Ce sont ces applications que nous développerons ici de manière détaillée à la suite d'une première présentation sommaire dans Darve et Lefebvre [16].

## 1 Expression du critère de localisation

La formulation que nous donnons ici fait appel à des hypothèses très générales : par exemple, loi rhéologique non linéaire sous forme incrémentale ou différentiation objective du tenseur de contraintes pour prendre en compte d'éventuelles rotations importantes des axes principaux.

Soit un échantillon homogène d'un matériau soumis à des champs uniformes de contrainte de Cauchy $[\sigma_{ij}]$ et de déformation dans un repère orthonormé (1, 2, 3) (fig. 1).

Nous supposons qu'il vient d'apparaître une bande de cisaillement dans laquelle le champ du gradient des petits déplacements est non uniforme dans une direction perpendiculaire à la bande tandis qu'il reste uniforme à l'extérieur (proposition A).

Soient $[d\sigma_{ij}]$ l'incrément de contrainte actuel dans les axes (1, 2, 3) et une facette parallèle à la bande. La continuité du vecteur incrément de contraintes sur cette facette doit être assurée quand la facette traverse la bande. Si nous notons $\Delta(T)$ la différence entre la valeur du tenseur T en un point courant à l'intérieur de la bande et sa valeur uniforme à l'extérieur, nous en déduisons la relation de type « statique » :

$$n_i \Delta(d\sigma_{ij}) = 0 \qquad (1)$$

où le vecteur $\{n_i\}$ est une normale unitaire à la bande (v. fig. 1).

D'après la définition choisie pour une bande de cisaillement (proposition A) et en notant $\{v_i\}$ le vecteur vitesse du point courant, $\{g_i\}$ un vecteur arbitraire fonction des coordonnées du point courant et de valeur nulle à l'extérieur de la bande et dt l'incrément de temps, nous aurons :

$$\Delta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, dt\right) = g_i n_j\, dt. \qquad (2)$$

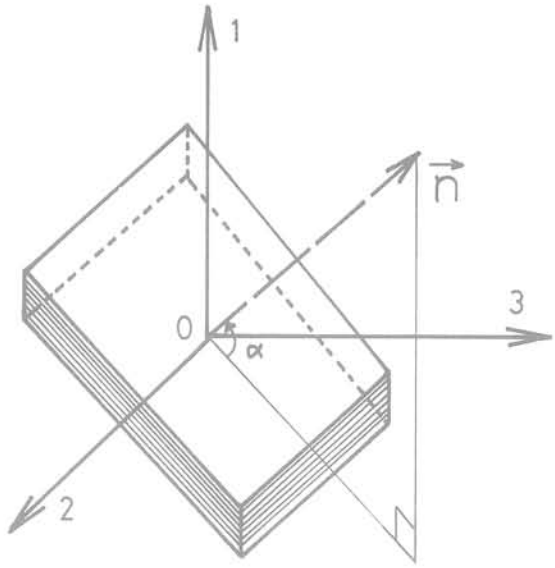


*Figure 1 Bande de cisaillement et sa normale $\vec{n}$ dans le repère (1, 2, 3).*

Or :
$$d\varepsilon_{k\ell} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_\ell} + \frac{\partial v_\ell}{\partial x_k}\right) dt,$$

si $d\varepsilon$ est la petite déformation pure correspondant à l'incrément de contrainte $d\sigma$.

D'où :
$$\Delta(d\varepsilon_{k\ell}) = \frac{1}{2}(g_k n_\ell + g_\ell n_k)\, dt. \qquad (3)$$

Cette équation (3) de type « cinématique », jointe à l'équation (1), représente une condition nécessaire pour l'existence d'une bande de cisaillement. Ce sont des conditions suffisantes dans la mesure où le vecteur $\{g_i\}$ n'est pas partout nul.

Une équation supplémentaire nous est indispensable pour relier $[d\sigma_{ij}]$ à $[d\varepsilon_{k\ell}]$ : elle nous sera fournie par la loi rhéologique du matériau écrite sous forme incrémentale.

Si nous nous limitons au domaine de comportement élasto-plastique du matériau, cette loi rhéologique s'écrit de manière générale :

$$D\sigma_{ij} = F_{ij}(d\varepsilon_{k\ell}) \qquad (4)$$

où F est une fonction non linéaire homogène de degré 1 (dans un sens restreint aux valeurs positives du paramètre multiplicatif) (Darve et al. [11, 12, 14], Boulon et al. [4]). Les équations (1) et (3) ont été écrites dans les axes fixes (1, 2, 3) : il nous faut donc aussi écrire cette équation (4) dans ces mêmes axes. Mais se pose alors le problème de « l'objectivité » de l'équation (4), c'est-à-dire son invariance par rapport à un observateur en mouvement; or si la petite déformation pure $d\varepsilon$ est une grandeur naturellement invariante, par contre l'incrément de contrainte $D\sigma$ n'est objectif que si la différentiation est effectuée par rapport à un repère local tournant à une vitesse égale à la vitesse de rotation propre de l'élément matériel. Si nous nous imposons, comme c'est le cas ici, de raisonner en axes fixes, il nous faut utiliser un opérateur de différentiation objectif comme par exemple l'opérateur de Jaumann qui s'écrit :

$$D_T = d\sigma_{ij} - d\omega_{ik}\sigma_{kj} - d\omega_{jk}\sigma_{ik}, \qquad (5)$$

où $d\omega$ est la petite rotation propre égale à :

$$d\omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) dt. \qquad (6)$$

D'après (4), nous pouvons écrire :

$$\Delta(D\sigma_{ij}) = L^t_{ijk\ell}\,\Delta(d\varepsilon_{k\ell}) \qquad (7)$$

où nous avons indicé « t » le tenseur L pour insister sur le fait qu'il représente la génération tangentielle de la fonction F, distincte de ses générations sécantes $L^s$ (fig. 2) :

$$D\sigma_{ij} = L^s_{ijk\ell}\,d\varepsilon_{k\ell}.$$

Si l'on veut calculer la réponse d'un matériau à une certaine sollicitation, c'est-à-dire si l'on a besoin du résultat du produit L $d\varepsilon$, on préfèrera le plus souvent utiliser une génération sécante $L^s$, en général plus simple que la génération tangentielle $L^t$, étant entendu que l'identité d'EULER sur les fonctions homogènes implique que :

$$L^s_{ijk\ell}\,d\varepsilon_{k\ell} \equiv L^t_{ijk\ell}\,d\varepsilon_{k\ell}.$$

Dans la formulation d'un critère de localisation, nous verrons que le tenseur L intervient seul : la relation (7) nous impose d'utiliser $L^t$.

D'après (5) nous avons :

$$\Delta(D\sigma_{ij}) = \Delta(d\sigma_{ij}) - \Delta(d\omega_{ik})\,\sigma_{kj} - \Delta(d\omega_{jk})\,\sigma_{ik} \qquad (8)$$

et d'après (6) :

$$\Delta(d\omega_{ij}) = \frac{1}{2}\left(\Delta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) - \Delta\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right) dt.$$

Soit avec (2) :

$$\Delta(d\omega_{ij}) = \frac{1}{2}\,(g_i n_j - g_j n_i)\,dt. \qquad (9)$$

Enfin, d'après (1) et en utilisant (8) et (9) :

$$n_i\Delta(D\sigma_{ij}) = -\frac{1}{2}\,n_i(g_i n_k - g_k n_i)\,\sigma_{kj}\,dt - \frac{1}{2}\,n_i(g_j n_k - g_k n_j)\,\sigma_{ik}\,dt. \qquad (10)$$

Or (7) et (3) impliquent :

$$n_i\Delta(D\sigma_{ij}) = \frac{1}{2}\,n_i L^t_{ijk\ell}(g_k n_\ell + g_\ell n_k)\,dt. \qquad (11)$$

Quelques lignes de calcul, explicitées dans Darve et Lefebvre [16] permettent de tirer de (10) et (11) ($\delta_{jk}$ étant le symbole de Kronecker) :

$$\left[n_i L^t_{ijk\ell} n_\ell + \frac{1}{2}\,(n_p\sigma_{pj}n_k + n_p\sigma_{pq}n_q\delta_{jk} - n_p\sigma_{pk}n_j - \sigma_{jk})\right] g_k = 0 \qquad (12)$$

(12) représente un système de trois équations linéaires et homogènes avec trois inconnues $g_1$, $g_2$, $g_3$ : une condition nécessaire et suffisante pour qu'il admette une solution non nulle en $g_1$, $g_2$, $g_3$ est que son déterminant soit nul. Cette condition nous fournit le critère de localisation que nous cherchons :

$$\det\left[n_i L^t_{ijk\ell} n_\ell + \frac{1}{2}\,(n_p\sigma_{pj}n_k + n_p\sigma_{pq}n_q\delta_{jk} - n_p\sigma_{pk}n_j - \sigma_{jk})\right] = 0 \qquad (13)$$

L'équation (13) fait intervenir les composantes de la normale locale à la bande de cisaillement, l'état de contrainte actuel directement et par l'intermédiaire de L, l'indice des vides actuel et l'histoire de la sollicitation ainsi que la direction du vecteur incrément de contrainte actuel par L. Il y aura bifurcation du champ des déformations lorsque, pour un chemin de sollicitation donné, l'équation (13) admettra une ou plusieurs racines réelles en $\{n_i\}$ : les conditions théoriques, nécessaires à l'existence d'une ou de plusieurs bandes de cisaillement, seront alors réunies. L'état de contrainte et de déformation obtenu sera un point de bifurcation. Pour une classe de chemins de sollicitation donnée, l'ensemble de ces points formera le « critère de bifurcation » du matériau pour ces chemins. Dans la pratique, les états de contrainte de bifurcation seront des états-limites en ce sens que les imperfections (inévitables dans les essais réels) tendront à faire apparaître les surfaces de cisaillement plus « rapidement » sur un chemin donné. Nous voyons apparaître ici la différence fondamentale entre « critère de plasticité » — par définition indépendant du chemin suivi pour l'atteindre — et « critère de bifurcation » — par essence fonction du chemin de sollicitation (v. fig. 3).

Dans le critère de localisation obtenu figure le tenseur tangent de la loi rhéologique. L'objet du prochain paragraphe est donc de donner une explicitation de ce tenseur L.

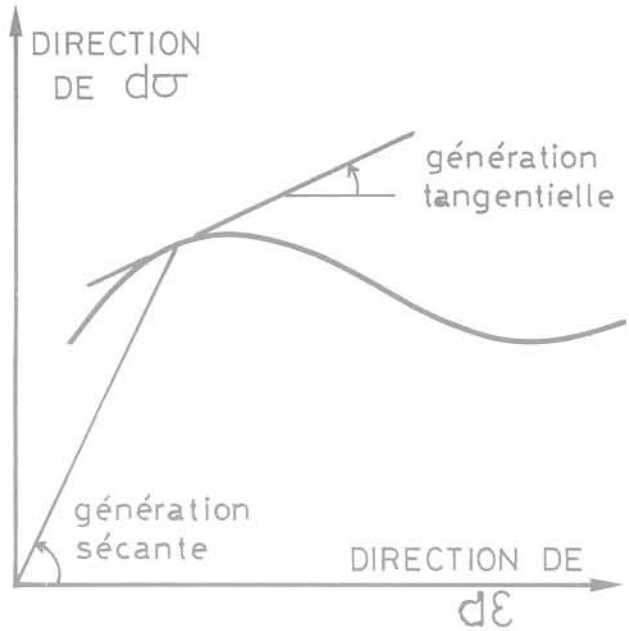


*Figure 2 Schématisation des générations tangentielle et sécante de la fonction tensorielle non linéaire reliant la direction du tenseur dσ à la direction du tenseur dε.*

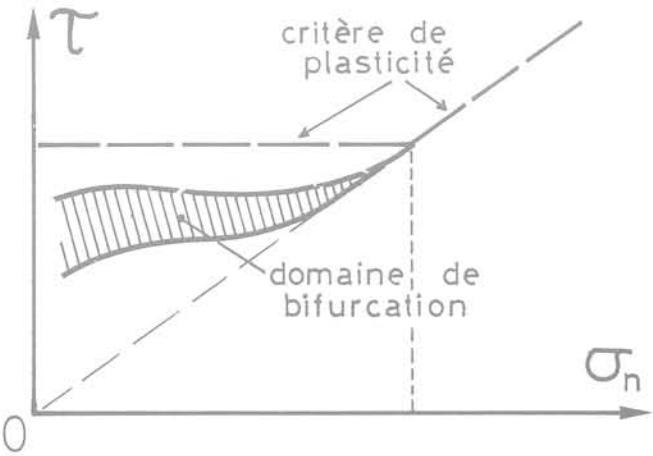


*Figure 3 Schématisation d'un critère de plasticité et d'un domaine de bifurcation pour une argile structurée.*

## 2 Expression de la loi rhéologique incrémentale non linéaire du second ordre

Cette loi a été exposée dans Darve et al. [8, 10, 15]. Nous nous attacherons plutôt ici à relier les hypothèses à des caractéristiques de comportement, mesurées au laboratoire, ainsi qu'à expliciter le calcul du tenseur L « tangent » à partir de la connaissance d'un tenseur « sécant ».

En nous restreignant au domaine élasto-plastique du comportement, nous devons expliciter la fonction tensorielle F définie par : $D\sigma_{ij} = F_{ij}(d\varepsilon_{k\ell})$ où $[D\sigma_{ij}]$ est une différentielle objective de la contrainte de Cauchy $[\sigma_{ij}]$ et $[d\varepsilon_{k\ell}]$ la petite déformation pure.

En utilisant la symétrie des tenseurs $d\sigma$ et $d\varepsilon$, nous pouvons nous ramener à l'étude de la fonction vectorielle G (Darve [7]) :

$$d\varepsilon_\alpha = G_\alpha(d\sigma_\beta) \qquad (\alpha, \beta = 1, ..., 6).$$

Le caractère non visqueux du comportement décrit impose à G d'être une fonction homogène d'ordre 1 (dans un sens restreint); son caractère plastique implique par ailleurs que G est non linéaire.

Du fait de la propriété d'homogénéité, la restriction de la fonction $\{G_\alpha\}$ à tout hyper-cône infiniment petit d'axe $\{d\sigma_\beta\}$ est linéaire (au second ordre près) (identité d'Euler pour les fonctions homogènes).

D'où : $d\varepsilon_\alpha = M^t_{\alpha\beta}(u_\gamma)\, d\sigma_\beta \qquad (\alpha, \beta, \gamma = 1, ..., 6), \qquad (14)$

où $\{u_\gamma\}$ est le vecteur unitaire dans la direction $\{d\sigma_\beta\}$.

Sur l'équation (14), les caractères à la fois homogène d'ordre 1 et non linéaire de G apparaissent nettement. Notons que, alors que $M^t(u)$ par construction est définie unique, il existe une infinité de matrices $M^s(u)$ (qu'on peut qualifier de « sécantes ») telles que :

$$M^s_{\alpha\beta}(u)\, d\sigma_\beta = M^t_{\alpha\beta}(u)\, d\sigma_\beta$$

(par exemple, Christoffersen et Hutchinson [6] remarquent que, pour tout vecteur $\{t\}$ orthogonal au vecteur $\{d\sigma\}$, on a :

$$([M^t_{\alpha\beta}(u)] + \{t_\alpha\}\otimes\{t_\beta\})\{d\sigma_\beta\} = [M^t_{\alpha\beta}(u)]\{d\sigma_\beta\}).$$

Nous allons bâtir notre théorie à partir de $M^s(u)$, puis, pour l'utilisation du critère de localisation, nous ferons le calcul de $M^t(u)$.

Expérimentalement, nous savons qu'un échantillon de sol ayant subi une histoire quelconque de déformations n'est plus isotrope (par exemple, Biarez [1]) quant à ses propriétés mécaniques.

Si la sollicitation n'a pas induit de rotations d'axes principaux, on démontre que l'échantillon est orthotrope et que les axes d'orthotropie sont constitués par les axes principaux des contraintes et des déformations (qui sont restés dans ce cas fixes et confondus). Dans le cas général, décrire l'anisotropie de l'échantillon par l'orthotropie est une hypothèse sans doute d'autant moins vérifiée que les axes principaux des contraintes et des déformations sont plus éloignés les uns des autres. Dans ce cas général se pose aussi le problème de l'hypothèse à faire concernant la caractérisation du repère d'orthotropie.

Si le tenseur M(u) dépend fonctionnellement uniquement du tenseur de contrainte (resp. : de déformation), on peut démontrer que ces axes d'orthotropie sont constitués par les axes principaux des contraintes (resp. : des déformations) (Chambon [5]). Comme ce n'est pas le cas dans le cadre de nos hypothèses, il nous faut préciser le repère d'orthotropie. Les expériences que nous avons menées pour simuler des cisaillements cycliques (Darve [9, 10]) nous ont amené dans ce cas à choisir le repère principal des déformations, mais ce résultat ne peut être valable de manière générale.

Notre première hypothèse consiste ainsi à supposer la loi incrémentale orthotrope dans un certain repère et en ce que la « dépendance directionnelle » de M(u) ne se fasse que par rapport aux trois premières composantes de $\{u_\gamma\}$ (c'est-à-dire les composantes relatives aux directions d'orthotropie).

$$\text{Soit : } \{\bar{u}\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}, \text{ donc : } M^s(u) \equiv M^s(\bar{u})$$

On démontre alors que $M^s(\bar{u})$ ne possède plus que 12 éléments non nuls quand on l'exprime dans le repère d'orthotropie.

Les modules de cisaillement $G_1$, $G_2$, $G_3$ ($G_1 = d\sigma_{23}/d\varepsilon_{23}$) ont été exprimés en suivant une démarche analogue à celle utilisée dans les calculs de bifurcation en plasticité des métaux (par exemple, Hutchinson et Neale [19]) et en mécanique des sols par Vardoulakis [30].

Nous avons pris :

$$G_1 = \frac{d\sigma_{23}}{d\varepsilon_{23}} = \frac{\sigma_{22} - \sigma_{33}}{2(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})} \qquad (15)$$

sachant que, dans le cas d'une symétrie de révolution du problème et de la sollicitation, un tel module s'exprime en fonction de deux des neuf autres éléments de la matrice M.

Nous sommes donc ramenés à l'étude de la matrice $3 \times 3$ : $N(\bar{u})$, définie par :

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ d\varepsilon_{33} \end{Bmatrix} = N(\bar{u}) \begin{Bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \end{Bmatrix}, \qquad (16)$$

dans le repère d'orthotropie courant. Pour expliciter $N(\bar{u})$, deux hypothèses sont indispensables : l'une pour préciser l'expression mathématique de $N(\bar{u})$ en fonction de certaines variables, qui seront déterminées par identification du comportement théorique avec un comportement mesuré expérimentalement sur une classe de sollicitations particulière, l'autre pour décrire au mieux analytiquement ce comportement expérimental.

Comme pour la loi octo-linéaire (Darve et al. [11, 13, 14], Boulon et al. [2, 4]), la loi de comportement est « calée » sur les chemins triaxiaux « généralisés » en compression et en extension. L'expérience devra ainsi fournir le comportement du matériau le long des six demi-axes $\pm i_1$, $\pm i_2$, $\pm i_3$ (fig. 4), c'est-à-dire les trois familles de fonctions f, g, h en compression (elles seront notées $f^+$, $g^+$, $h^+$) et en extension (elles seront notées $f^-$, $g^-$, $h^-$) pour une histoire antérieure quelconque du matériau :

$$\begin{aligned} \sigma_k &= f(\varepsilon_k, \sigma_j, \sigma_\ell) && (k, j, \ell = 1, 2, 3) \\ \varepsilon_j &= g(\varepsilon_k, \sigma_j, \sigma_\ell) && (k \neq j \neq \ell) \qquad (17) \\ \varepsilon_\ell &= h(\varepsilon_k, \sigma_j, \sigma_\ell) && (\sigma_j, \sigma_\ell \text{ paramètres constants}). \end{aligned}$$

Nous posons :

$$U_k = \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_k}\right)_{\sigma_j, \sigma_\ell} ; \quad V^j_k = -\left(\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_k}\right)_{\sigma_j, \sigma_\ell} ;$$
$$V^\ell_k = -\left(\frac{\partial h}{\partial \varepsilon_k}\right)_{\sigma_j, \sigma_\ell} .$$

Ces fonctions $U_k$ peuvent être considérées comme représentant des « modules » tangents et les fonctions

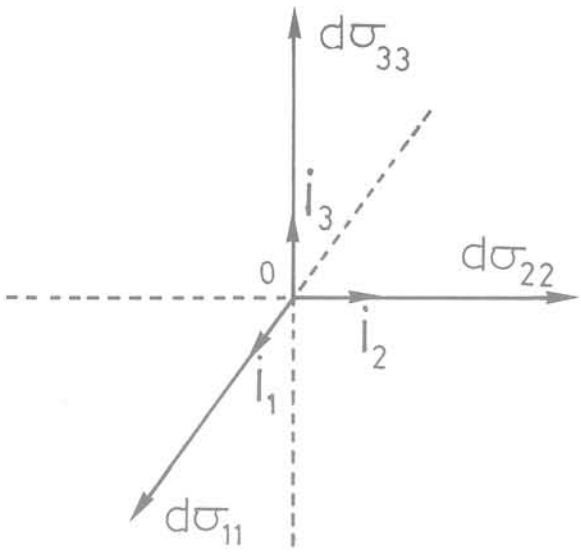


*Figure 4 Définition des chemins de « calage » de la loi de comportement.*

$V_k^j$ comme des « coefficients de Poisson » tangents.

Nous noterons $U_k^+$, $V_k^{j+}$, $V_k^{\ell+}$ les fonctions associées respectivement à $f^+$, $g^+$, $h^+$ et $U_k^-$, $V_k^{j-}$, $V_k^{\ell-}$ à $f^-$, $g^-$, $h^-$, et nous poserons enfin :

$$N^+ = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{U_1^+} & -\dfrac{V_2^{1+}}{U_2^+} & -\dfrac{V_3^{1+}}{U_3^+} \\ -\dfrac{V_1^{2+}}{U_1^+} & \dfrac{1}{U_2^+} & -\dfrac{V_3^{2+}}{U_3^+} \\ -\dfrac{V_1^{3+}}{U_1^+} & -\dfrac{V_2^{3+}}{U_2^+} & \dfrac{1}{U_3^+} \end{bmatrix}$$

$N^-$ étant définie
de manière semblable.

Ces deux matrices $N^+$ et $N^-$ peuvent ainsi être calculées à partir de la donnée expérimentale du comportement du matériau le long de chemins triaxiaux généralisés en compression et en extension, cette donnée se traduisant par la connaissance analytique explicite des familles de fonctions f, g, h, calées sur les courbes expérimentales. C'est dans ce calage que se fait la détermination des « constantes » du matériau qui interviennent dans l'expression de ces fonctions.

Il nous reste à préciser quelle hypothèse a été choisie pour exprimer $N^s(\overline{u})$ en fonction de $N^+$ et de $N^-$ : nous avons considéré une variation « linéaire » de N avec $\overline{u}$ de la forme suivante :

$$N^s(\overline{u}) = A + B \begin{bmatrix} u_1 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 \end{bmatrix}, \qquad (18)$$

où par définition de u, vecteur unitaire de $d\sigma$ :

$$u_i = \frac{d\sigma_{ii}}{\|d\sigma\|} \quad \text{(sans sommation sur i)}$$

avec

$$\|d\sigma\| = \sqrt{(d\sigma_{11})^2 + (d\sigma_{22})^2 + (d\sigma_{33})^2 + 2\,(d\sigma_{23})^2 + 2\,(d\sigma_{31})^2 + 2\,(d\sigma_{12})^2}.$$

En posant :

$$\{\overline{d\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} d\varepsilon_{11} \\ d\varepsilon_{22} \\ d\varepsilon_{33} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\overline{d\sigma}\} = \begin{Bmatrix} d\sigma_{11} \\ d\sigma_{22} \\ d\sigma_{33} \end{Bmatrix},$$

nous avons :

$$\{\overline{d\varepsilon}\} = A\{\overline{d\sigma}\} + \frac{1}{\|d\sigma\|} B\{\overline{d\sigma^2}\}. \qquad (19)$$

Par identification des comportements fournis par les équations (17) et par la relation (19), nous tirons :

$$A + B = N^+ \quad \text{et } A - B = N^-.$$

D'où finalement :

$$\{\overline{d\varepsilon}\} = \frac{1}{2}(N^+ + N^-)\{\overline{d\sigma}\} + \frac{1}{2\|d\sigma\|}(N^+ - N^-)\{\overline{d\sigma^2}\}. \qquad (20)$$

Les relations (15) et (20) définissent la loi de comportement du matériau, qui peut être caractérisée comme incrémentale non linéaire du second ordre.

La relation (18) nous fournit l'expression d'une matrice sécante $N^s(\overline{u})$ : nous avons besoin de la matrice tangente. Nous allons en effectuer le calcul dans le cas plus simple (qui correspondra à nos applications) pour lequel :

$$d\sigma_{23} = d\sigma_{31} = d\sigma_{12} = 0.$$

En écrivant (19) en notation indicielle, nous obtenons :

$$d\varepsilon_i = A_{ij}\, d\sigma_j + \frac{1}{\|d\sigma\|} B_{ij}\,(d\sigma_j)^2 \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

et par différentiation ($\delta_{kj}$ étant le symbole de Kronecker) :

$$d(d\varepsilon_i) = A_{ij}\, d(d\sigma_j) + \frac{2}{\|d\sigma\|} B_{ij}\, d\sigma_j\, d(d\sigma_j) - \frac{d\sigma_\alpha\, d(d\sigma_\alpha)}{\|d\sigma\|^3} B_{ij}\,(d\sigma_j)^2$$

$$(\alpha = 1, \ldots, 6).$$

Avec $d\sigma_{23} = d\sigma_{31} = d\sigma_{12} = 0$, on obtient :

$$d(d\varepsilon_i) = A_{ij}\, d(d\sigma_j) + \frac{2}{\|d\sigma\|} B_{ij}\, d\sigma_j\, d(d\sigma_j) - \frac{1}{\|d\sigma\|^3} B_{ik}(d\sigma_k)^2\, d\sigma_j\, d(d\sigma_j).$$

D'où l'expression du terme général de la matrice tangente $N^t(\overline{u})$ :

$$d\varepsilon_i = \left[A_{ij} + \frac{2}{\|d\sigma\|} B_{ik}\, d\sigma_k\, \delta_{kj} - \frac{1}{\|d\sigma\|^3} B_{ik}\,(d\sigma_k)^2\, d\sigma_j\right] d\sigma_j. \qquad (21)$$

On peut vérifier sur cette expression que :

$$N^t(\overline{u})\{\overline{d\sigma}\} \equiv N^s(\overline{u})\{\overline{d\sigma}\}.$$

Les modules de cisaillement $G_1$, $G_2$, $G_3$ étant directionnellement « constants », ce seront les mêmes pour la matrice tangente $M^t(\overline{u})$ que pour la matrice sécante $M^s(\overline{u})$.

## 3 Application au cas de l'essai triaxial de révolution

Nous restreignons maintenant notre étude au cas de l'essai triaxial dont nous notons 1 la direction axiale et 2 et 3 deux directions radiales orthogonales. Dans ce repère, les différents tenseurs s'écrivent :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} -\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_2 \end{bmatrix},$$

$$[e_{ij}] = \begin{bmatrix} -\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon_2 \end{bmatrix},$$

$$[d\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} -d\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -d\sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & -d\sigma_2 \end{bmatrix}$$

et
$$[d\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} -d\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & -d\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & -d\varepsilon_2 \end{bmatrix}$$

avec les conventions de signe usuelles en mécanique des sols.

Écrivons l'équation (13) sous la forme :

$$\det(n_i L_{ijk\ell} n_\ell + J_{jk}) = 0,$$

nous calculons tout d'abord :

$$J_{11} = [(n_2)^2 + (n_3)^2]\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)$$

$$J_{22} = (n_1)^2\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}\right) = J_{33}$$

$$J_{12} = n_1 n_2\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}\right) = -J_{21}$$

$$J_{13} = n_1 n_3\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2}\right) = -J_{31}$$

$$J_{23} = J_{32} = 0.$$

En appelant $\alpha$ l'angle de la direction locale de la bande de cisaillement avec l'axe de révolution,

$$\left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{n_1}{\sqrt{(n_2)^2 + (n_3)^2}}\right),$$

le développement de l'équation (13) aboutit à une équation paire, du sixième degré en tg $\alpha$, que nous avons donnée de manière explicite dans Darve et Lefebvre [16]. L'élimination d'une racine parasite, négative en $\operatorname{tg}^2\alpha$ nous ramène à l'étude de l'équation suivante, paire, du quatrième degré en tg $\alpha$ :

$$L_{1111}\left(L_{1212} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)\operatorname{tg}^4\alpha + \left[L_{1111}L_{2222} - L_{1122}L_{2211} - L_{1122}\left(L_{1212} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right) - L_{2211}\left(L_{1212} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)\right]\operatorname{tg}^2\alpha + L_{2222}\left(L_{1212} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right) = 0. \quad (22)$$

Cette équation est intéressante à plus d'un titre :

1) Elle est du second degré en $\operatorname{tg}^2\alpha$ et, quand elle admet des racines réelles, elles sont positives. Nous retrouvons donc la discussion classique (Rudnicki et Rice [26], Rice [24], Vardoulakis et al. [29, 31]) de l'existence d'un régime elliptique (pas de solution) et d'un régime hyperbolique (deux solutions distinctes), séparés par le régime parabolique (une solution double). La naissance d'une surface de rupture sur un chemin de sollicitation donné correspondant à l'existence de la première racine réelle, c'est ce régime parabolique qui nous caractérisera les points de bifurcation (v. fig. 5). Pour une classe de chemins de sollicitation donnée, le *critère de bifurcation* sera donc obtenu par annulation du discriminant de l'équation (22) et les *directions des surfaces de glissement* seront fournies par la racine double de cette équation (22).

2) Nous aurions pu obtenir directement cette équation (22) en considérant le problème non plus comme symétrique de révolution mais comme un problème plan. Nous pouvons en conclure que, pour l'essai triaxial, les bifurcations par bandes planes de cisaillement ou par cônes de cisaillement sont absolument équivalentes. Seules les imperfections

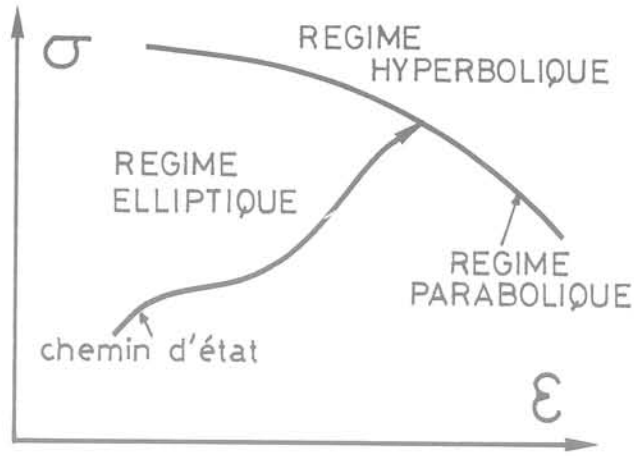


*Figure 5 Schématisation du critère de bifurcation, correspondant à une certaine classe de chemins de sollicitation : la bifurcation se produit sur la courbe du régime parabolique séparant le domaine elliptique du domaine hyperbolique.*

initiales de l'échantillon et les conditions aux limites de l'essai non parfaites feront qu'un type de bifurcation se développera plutôt qu'un autre. Rappelons à ce sujet que l'étude théorique présentée ici ne peut fournir qu'un critère de bifurcation correspondant à un échantillon et à un essai sans imperfection, c'est-à-dire une résistance maximale théorique (mais nous verrons qu'elle peut être bien « inférieure » au critère de plasticité : d'où l'importance du critère de bifurcation dans l'étude de la ruine des ouvrages en génie civil). Dans la pratique, cette résistance maximale théorique sera réduite par les imperfections de l'échantillon et de l'essai (Desrues [17], Boulon et Cichy [3]).

3) La correction provenant de la dérivation objective de Jaumann n'apparaît dans l'équation (22) que par le demi-excédent axial de contrainte $\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)$ par rapport au module de cisaillement $L_{1212}$. Il est donc possible facilement de conclure, dans une étude donnée, sur la nécessité ou non de mener les calculs avec la dérivée de Jaumann du tenseur de contrainte.

Le calcul des cinq fonctions $L_{ijk\ell}$, qui interviennent dans l'équation (22), se fait facilement à partir de l'inverse de la matrice $M^t$.

Si nous notons : $(M^t)^{-1} = P$, nous aurons :

$$L_{1111} = P_{11} = (M^t)^{-1}_{11} = (N^t)^{-1}_{11}$$
$$L_{2222} = P_{22} = (M^t)^{-1}_{22} = (N^t)^{-1}_{22}$$
$$L_{1122} = P_{12} = (M^t)^{-1}_{12} = (N^t)^{-1}_{12}$$
$$L_{2211} = P_{21} = (M^t)^{-1}_{21} = (N^t)^{-1}_{21}$$
$$L_{1212} = P_{66} = (M^t)^{-1}_{66} = G_3 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}.$$

Rappelons que, d'après l'équation (21) :

$$N^t_{ij} = A_{ij} + \frac{2}{\|d\sigma\|} B_{ik}\, d\sigma_k \delta_{kj} - \frac{1}{\|d\sigma\|^3} B_{ik}(d\sigma_k)^2 d\sigma_j,$$

où : $A = \frac{1}{2}(N^+ + N^-)$ et $B = \frac{1}{2}(N^+ - N^-)$.

Pour un chemin de sollicitation donné, la connaissance de la loi rhéologique intégrée pas à pas le long du chemin nous fournira pour chaque incrément les valeurs des fonctions $L_{ijk\ell}$. Si, à partir d'un incrément, la valeur du discriminant de l'équation (22) de négative devient positive, nous dirons que l'état de contrainte et de déformation à cet incrément « frontière » est un état

de bifurcation pour le matériau, c'est-à-dire qu'il représente un état de résistance limite à partir duquel la rupture se produira par développement d'une bande de cisaillement, dont l'orientation nous sera fournie par la racine double de cette équation (22) (v. fig. 5).

## 4 Application au cas de l'argile du site « Olga »

L'argile que nous avons étudiée(*) a été prélevée sur le site « Olga » près de la ville de Matagami à 700 km environ au nord-ouest de Montréal (Québec). Ce site fait partie du complexe Nottaway-Broadback-Rupert occupant la partie sud des territoires de la Baie James. L'argile s'est formée par sédimentation au fond du lac Barlow-Ojibway, il y a environ 10 000 ans à la suite du retrait de la calotte glaciaire laurentidienne. Il s'agit d'une argile varvée, normalement consolidée du point de vue géologique, plastique ($I_p = 40$ %), saturée, de teneur en eau supérieure à sa limite de liquidité ($W_L = 68$ %), de teneur en argile (particules de diamètre inférieur à 2 $\mu$) égale à 90 %.

Les échantillons ont été prélevés à l'aide de l'échantillonneur mis au point à l'Université de Sherbrooke (Lefebvre et Poulin [23]). Cet appareil permet d'obtenir des blocs d'argile intacte de 25 à 27 cm de diamètre et d'environ 35 cm de hauteur. Les échantillons de laboratoire sont découpés dans ces blocs (diamètre : 3,55 cm, hauteur : 7,11 cm) et consolidés anisotropiquement avant leur écrasement à l'appareil triaxial.

Cette argile naturelle (comme la plupart des argiles intactes) présente ce qu'il est convenu d'appeler un « effet de structure », relativement important dans ce cas.

Lors d'un essai œdométrique, on constate que le sol se comporte comme s'il était surconsolidé (Lefebvre et al. [21]), l'existence d'une structure ou d'une « cimentation » venant apporter une résistance supplémentaire. Avant que la pression d'écrasement de la structure ne soit atteinte, le comportement de l'argile est fonction d'une certaine résistance « structurale » et plus ou moins indépendant des contraintes effectives. Sous la pression d'écrasement se produit une forte diminution de volume; au-delà le comportement est voisin de celui d'une argile normalement consolidée classique avec une résistance fonction croissante des contraintes effectives.

A l'essai triaxial, dans le domaine structuré, les déformations restent faibles et les « modules » conservent de fortes valeurs jusqu'à la rupture qui apparaît de façon brutale et se traduit par une chute importante de résistance en particulier aux faibles valeurs de la contrainte latérale (Lefebvre et al. [20, 22], Wong et Mitchell [32]). Ce pic, très marqué, des courbes contrainte-déformation disparaît peu à peu quand la contrainte latérale augmente, par accroissement de la résistance de palier fonction croissante de la contrainte latérale, ce qui exprime une loi de type Mohr-Coulomb pour un matériau avec frottement. Les pics sont accompagnés de la présence d'un ou de plusieurs plans de cisaillement. La résistance de palier atteint sensiblement la résistance de pic, quand la déstructuration est approchée. Puis, dans le domaine déstructuré, le comportement devient analogue à celui d'une argile normalement consolidée. Dans tous les cas, le matériau est contractant sur chemin triaxial drainé.

(*) Cette étude a été menée au cours d'un séjour au sein du Département de Génie Civil de la Faculté des Sciences Appliquées de Sherbrooke (Québec).

Les figures 6 à 9, tirées de Lefebvre et al. [21], illustrent ce comportement. Sur la figure 6, le pic de résistance est très marqué puisque, pour cette faible valeur de la contrainte latérale, la résistance de palier est elle-même faible. Lors de la rupture, le matériau est contractant, puis de la dilatance apparaît. Il semble que l'on doive se garder de l'interpréter comme un comportement « vraiment » rhéologique puisque l'échantillon est alors fortement hétérogène du fait du développement de bandes de cisaillement. L'échantillon, séché puis coupé le long d'un plan méridien, laisse d'ailleurs apparaître (à « l'œil nu ») de petits vides le long de la surface de glissement, ce qui pourrait expliquer cette dilatance. La figure 7 présente un essai réalisé à une contrainte latérale trois fois plus élevée : la résistance de palier tend à se rapprocher de celle de pic et la contractance est visible. Pour le troisième essai présenté sur la figure 8, la contrainte latérale a doublé. La résistance de palier a encore augmenté de même que la contractance. La faible dilatance initiale est restée une exception parmi tous les essais effectués et ne paraît pas être représentative du comportement du matériau. Le quatrième essai (fig. 9) est situé à la limite du domaine structuré.

En somme, la rupture de cette argile structurée peut se caractériser par les quatre traits suivants :

A) Elle se produit pour des déformations axiales voisines de 1 % : l'argile a donc été peu déformée.

B) Elle se produit pour un excédent axial de contrainte proche de 60 kPa : le critère de plasticité estimé donnerait une résistance beaucoup plus forte. Le « module » (c'est-à-dire la pente de la courbe contrainte-déformation) un peu avant la rupture est donc encore très élevé. La rupture peut ainsi être qualifiée de « brutale ».

C) Elle se produit dans le domaine de contractance de l'argile. Dans aucun cas, on ne note de dilatance avant la rupture.

D) Elle se produit par apparition au sein de l'échantillon d'un ou de plusieurs plans de cisaillement, inclinés par rapport à l'axe vertical de révolution d'un angle approximativement égal à 25°.

La particulière netteté du phénomène de localisation des déformations (« loin » de la rupture plastique homogène) se prêtait bien à une étude de la rupture de cette argile naturelle comme un problème de bifurcation : ce sont les résultats de cette étude que nous allons maintenant présenter. L'équation (22), à laquelle nous avons abouti sur un plan théorique, fait intervenir la loi rhéologique du matériau. Nous préciserons tout d'abord les paramètres mécaniques que nous avons introduits dans la loi.

Les paramètres mécaniques d'un matériau interviennent dans l'expression des fonctions f, g, h (équations (17)), qui caractérisent le comportement du sol sur des chemins triaxiaux « généralisés ». Quelques hypothèses (Darve [7]) nous permettent de relier ces fonctions f, g, h aux fonctions f* et k, définies sur des chemins triaxiaux conventionnels drainés réalisés en compression et en extension :

$$\sigma_1 = f^*(\varepsilon_1, \sigma_3)$$
$$e = k(\varepsilon_1, \sigma_3),$$

où $\sigma_1$ et $\sigma_3$ sont respectivement les contraintes effectives axiales et latérales, $\varepsilon_1$ la déformation axiale et e l'indice des vides.

L'expression de f* pour un chemin monotone est la suivante :

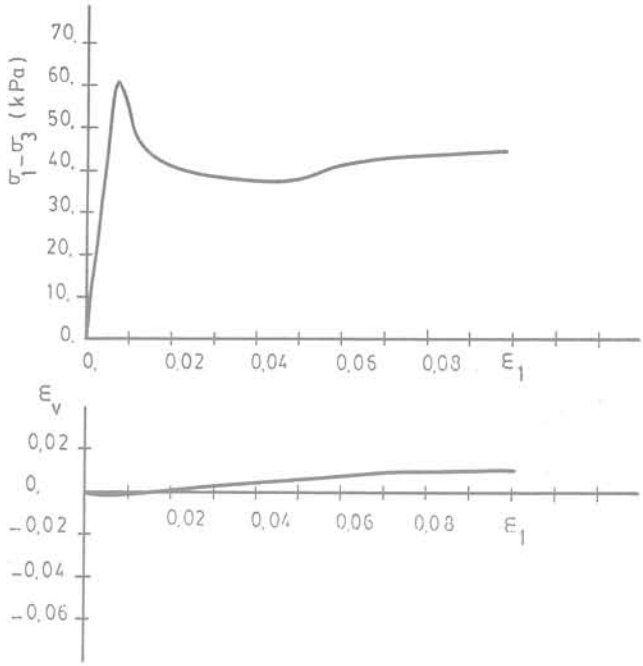


*Figure 6 Rupture de l'argile Olga (21) en compression triaxiale drainée pour une contrainte latérale de 5 kPa.*

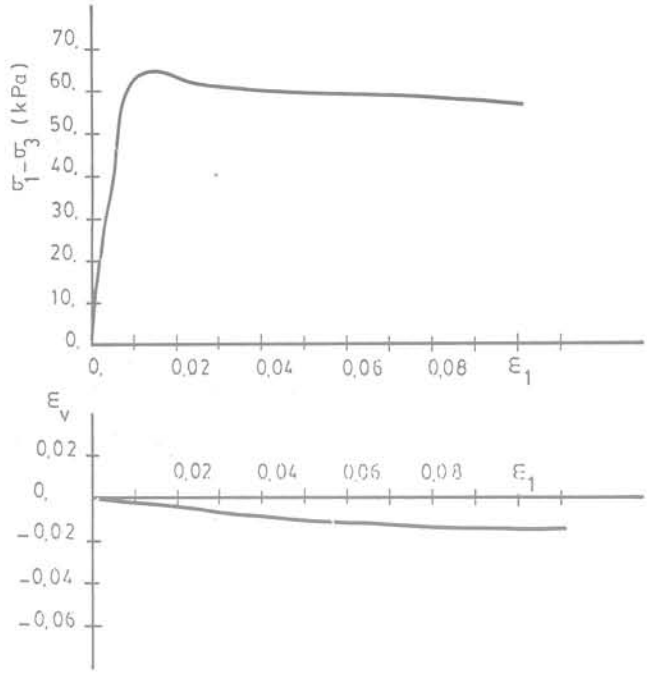


*Figure 7 Rupture de l'argile Olga (21) en compression triaxiale drainée pour une contrainte latérale de 15 kPa.*

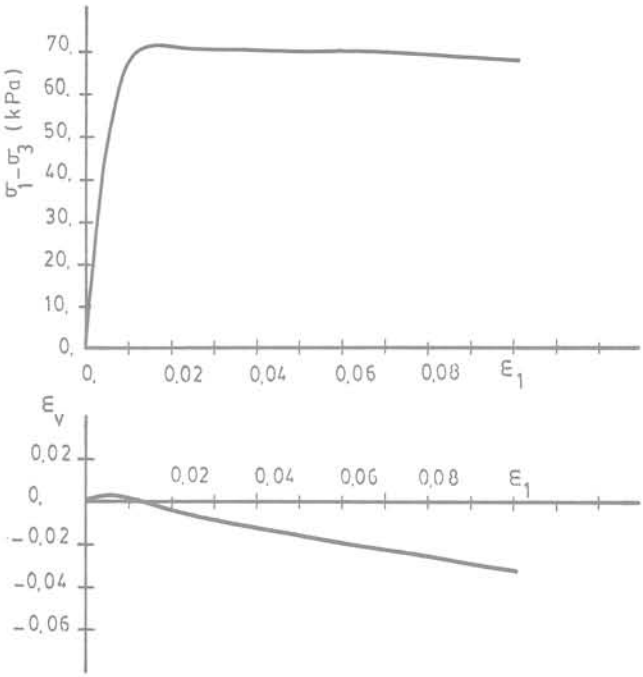


*Figure 8 Rupture de l'argile Olga (21) en compression triaxiale drainée pour une contrainte latérale de 30 kPa.*

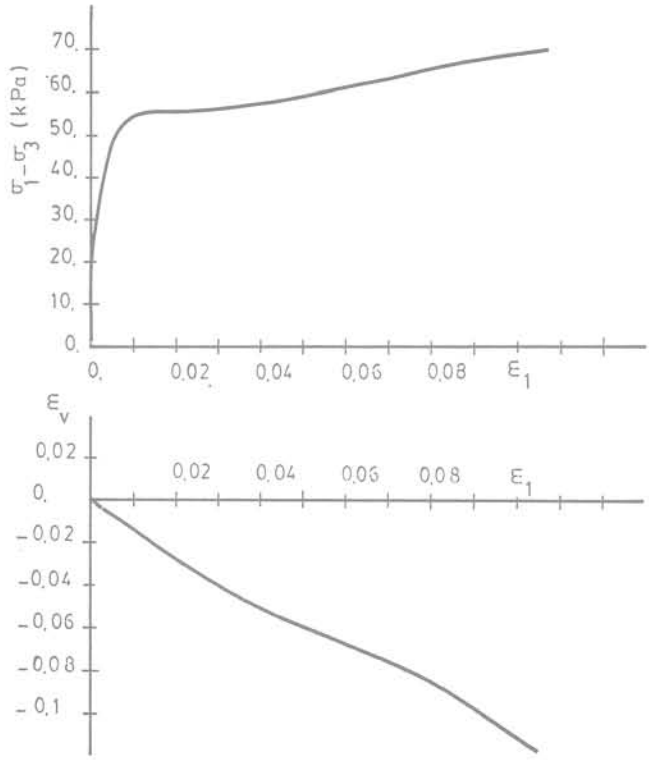


*Figure 9 Rupture de l'argile Olga (21) en compression triaxiale drainée pour une contrainte latérale de 50 kPa.*

$$\sigma_1 = f^*(\varepsilon_1, \sigma_3) \equiv \sigma_3 \left(1 + C_N \frac{\exp(A_1|\varepsilon_1|) - 1}{\exp(A_1|\varepsilon_1|) + A_S}\right)$$

et l'expression de k est :

$$e = k(\varepsilon_1, \sigma_3) \equiv e_o - e_M[1 - \exp(-A_e\varepsilon_1)] + B_e\varepsilon_1 - C_e(\varepsilon_1)^2 \exp(-D_e\varepsilon_1).$$

Dans ces expressions, les différents coefficients ont pour signification et valeur :

— $A_1$ est un paramètre de « forme » pour les courbes contrainte-déformation.

— $C_N$ est la valeur de $(\sigma_1 - \sigma_3)/\sigma_3$ en rupture plastique.

— $A_S$ dépend de la pente initiale de la courbe f*, notée $U_o$.

— $e_o$ est l'indice des vides initial.

— $e_M$ est l'amplitude de la contractance en compression ou de la légère dilatance en extension.

— $A_e$ dépend de la pente initiale de la courbe k, elle-même fonction du pseudo-coefficient de Poisson initial noté $\nu_o$.

— $B_e$ est relié à l'angle de dilatance du matériau (ce coefficient n'a pas d'effet ici).

— $C_e$ et $D_e$ sont fonctions de la position du minimum de l'indice des vides en compression ou de son léger maximum en extension dans le plan $(e, \varepsilon_1)$.

Dans cette étude, des caractéristiques très simples ont été choisies. Certaines représentent directement des propriétés mécaniques comme la cohésion, l'angle de frottement, le module de Young, ..., d'autres sont des paramètres à signification physique indirecte comme la constante $A_1$ qui permet de « raidir » plus ou moins les courbes contrainte-déformation sur chemin triaxial drainé. Toutes ces constantes du matériau sont soit, pour les premières, mesurées directement sur les résultats d'essais triaxiaux de compressions-extensions drainées soit, pour les secondes, déterminées par « calage » des formulations analytiques des fonctions f* et k avec les courbes expérimentales correspondantes en compressions-extensions drainées pour différentes valeurs de la contrainte latérale. Les principales valeurs trouvées sont les suivantes :

— le passage du domaine structuré au domaine destructuré se fait pour une contrainte moyenne égale à 90 kPa;

— $A_1 = 100$;

— l'argile est supposée purement cohérente dans le domaine structuré ($C' = 40$ kPa en compression) et purement frottante dans le domaine déstructuré ($\phi' = 24°$ en compression);

— le pseudo-module de Young $U_o$ a été pris constant égal à 15 000 kPa dans le domaine structuré et à 7 500 kPa dans le domaine destructuré;

— $e_0 = 0{,}8$;

— le pseudo-coefficient de Poisson $\nu_o$ a été pris constant égal à 0,12 dans le domaine structuré et à 0,024 dans le domaine destructuré;

— la position de l'extrémum de l'indice des vides est fonction de la contrainte latérale.

Reprenant les essais présentés sur les figures 6 à 9, nous avons voulu les comparer avec les résultats fournis par notre théorie. Choisissant cette classe de chemins de sollicitation — compressions triaxiales drainées pour différentes valeurs de la contrainte latérale — nous décomposons chaque chemin de sollicitation en une suite d'incréments de sollicitation pour chacun desquels on calcule, par la loi rhéologique, l'incrément de réponse; on obtient par sommation le chemin de réponse. Pour chaque incrément, le discriminant de l'équation (22) est calculé. Dès qu'il devient positif, le calcul est arrêté puisque nous considérons que l'état de bifurcation théorique est atteint, c'est-à-dire l'état limite de déformation homogène du matériau. En ce point, les conditions théoriques nécessaires à la naissance locale d'une surface de cisaillement sont remplies.

La racine double de l'équation (22) nous fournit la direction locale de cette surface. Rappelons que $\alpha$ est l'angle du plan de cisaillement local avec l'axe de révolution. La racine double de (22) est égale à :

$$\mathrm{tg}^2\,\alpha = \sqrt{\frac{L_{2222}\left(L_{1212} + \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)}{L_{1111}\left(L_{1212} - \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)}},$$

soit une valeur approchée égale à :

$$\mathrm{tg}\,\alpha \simeq \sqrt[4]{\frac{L_{2222}}{L_{1111}}}.$$

Si l'on se place dans le cas particulier d'une compression triaxiale drainée axisymétrique et d'une argile contractante, on peut encore écrire :

$$\mathrm{tg}\,\alpha \simeq \sqrt[4]{\frac{2U_2^-}{U_1^+}}.$$

Cette dernière expression fait apparaître que la bifurcation d'une argile dépend principalement de la valeur de ses pseudo-modules, c'est-à-dire de caractéristiques de résistance : le fait que l'argile soit cohérente va donc jouer un rôle essentiel sur le développement d'instabilités par bifurcation du champ de ses déformations. Remarquons que si, dans le cas des sables, il semble que ce soit leur dilatance qui provoque leur instabilité (Darve et al. [7,12]), dans le cas des argiles, ce serait leur cohésion : ceci nous paraît devoir être mis à l'actif de la généralité de la théorie proposée.

Les cinq figures ci-après (fig. 10 à 14) illustrent les résultats théoriques obtenus et peuvent être comparées avec les courbes expérimentales des figures 6 à 9.

Notons que :

— le point final des courbes théoriques correspond à un point du critère de bifurcation;

— le chemin de compression isotrope précédant l'écrasement triaxial est représenté sur les figures (il est bien visible au départ des courbes des figures 13 et 14);

— les quatre premiers chemins ($\sigma_3' = 5$, 15, 30, 50 kPa) situés dans le domaine structuré mènent tous à une rupture par bifurcation;

— le dernier chemin ($\sigma_3' = 70$ kPa), qui correspond à une argile déstructurée et a été suivi jusqu'à une déformation axiale de 10 %, n'a pas conduit à un point de bifurcation, ce qui est en concordance avec les résultats expérimentaux.

## Conclusion

Nous avons présenté ici quelques premiers résultats obtenus dans l'étude de l'application du critère de localisation de Hill à notre loi rhéologique incrémentale dans le champ de la mécanique des sols. Ces

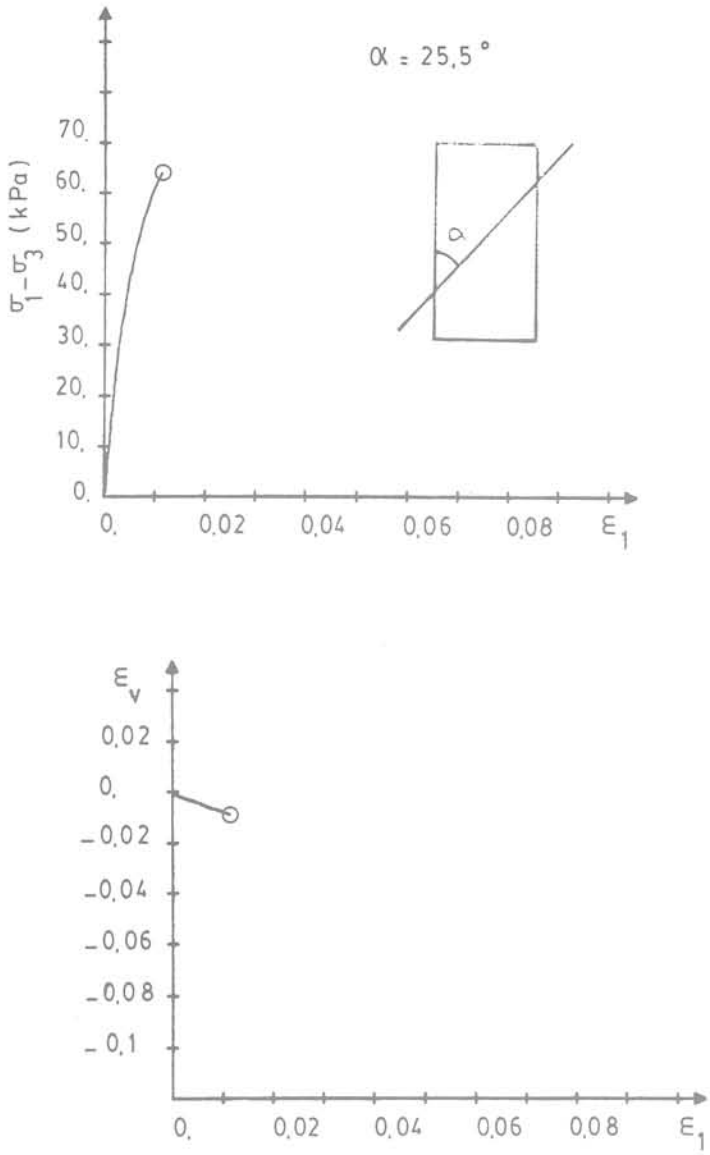


*Figure 10 Calcul théorique du comportement de l'argile Olga en compression triaxiale drainée pour une contrainte latérale de 5 kPa.*

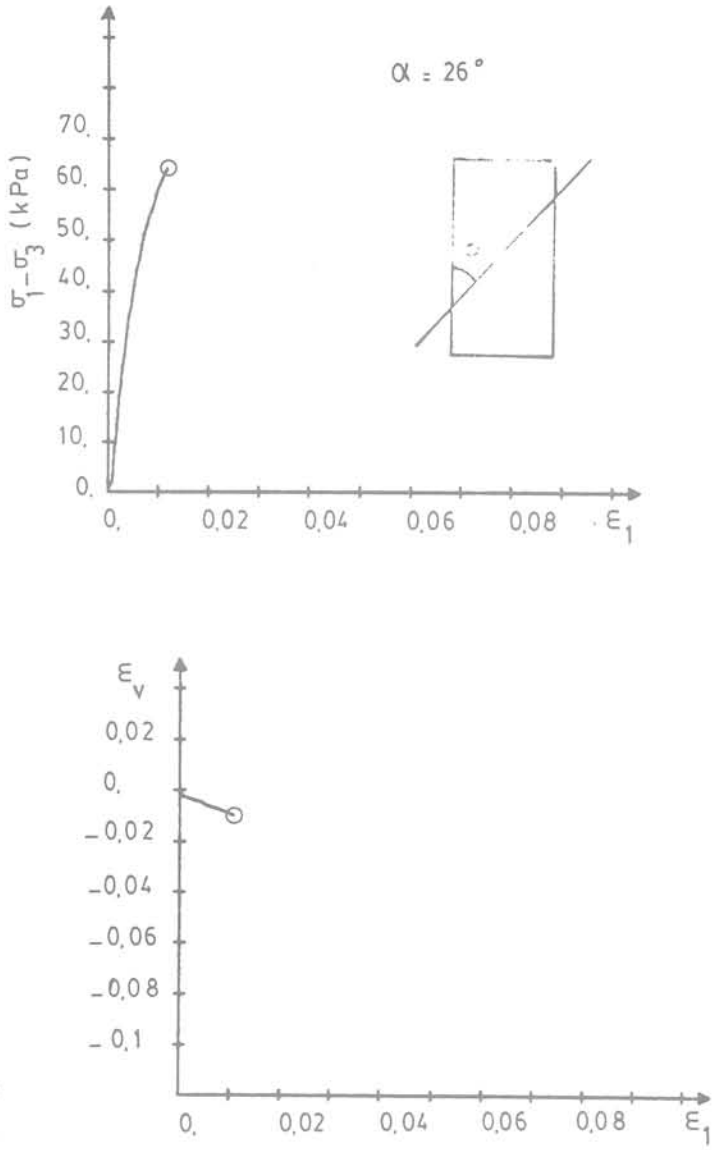


*Figure 11 Calcul théorique du comportement de l'argile Olga en compression triaxiale drainée pour une contrainte latérale de 15 kPa.*

résultats concernant les argiles, ils viennent en compléter d'autres concernant les sables. Cette méthode sera sans doute riche en développements ultérieurs; dès maintenant, elle permet de mieux comprendre la naissance des surfaces de cisaillement dans les sols : c'est dire son importance pratique.

## Remerciements

L'auteur tient à remercier le Directeur du Département de Génie Civil de l'Université de Sherbrooke, Guy Lefebvre, pour son accueil et le Centre National de la Recherche Scientifique de France ainsi que le Conseil National de Recherches du Canada pour leur aide complémentaire.

## Références

[1] Biarez J. (1962) : « Contribution à l'étude des propriétés mécaniques des sols et des matériaux pulvérulents ». Thèse de Doctorat d'État, Grenoble.

[2] Boulon M., Chambon R., Darve F. (1977) : « Loi rhéologique incrémentale pour les sols et application par la méthode des éléments finis ». Revue Française de Géotechnique, n° 2, pp. 5-22.

[3] Boulon M., Cichy W. (1980) : « Modèle numérique de rupture localisée dans les solides ». Colloque franco-polonais de Mécanique non linéaire, Marseille.

[4] Boulon M., Darve F., Flavigny E., Forgue M. (1980) : « Méthode de prévision des pressions interstitielles ». Revue Française de Géotechnique, n° 9, pp. 27-40.

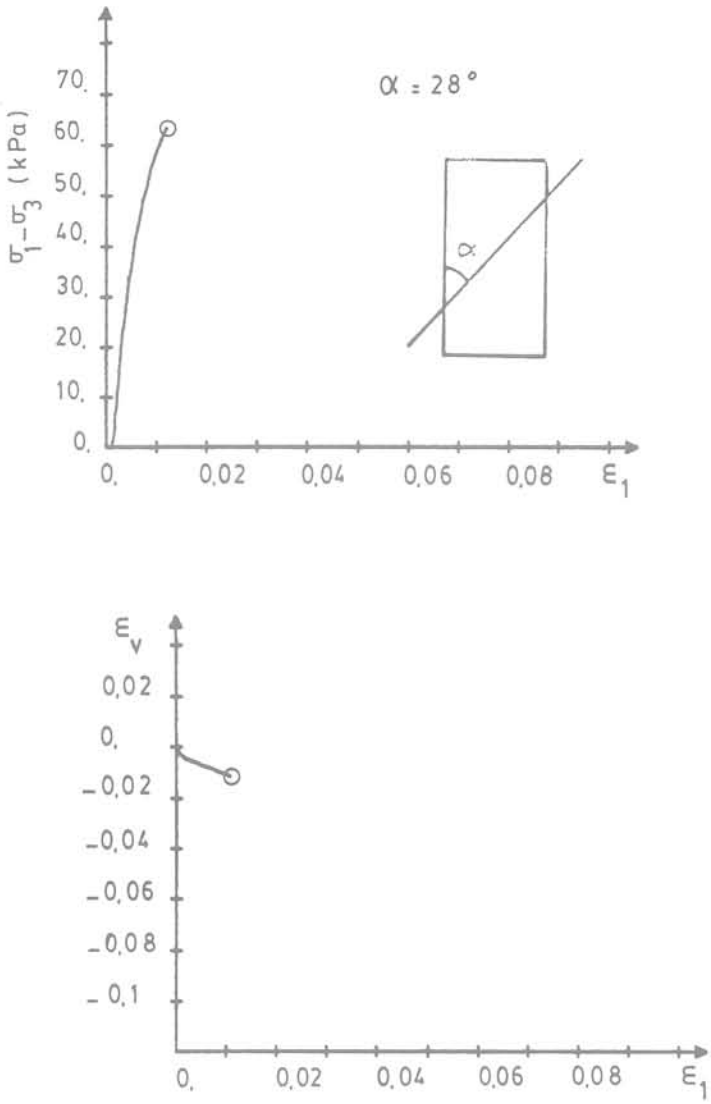


*Figure 12 Calcul théorique du comportement de l'argile Olga en compression triaxiale drainée pour une contrainte latérale de 30 kPa.*

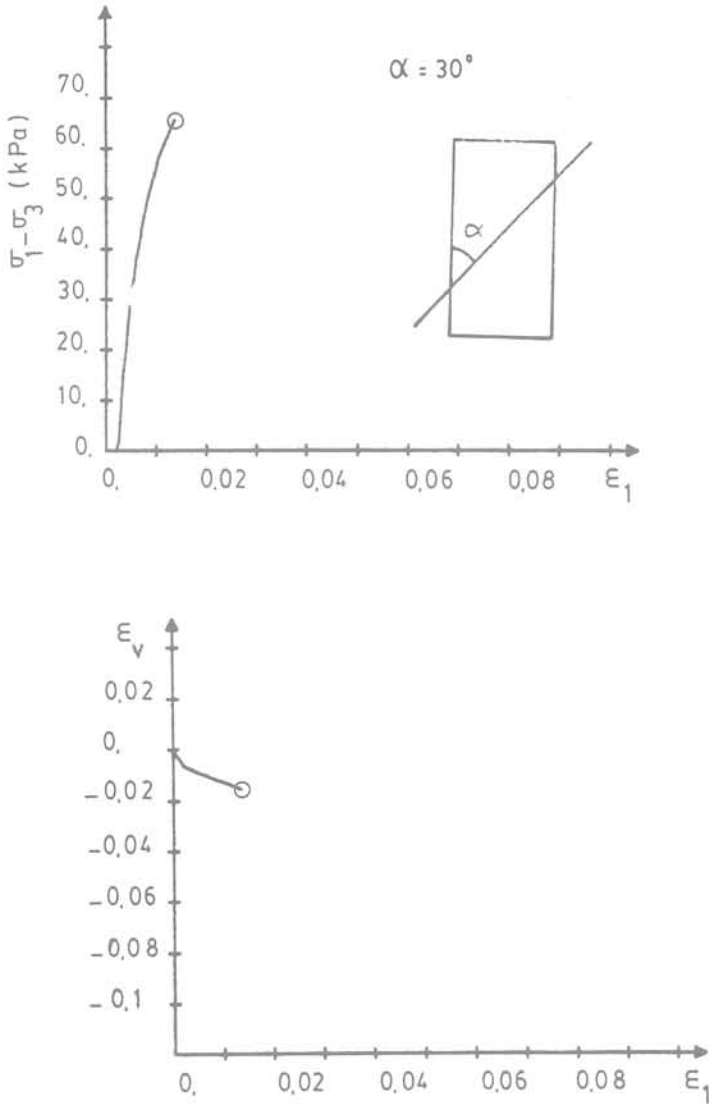


*Figure 13 Calcul théorique du comportement de l'argile Olga en compression triaxiale drainée pour une contrainte latérale de 50 kPa.*


[5] Chambon R. (1981) : « Contribution à la modélisation numérique non linéaire des sols ». Thèse de Doctorat d'État, Grenoble.

[6] Christoffersen, Hutchinson J. W. (1979) : « A class of phenomenological corner theories of plasticity ». J. Mech. Phys. Solids, vol. 27, pp. 465-487.

[7] Darve F. (1978) : « Une formulation incrémentale des lois rhéologiques. Application aux sols ». Thèse de Doctorat d'État, Grenoble.

[8] Darve F. (1980) : « Une loi rhéologique incrémentale non linéaire pour les solides ». Mech. Res. Comm., vol. 7, n° 4, pp. 205-212.

[9] Darve F. (1980) : « Loi rhéologique incrémentale non linéaire et sollicitations cycliques sur les sols ». Journée de Rhéologie 1980, E. N. T. P. E., pp. 104-125.

[10] Darve F. (1982) : « Une description du comportement cyclique des solides non visqueux ». A paraître dans le Journal de Mécanique Théorique et Appliquée.

[11] Darve F., Boulon M., Chambon R. (1978) : « Loi rhéologique incrémentale des sols ». Journal de Mécanique, vol. 17, n° 5, pp. 679-716.

[12] Darve F., Desrues J., Jacquet (1980) : « Les surfaces de rupture en mécanique des sols en tant qu'instabilité de déformation ». Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, vol. 5, n° 3, pp. 93-106.

[13] Darve F., Flavigny E., Vuaillat P. (1979) : « Une loi rhéologique complète pour matériaux argileux ». 7e Conf. Europ. de Mécanique des Sols et des Travaux de Fondation, vol. 1, pp. 119-124.

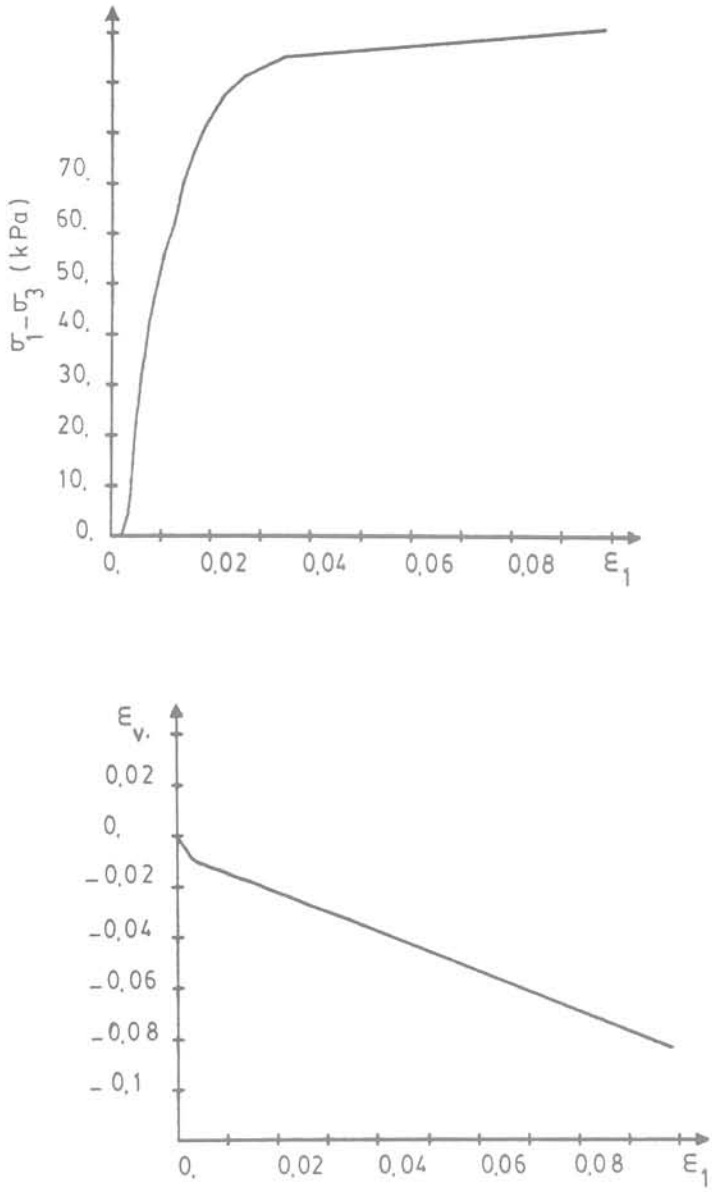


*Figure 14 Calcul théorique du comportement de l'argile olga en compression triaxiale drainée pour une contrainte latérale de 70 kPa.*


[14] Darve F., Labanieh S. (1982) : « Incremental constitutive law for sands and clays. Simulations of monotonic and cyclic tests ». Int. J. Num. and Anal. Methods in Geomech., vol. 6, pp. 243-275.

[15] Darve F., Labanieh S. (1982) : « Comportement mécanique des milieux granulaires en liaison avec leur structure ». Numéro Spécial des Cahiers du Groupe Français de Rhéologie, « Comportements Rhéologiques et Structure des Matériaux », pp. 329-341.

[16] Darve F., Lefebvre G. (1981) : « Étude de la rupture des argiles structurées comme un problème de bifurcation ». Journée de Rhéologie 1981, E. N. T. P. E., Lyon.

[17] Desrues J. (1980) : « Rupture surfaces in soils mechanics ». Colloque Euromech 134, Copenhague.

[18] Hill R. (1962) : « Acceleration waves in solids ». J. Mech. Phys. Solids, vol. 10, pp. 1-16.

[19] Hutchinson J.W., Neale K. (1978) : « Sheet necking - II. Time independent behaviour ». Mechanics of sheet metal forming, ed. D. P. Koistinen and N. M. Wang, pp. 127-153.

[20] Lefebvre G. (1981) : « Strength and slope stability in Canadian soft clay deposits ». Revue Canadienne de Géotechnique, vol. 18, n° 3.

[21] Lefebvre G., Bosse J.-P., Beliveau J.-G. (1979) : « Étude de l'argile du site Olga sous sollicitations cycliques ». Rapport GEO - 79 - 06 présenté à la Société d'Énergie de la Baie James, Sherbrooke.

[22] Lefebvre G., La Rochelle (1974) : « The analysis of two slope failures in cemented Champlain clays ». Revue Canadienne de Géotechnique, vol. 11, n° 1, pp. 89-108.

[23] Lefebvre G., Poulin (1979) : « A new method of sampling in sensitive clay ». Revue Canadienne de Géotechnique, vol. 16, n° 1, pp. 226-233.

[24] Rice J.R. (1976) : « The localization of plastic deformation ». Theoretical and Applied Mechanics, W. T. Koiter ed., North Holland Publishing Company, pp. 207-220.

[25] Rice J.R., Rudnicki J.W. (1980) : « A note on some features of the theory of localization of deformation ». Int. J. Solids Structures, vol. 16, pp. 597-605.

[26] Rudnicki J.W., Rice J.R. (1975) : « Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials ». J. Mech. Phys. Solids, vol. 23, pp. 371-394.

[27] Thom R. (1972) : « Stabilité structurelle et morphogenèse : essai d'une théorie générale des modèles ». W. A. Benjamin Inc., Ediscience S. A., Paris.

[28] Thompson, Hunt (1973) : « A general theory of elastic stability ». John Wiley, Londres.

[29] Vardoulakis I. (1979) : « Bifurcation analysis of the triaxial test on sand samples ». Acta Mechanica, n° 32, pp. 35-54.

[30] Vardoulakis I. (1980) : « Shear band inclination and shear modulus of sand in biaxial tests ». Int. J. Num. Anal. Methods in Geomech., vol. 4, pp. 103-119.

[31] Vardoulakis I., Goldscheider M., Gudehus G. (1978) : « Formation of shear bands in sand bodies as a bifurcation problem ». Int. J. Num. Anal. Methods in Geomech., n° 2, pp. 99-128.

[32] Wong, Mitchell R.J. (1975) : « Yielding and plastic flow of sensitive cemented clay ». Géotechnique, vol. 25, n° 4, pp. 763-782.