

Analyse et dimensionnement fiabilistes des fondations superficielles filantes avec ou sans prise en compte des efforts sismiques pseudo-statiques

**D. YOUSSEF ABDEL
MASSIH**

CNRS libanais
Centre de recherches
géophysiques
Bhannes, Liban
dalia@cnrs.edu.lb

A.-H. SOUBRA

Institut de recherche
en génie civil et mécanique
Université de Nantes
Bd de l'Université, BP 152
44603 Saint-Nazaire Cedex
Abed.soubra@univ-nantes.fr

Résumé

Cet article présente une approche fiabiliste pour l'analyse et le dimensionnement d'une fondation superficielle filante, située ou non dans une zone sismique. Pour une fondation soumise à un chargement vertical centré et en l'absence d'efforts sismiques, le mode de rupture par poinçonnement du sol est étudié. Cependant, pour une fondation chargée verticalement et située dans une zone sismique, les deux modes de rupture (i) poinçonnement du sol et (ii) glissement de la fondation sur le sol sous-jacent, sont considérés. Le chargement sismique est représenté par des forces pseudo-statiques. L'indice de fiabilité adopté est celui de Hasofer-Lind. Les variables aléatoires utilisées sont les propriétés de cisaillement du sol et le coefficient sismique. Il a été montré que la prise en compte d'une corrélation négative entre les propriétés mécaniques du sol augmente la fiabilité de la fondation et que la probabilité de défaillance est très sensible au coefficient de variation de l'angle de frottement interne et du coefficient sismique. Pour le cas d'une fondation située dans une zone sismique, un seul mode de rupture est prédominant dans le calcul de la probabilité de défaillance du système poinçonnement/glissement. Pour le dimensionnement, une procédure itérative est utilisée pour déterminer la largeur de la fondation pour une probabilité de défaillance cible.

Mots-clés : capacité portante, charges sismiques, analyse limite, méthodes probabilistes, fiabilité, fondations superficielles, poinçonnement, glissement.

Reliability analysis and design of shallow strip footings with or without pseudo-static seismic forces

Abstract

This paper presents a reliability-based approach for the analysis and design of a shallow strip footing with or without pseudo-static seismic loading. For a vertically loaded footing situated in a non seismic area, the soil punching failure mode is studied. However, for a vertically loaded footing situated in a seismic area, both the soil punching and the footing sliding along the soil-footing interface are considered. Pseudo-static representation of earthquake effects is adopted. The Hasofer-Lind reliability index is used for the assessment of the footing reliability. The random variables used are the soil shear strength parameters and the

NDLR : Les discussions sur
cet article sont acceptées
jusqu'au 1^{er} septembre 2010.

Introduction

Traditionnellement, l'analyse et le dimensionnement des ouvrages en géotechnique sont fondés sur des approches déterministes. Les aléas et incertitudes des différents paramètres (caractéristiques du sol, chargement, etc.) sont pris en compte de manière simplifiée sous la forme d'un facteur de sécurité global. Celui-ci est souvent appelé facteur d'ignorance car il représente notre ignorance des incertitudes sur les différents paramètres. Pour tenir compte des aléas et incertitudes inhérents aux paramètres, la théorie de la fiabilité est actuellement de plus en plus utilisée en géotechnique. Ceci est devenu possible grâce aux avancées importantes concernant la quantification des incertitudes des paramètres du sol (Phoon et Kulhawey, 1999).

Au cours de la dernière décennie, la théorie de la fiabilité a été appliquée au problème de l'analyse et du dimensionnement des fondations superficielles par un certain nombre d'auteurs. Griffiths et Fenton (2001), Griffiths *et al.* (2002), Fenton et Griffiths (2002, 2003, 2005), Przewlocki (2005), Popescu *et al.* (2005), La Borderie et Breyse (2007), Soubra et Youssef Abdel Massih (2010) ont modélisé les paramètres incertains du sol par des processus aléatoires et ont étudié l'effet de la variabilité spatiale de ces paramètres sur le tassement ou la portance des fondations. La plupart de ces études ont considéré l'incertitude d'un seul paramètre (comme par exemple le module d'Young, la cohésion ou l'angle de frottement interne du sol). D'autres auteurs ont modélisé les incertitudes des différents paramètres par des variables aléatoires. Ainsi, Low et Phoon (2002) ont effectué une analyse fiabiliste des fondations à l'état limite ultime en utilisant des modèles déterministes simplifiés basés sur des formules empiriques des facteurs de capacité portante. L'avantage de ces approches est leur facilité de mise en œuvre ; cependant, elles aboutissent à des solutions approchées. Enfin, il est important de mentionner ici qu'il existe très peu de modèles d'analyse ou de dimensionnement fiabiliste pour des fondations situées dans des zones sismiques.

Dans cet article, on présente une analyse et un dimensionnement fiabilistes à l'état limite ultime d'une fondation superficielle filante et ce, vis-à-vis d'une rupture par poinçonnement du sol et par glissement de la fondation par rapport au sol sous-jacent. Deux configurations de chargement sont considérées. La première examine le cas d'une fondation superficielle filante soumise à une charge verticale centrée et la seconde considère une fondation filante chargée verticalement et soumise à des chargements sismiques pseudo-sta-

seismic coefficient. It was shown that the negative correlation between the soil shear strength parameters highly increases the reliability of the foundation and that the failure probability is highly influenced by the coefficient of variation of the angle of internal friction and the seismic coefficient. For the case of a vertically loaded footing situated in a seismic area, only one mode of failure is predominant in the computation of the system failure probability. For design, an iterative procedure is performed to determine the breadth of the footing for a target failure probability.

Key words: bearing capacity, earthquake loads, limit analysis, probabilistic methods, reliability, shallow foundations, punching, sliding.

tiques. Deux modèles déterministes rigoureux d'analyse limite proposés par Soubra (1999) sont utilisés. Les paramètres incertains considérés sont les caractéristiques mécaniques du sol et le coefficient sismique. Ils sont modélisés par des variables aléatoires.

Après une brève description des concepts de base de la théorie de la fiabilité, la modélisation probabiliste et les résultats numériques correspondants sont présentés et analysés.

Concepts de base de la fiabilité

Deux grandeurs sont communément employées dans la littérature pour l'évaluation de la fiabilité d'un ouvrage : l'indice de fiabilité et la probabilité de défaillance.

Indice de fiabilité

L'indice de fiabilité d'un ouvrage est une mesure de sa sûreté qui prend en compte les incertitudes inhérentes aux différentes variables d'entrée. L'indice de fiabilité le plus utilisé est celui de Hasofer et Lind (1974). Il est défini comme étant la distance minimale, exprimée en nombre d'écart-types, entre le point représentant les valeurs moyennes des variables aléatoires et la surface d'état limite, *i.e.* $\beta = \min [R(\theta)/r(\theta)]$ (Fig. 1). Sa formulation matricielle a été donnée par Ditlevsen (1981) :

$$\beta_{HL} = \min_{x \in F} \sqrt{(x - \mu_x^N)^T C^{-1} (x - \mu_x^N)} \quad (1)$$

dans laquelle x est le vecteur représentant les n variables aléatoires ; μ_x^N le vecteur de leurs valeurs moyennes normales équivalentes ; C , la matrice de covariance et F , le domaine de défaillance. La surface d'état limite $G(x) = 0$ sépare l'espace des variables aléatoires en deux domaines : un domaine de défaillance F défini par $G(x) \leq 0$ et un domaine de sûreté où $G(x) > 0$. Pour le cas de n variables aléatoires, la forme quadratique de l'équation (1) représente l'équation d'un ellipsoïde à n dimensions, qui se réduit à une ellipse dans le cas de deux variables aléatoires.

L'approche classique pour le calcul de l'indice de fiabilité β_{HL} consiste à ramener la surface d'état limite dans un espace de variables aléatoires non corrélées, normales, centrées et réduites. Le passage des variables non normales aux variables normales est réalisé

par des transformations isoprobabilistes (Lemaire, 2005). La décorrélacion s'effectue par une rotation des axes du repère physique vers des nouveaux axes colinéaires avec les axes principaux de l'ellipsoïde de dispersion unitaire. Celui-ci correspond à $\beta_{HL} = 1$ dans l'équation (1). Une translation est ensuite effectuée pour ramener le centre de l'ellipsoïde au niveau de l'origine du repère, ce qui permet d'obtenir des variables centrées. Enfin, une normalisation des différentes variables aléatoires est réalisée en divisant chacune de ces variables par son écart-type. Dans ce nouveau repère, appelé repère des variables standard non corrélées, l'ellipse (dans le cas de deux variables aléatoires) de dispersion unitaire initiale devient un cercle centré à l'origine de rayon égal à l'unité. La distance minimale entre l'origine et la surface d'état limite représente l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind. Un algorithme d'optimisation est utilisé pour déterminer cette distance. Cette approche de calcul nécessite une transformation orthogonale de la matrice de covariance pour passer de l'espace corrélé à l'espace non corrélé.

Récemment, une interprétation intuitive de l'indice de fiabilité a été suggérée par Low (1997) et Low et Tang (1997b, 2004) où le concept d'une ellipse homothétique (Fig. 1) amène à une méthode simple et directe pour le calcul de l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind dans l'espace physique des variables aléatoires. Dans le cadre de cette approche, l'indice de fiabilité est obtenu par une minimisation directe de la forme quadratique de l'équation (1) en utilisant un outil d'optimisation disponible dans la plupart des tableurs. Low et Tang (1997b) ont fait remarquer que lorsque seulement deux variables aléatoires non corrélées et non normales X_1 et X_2 sont utilisées, ces variables décrivent dans l'espace physique des variables aléatoires une ellipse. Cette ellipse est centrée sur les valeurs moyennes normales équivalentes (μ_1^N, μ_2^N), dont les axes sont parallèles aux axes de coordonnées de l'espace physique. Pour des variables corrélées, l'ellipse est inclinée. Ces auteurs ont signalé que l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind β_{HL} peut être vu comme le ratio, dans une direction donnée, de la plus petite ellipse (qui est soit une expansion ou une contraction de l'ellipse unitaire) qui tangente la surface d'état limite à celle de l'ellipse de dispersion unitaire (Fig. 1). Cette interprétation et celle donnée par $\beta_{HL} = \min [R(\theta)/r(\theta)]$ sont équivalentes. La plus petite ellipse tangente à la surface d'état limite est désignée dans la suite sous le nom d'ellipse de dispersion critique. Low et Tang (1997b) ont montré également que les courbes elliptiques graduellement croissantes (ou ellipsoïdes en dimensions multiples avec plusieurs variables aléatoires) peuvent être interprétées comme les isovaleurs d'une densité de probabilité décroissante. Ceci s'explique par le fait que l'opposé de la forme quadratique $(x - \mu_x^N)^T C^{-1} (x - \mu_x^N)$ de l'équation (1) apparaît aussi dans l'exponentielle d'une densité de probabilité normale à plusieurs variables corrélées. Par conséquent, pour des variables distribuées selon une loi normale, minimiser β_{HL} dans l'équation (1) revient à maximiser la valeur de la fonction densité de probabilité normale, et trouver la plus petite ellipse tangente à la surface d'état limite est équivalent à trouver le point de défaillance le plus probable. Il est important de mentionner ici que si les écarts types des variables aléatoires X_1 et X_2 augmentent (ce qui traduit une plus grande incertitude sur les paramètres), l'ellipse de dispersion unitaire s'agrandit et le ratio des axes (i.e. indice de fiabilité) de l'ellipse de dispersion critique à l'ellipse de dispersion unitaire diminue indiquant un niveau de fiabilité plus faible.

Cette capacité de l'indice de fiabilité à refléter le degré d'incertitude des paramètres est une des raisons qui fait qu'il est plus rationnel que le facteur de sécurité traditionnel.

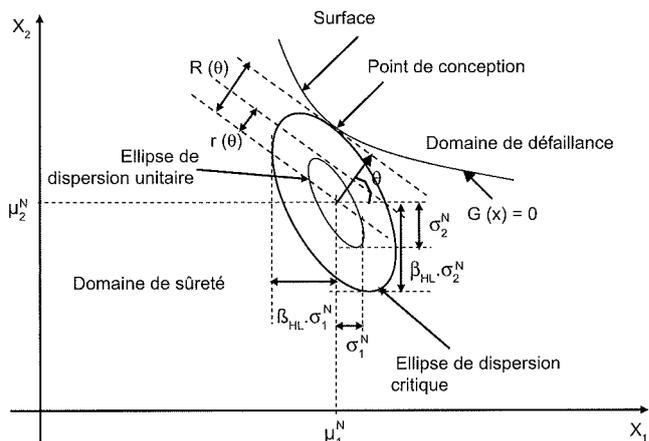


FIG. 1 Point de conception et ellipses de dispersion dans l'espace physique de deux variables aléatoires.

Design point and dispersion ellipses in the physical space of two random variables.

2.2

Probabilité de défaillance

Étant donné un vecteur X de n variables aléatoires et une fonction de performance définie par $G(x)$, la probabilité de défaillance P_f est définie par :

$$P_f = \int_{G(x) \leq 0} f_x(x) dx \quad (2)$$

où $f_x(x)$ est la fonction densité de probabilité conjointe des variables aléatoires X . En introduisant la fonction indicatrice $I(x)$ définie par :

$$I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } G(x) \leq 0 \\ 0 & \text{si } G(x) > 0 \end{cases} \quad (3)$$

L'intégrale qui donne la probabilité de défaillance (éq. 2) peut s'écrire :

$$P_f = \int_{\Omega} I(x) f_x(x) dx \quad (4)$$

où Ω est le domaine entier. L'évaluation analytique de cette intégrale est très difficile, voire impossible dans la plupart des cas. Plusieurs méthodes ont été suggérées dans la littérature pour le calcul de la probabilité de défaillance. La méthode FORM (*First Order Reliability Method*) et la méthode SORM (*Second Order Reliability Method*) fournissent des solutions approchées. Cependant, les méthodes de simulation telles que la méthode de Monte-Carlo (MC) ou la méthode du tirage d'importance (*Importance Sampling*, IS) donnent une bonne estimation de la probabilité de défaillance. Toutefois, ces méthodes sont numériquement très consommatrices en temps d'exécution.

A partir de la méthode FORM et de l'indice de fiabilité de Hasofer et Lind, la probabilité de défaillance peut être approchée par :

$$P_f \approx \Phi(-\beta_{HL}) \quad (5)$$

où $\Phi(\cdot)$ est la fonction de répartition d'une variable standard. Dans cette méthode, la fonction d'état limite est approchée par un hyperplan (approximation du premier ordre) tangent à la surface d'état limite au point de défaillance le plus probable appelé « point de conception » (*design point*).

2.3

Facteurs de sensibilité et facteurs d'omission

Les facteurs de sensibilité représentent l'importance relative des variables aléatoires dans un calcul fiabiliste. Il existe plusieurs formes de ces facteurs dans la littérature (Lemaire, 2005). L'indice de sensibilité le plus communément utilisé dans la méthode FORM est le facteur défini par rapport aux variables aléatoires standard non corrélées :

$$\alpha_i = - \frac{\partial \beta_{HL}}{\partial u_i} \Big|_{\{u\}} \quad (6)$$

où β_{HL} est l'indice de fiabilité et μ_i^* la valeur de la variable aléatoire standard non corrélée au point de conception. En utilisant l'expression de l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind donné dans l'équation (1), l'indice α_i est fourni par l'équation (7) pour des variables non corrélées :

$$\alpha_i = - \frac{u_i^*}{\beta_{HL}} \quad (7)$$

Si les variables aléatoires sont corrélées, les indices α_i n'ont plus un sens physique dû à la transformation de l'espace physique corrélé à l'espace standard non corrélé (Melchers, 1999 ; p. 101). Dans ce cas, un autre facteur, appelé « facteur d'omission » peut être utilisé ; il représente l'erreur relative commise dans le calcul de l'indice de fiabilité quand une variable aléatoire est remplacée par sa valeur moyenne déterministe. Ce facteur est donné par :

$$\gamma_i(\mu_i) = \frac{\beta_{HL}(x_i = \mu_i)}{\beta_{HL}} \quad (8)$$

où β_{HL} est la valeur de l'indice de fiabilité déterminée quand tous les paramètres sont considérés comme des variables aléatoires et $\beta_{HL}(x_i = \mu_i)$ est l'indice de fiabilité calculé en remplaçant x_i par sa valeur moyenne déterministe.

3

Modélisation fiabiliste des fondations superficielles filantes

L'objectif de cet article est d'effectuer une analyse et un dimensionnement fiabilistes d'une fondation superficielle filante reposant en surface sur un sol frottant et cohérent et soumise à un chargement vertical centré. Le cas d'une fondation filante soumise à un chargement vertical et située dans une zone sismique est aussi étudié. Une représentation pseudo-statique des efforts sismiques utilisant le concept du coefficient sismique est adoptée. L'accélération sismique est supposée la même pour le sol et la fondation : seul le coefficient sismique horizontal K_h est considéré dans l'analyse,

le coefficient sismique vertical étant souvent négligé. Dues aux incertitudes des caractéristiques mécaniques du sol et du coefficient sismique, la cohésion c , l'angle de frottement interne φ et le coefficient sismique K_h sont décrits par des variables aléatoires. Dans les trois paragraphes suivants, on présente successivement les modèles déterministes adoptés, les fonctions de performance et la méthode de l'ellipsoïde employées.

3.1

Modèles d'analyse limite

Deux modèles déterministes ont été utilisés et la méthode de la borne supérieure, appelée aussi méthode cinématique en analyse limite, a été appliquée au problème de détermination de la capacité portante d'une fondation superficielle filante en utilisant des champs de vitesses cinématiquement admissibles. Cette approche est simple et permet d'obtenir des solutions de type borne supérieure de la charge ultime. Bien que les résultats obtenus soient des majorants, ils correspondent aux plus petites bornes supérieures parmi les solutions existantes. Ceci a été démontré par Soubra (1999). Pour certaines configurations (cas des sols non pesants), ces solutions sont exactes, puisqu'elles sont égales aux résultats donnés par la méthode de la borne inférieure. Deux mécanismes de ruine M1 et M2 cinématiquement admissibles ont été considérés dans cet article.

Le mécanisme M1 est un mécanisme de rupture symétrique de type multiblocs (Fig. 2). Il est utilisé pour le calcul de la capacité portante d'une fondation superficielle filante soumise à une charge verticale centrée. Ce mécanisme est composé d'un bloc ABC solidaire de la fondation se déplaçant avec une vitesse V_0 verticale et d'une série de n blocs triangulaires rigides de chaque côté de la fondation (Fig. 3). Le bloc triangulaire, noté bloc (i), se déplace avec la vitesse V_i inclinée d'un angle φ par rapport à la ligne d_i . La vitesse $V_{i,i+1}$, inclinée d'un angle φ par rapport à la ligne $l_{i,i+1}$, représente la vitesse relative de deux blocs successifs (i) et (i+1). Le dernier bloc triangulaire, noté bloc (n), se déplace avec une vitesse V_n inclinée d'un angle φ par rapport à la ligne d_n .

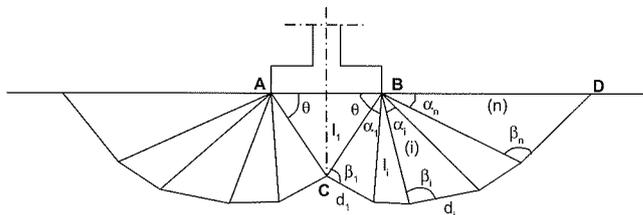


FIG. 2 Mécanisme de rupture M1 pour le cas d'un chargement vertical centré en l'absence de séisme.

M1 failure mechanism for the case of a central vertical load without seismic loading.

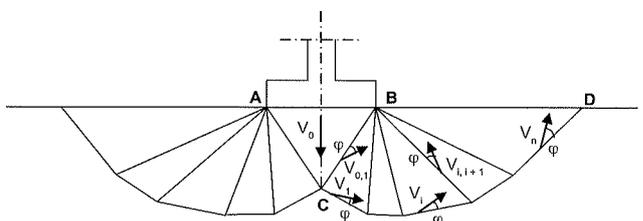


FIG. 3 Champ de vitesses pour le mécanisme M1. Velocity field for M1 mechanism.

Fonctions de performance

Le mécanisme M2 est un mécanisme de rupture multiblocs asymétrique (Fig. 4). Il convient au calcul de la capacité portante d'une fondation superficielle filante située dans une zone sismique et soumise à un effort vertical centré. Contrairement au mécanisme M1, le premier bloc triangulaire rigide se déplace avec la vitesse V_1 inclinée de φ par rapport à la ligne AC (Fig. 5).

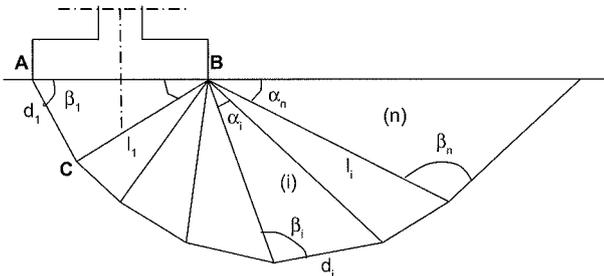


FIG. 4 Mécanisme de rupture M2 en présence d'un chargement sismique.
M2 failure mechanism in the presence of a seismic load.

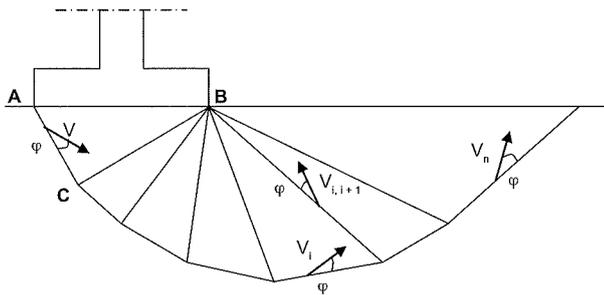


FIG. 5 Champ de vitesses pour le mécanisme M2.
Velocity field for M2 mechanism.

Pour le calcul de la capacité portante ultime, les efforts extérieurs intervenant dans l'équation du bilan énergétique concernent la charge de la fondation, le poids des différents blocs de sol en mouvement, la surcharge en surface q et les efforts sismiques pseudo-statiques pour le sol (dans le cas du chargement sismique). La puissance dissipée a lieu le long des surfaces de discontinuité de vitesses. Ces surfaces concernent les lignes radiales inter-blocs l_i et les lignes de glissement d_i entre les blocs de sol en mouvement et le sol au repos. Pour chaque mécanisme, l'écriture de l'équation du bilan énergétique permet de donner l'expression de la charge ultime en fonction des paramètres angulaires du mécanisme comme suit :

$$V_u = \frac{1}{2} \gamma B^2 N_\gamma + qBN_q + cBN_c \quad (9)$$

où les coefficients de capacité portante N_γ , N_q et N_c sont des fonctions des paramètres angulaires du mécanisme utilisé. La charge ultime déterministe des deux cas de chargement est obtenue par minimisation numérique de l'effort V_u (éq. 9) par rapport aux paramètres angulaires du mécanisme concerné. Pour plus de détails sur ces mécanismes, le lecteur peut se référer à Soubra (1999).

Deux états limites peuvent caractériser le comportement du système sol/fondation :

- l'état limite ultime (appelé aussi état limite de résistance) ;
- l'état limite de service (appelé aussi état limite de déformation).

L'état limite ultime comporte l'état limite de résistance de la structure de la fondation et l'état limite de résistance du sol. On se limite ici à l'étude de l'état limite ultime concernant la résistance du sol.

Dans le cas d'une fondation soumise à une charge verticale centrée, la fonction de performance utilisée dans l'analyse fiabiliste est définie vis-à-vis d'une rupture par poinçonnement du sol. Elle est donnée par :

$$G_1 = \frac{V_u}{V} - 1 = F_p - 1 \quad (10)$$

où V_u est la charge ultime de la fondation ; V , la charge verticale appliquée et $F_p = \frac{V_u}{V}$, le facteur de sécurité

vis-à-vis du poinçonnement du sol. Une autre forme de la fonction de performance appelée marge de sécurité $G_1 = V_u - V$ aurait pu être utilisée. Cependant, l'équation (10) a l'avantage de faire apparaître de manière explicite le facteur de sécurité vis-à-vis du poinçonnement. Ces deux formes de la fonction de performance aboutissent à la même valeur de l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind, car contrairement à l'indice de Cornell, cet indice est invariant vis-à-vis de la forme utilisée pour la fonction de performance.

Dans le cas d'une fondation soumise à une charge verticale centrée et située dans une zone sismique, deux modes de rupture peuvent se développer : la rupture par poinçonnement du sol et la rupture par glissement de la fondation par rapport au sol sous-jacent. La fonction de performance définie vis-à-vis du poinçonnement est similaire à celle donnée dans le cas d'une fondation soumise à une charge verticale centrée. Pour ce qui concerne la rupture par glissement, l'expression de la fonction de performance est :

$$G_2 = \frac{H_u}{H} - 1 = \frac{aB + V \tan \delta}{K_n V} - 1 = F_s - 1 \quad (11)$$

où δ est l'angle de frottement au niveau de l'interface sol/fondation ; a , la contrainte d'adhérence donnée par $a = c \tan \delta / \tan \varphi$ (Caquot, 1934) et F_s , le facteur de sécurité vis-à-vis du glissement de la fondation par rapport au sol sous-jacent. Pour une interface parfaitement lisse ($\delta = 0$), la contrainte d'adhérence est nulle et, pour une interface parfaitement rugueuse ($\delta = \varphi$), la contrainte d'adhérence devient égale à la cohésion du sol.

Méthode de l'ellipsoïde

Le calcul de la fiabilité de la fondation est effectué à l'aide de l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind β_{HL} donné par l'équation (1). Cette équation peut s'écrire dans

l'espace physique des variables aléatoires sous la forme matricielle suivante (Low et Tang, 1997a, b, c ; 2004) :

$$\beta_{HL} = \min_{G(x) \leq 0} \sqrt{\left[\frac{x - \mu_x^N}{\sigma_x^N} \right]^T [R]^{-1} \left[\frac{x - \mu_x^N}{\sigma_x^N} \right]} \quad (12)$$

où x est le vecteur des variables aléatoires ; μ_x^N le vecteur de leurs moyennes équivalentes normales ; σ_x^N le vecteur de leurs écarts-types équivalents normaux et $[R]$, la matrice de corrélation des variables aléatoires. La matrice de corrélation $[R]$ reflète la structure de corrélation entre variables aléatoires de manière plus explicite que la matrice de covariance $[C]$. Dans le cas de variables aléatoires non gaussiennes, l'approche d'optimisation utilise une procédure de normalisation gaussienne (Lemaire, 2005). Le calcul de la moyenne équivalente normale μ_x^N et de l'écart-type équivalent normal σ_x^N pour chaque itération de calcul est automatique durant le processus de minimisation.

La minimisation de la forme quadratique (12) soumise à la contrainte $G(x) \leq 0$, est effectuée d'une manière simple, car elle permet de travailler dans l'espace physique des variables aléatoires sans passer par les étapes traditionnelles de transformation de l'espace physique à l'espace standard. L'outil d'optimisation utilisé est le solveur d'Excel. Notons que l'optimisation dans l'espace standard est plus pertinente que celle dans l'espace physique et ce, en raison de la standardisation des variables aléatoires, ce qui conduit à travailler avec des variables ayant le même ordre de grandeur. Cependant, l'utilisation de l'option « Automatic scaling » dans le solveur d'Excel permet de palier à cet inconvénient. La procédure d'implémentation de la méthode de l'ellipsoïde dans une feuille de calcul du tableur Excel est décrite dans Low (2005) et Low et Tang (1997a, b, c ; 2004).

4

Résultats numériques probabilistes

Pour les deux mécanismes de rupture M1 et M2, les résultats numériques considèrent le cas d'une fondation superficielle filante de largeur $B = 2$ m. Le sol a un poids volumique de 18 kN/m^3 .

4.1

Résultats du chargement vertical centré (mécanisme M1)

Différentes valeurs des coefficients de variation de l'angle de frottement interne et de la cohésion du sol sont disponibles dans la littérature. Pour la plupart des sols, la valeur moyenne de l'angle de frottement interne effectif se situe typiquement entre 20 et 40 degrés. À l'intérieur de cette fourchette, le coefficient de variation proposé par Phoon et Kulhawy (1999) est essentiellement entre 5 et 15 %. Pour la cohésion effective, le coefficient de variation varie entre 10 et 70 % (Cherubini, 2000). Pour le coefficient de corrélation, Harr (1987) a montré qu'une corrélation existe entre la cohésion effective et l'angle de frottement interne effectif. Les résultats de Wolff (1985) ($\rho_{c,\varphi} = -0,47$), Yuceman *et al.* (1973) ($-0,49 \leq \rho_{c,\varphi} \leq -0,24$), Lumb (1970) ($-0,7 \leq \rho_{c,\varphi} \leq -0,37$) et Cherubini (2000) ($\rho_{c,\varphi} \leq -0,61$) sont parmi ceux cités dans la littérature. Dans cette étude, les valeurs choisies pour les moments statistiques des

paramètres de résistance au cisaillement du sol et de leur coefficient de corrélation $\rho_{c,\varphi}$ sont : $\mu_c = 20 \text{ kPa}$, $\mu_\varphi = 30$ degrés, $COV_c = 20 \%$, $COV_\varphi = 10 \%$ et $\rho_{c,\varphi} = -0,5$. Ces valeurs se situent à l'intérieur de la fourchette de valeurs citées ci-dessus. Pour la distribution de probabilité des variables aléatoires, deux cas ont été étudiés. Pour le premier cas, dénommé *variables normales*, c et φ sont modélisés par des variables normales. Pour le second cas, dénommé *variables non normales*, c est supposée lognormale et φ est considéré borné et une distribution Bêta est utilisée pour représenter ce paramètre (Fenton et Griffith, 2003). Les paramètres de la loi de distribution Bêta sont déterminés à partir de la valeur moyenne et de l'écart-type de φ . Pour ces deux cas, des variables corrélées et non corrélées sont considérées. Pour l'exemple traité, la charge ultime de la fondation calculée pour les valeurs moyennes des propriétés mécaniques du sol est $P_u = 2 136,72 \text{ kN/m}$.

4.1.1

Surface de rupture probabiliste

L'approche classique utilisée pour le calcul du facteur de sécurité d'un talus ou la charge ultime d'une fondation superficielle est basée sur la minimisation de ces fonctions par rapport aux paramètres géométriques du mécanisme de ruine. La surface correspondant au facteur de sécurité minimal ou à la charge ultime minimale est appelée surface déterministe. Certains auteurs ont utilisé cette surface déterministe pour le calcul de la fiabilité de leurs ouvrages (Christian *et al.*, 1994). Dans cet article, une approche plus rigoureuse pour le calcul de l'indice de fiabilité β_{HL} est présentée. Elle consiste à déterminer β_{HL} en minimisant la forme quadratique (éq. 12) non seulement par rapport aux variables aléatoires mais aussi par rapport aux paramètres géométriques du mécanisme de rupture (θ, α, β). Dans le cas présent d'un chargement vertical centré, douze blocs rigides (*i.e.* $n = 12$) ont été utilisés de part et d'autre de la fondation puisqu'un nombre supérieur de blocs améliore (*i.e.* réduit) de moins de 1 % la valeur de β_{HL} (Fig. 6). Par conséquent, la minimisation est effectuée par rapport à 27 paramètres ($\theta, \alpha, \beta, c, \varphi$) où $i = 1, \dots, n$. La surface obtenue correspondant à l'indice de fiabilité minimal est appelée surface probabiliste. L'indice de fiabilité calculé en cherchant la surface probabiliste est plus petit (*i.e.* plus critique) que celui basé sur la surface déterministe. L'indice de fiabilité déterminé en utilisant la surface déterministe fournit une valeur non conservative de 3,49 au lieu de 3,27 (Fig. 7) pour des propriétés de cisaillement du sol *normales* et non corrélées.

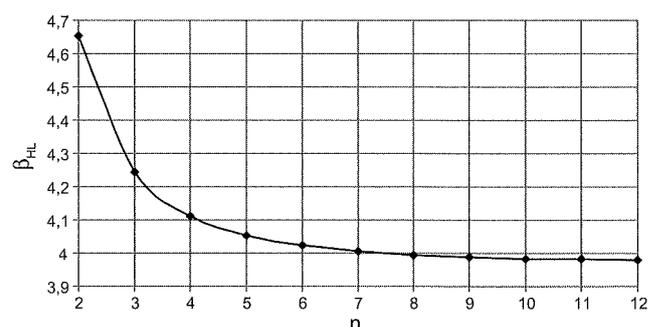


FIG. 6 Variation de l'indice de fiabilité en fonction du nombre de blocs du mécanisme M1. Reliability index versus number of blocks of M1 failure mechanism.

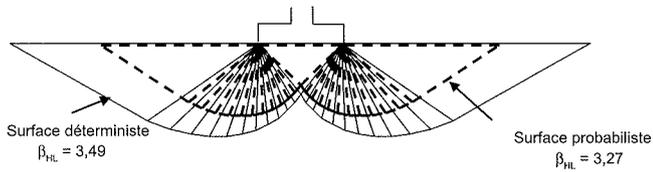


FIG. 7 Comparaison entre les surfaces de rupture déterministe et probabiliste.
Comparison between deterministic and probabilistic failure surfaces.

4.1.2

Indice de fiabilité et facteurs d'omission

Le calcul fiabiliste basé sur les modèles déterministes de l'approche cinématique de l'analyse limite fournit un majorant de l'indice de fiabilité. En effet, pour une charge ultime V_{u1} supérieure à V_{u2} , le facteur

de sécurité $F_{p1} = \frac{V_{u1}}{V}$ est supérieur à $F_{p2} = \frac{V_{u2}}{V}$. Ainsi, la

fiabilité correspondant au facteur de sécurité F_{p1} est supérieure à celle correspondant au facteur de sécurité F_{p2} . Par conséquent, l'indice de fiabilité β_{HL1} est supérieur à β_{HL2} .

La figure 8 présente l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind β_{HL} en fonction du facteur de sécurité $F_p = V_u/V$ pour des propriétés de cisaillement du sol normales et non normales, corrélées et non corrélées. Pour tous ces cas, l'indice de fiabilité décroît avec l'augmentation de la charge appliquée (i.e. avec la diminution du facteur de sécurité F_p) jusqu'à s'annuler pour un facteur de sécurité égal à 1 (i.e. $F_p = 1$). Ce cas correspond à un état de rupture déterministe en utilisant les valeurs moyennes des variables aléatoires et pour lequel la probabilité de défaillance est de 50 %. La comparaison des résultats des variables corrélées avec ceux des variables non corrélées montre que la corrélation négative entre les paramètres de cisaillement du sol améliore la fiabilité de la fondation. On peut conclure que l'hypothèse d'une corrélation nulle entre les paramètres de cisaillement du sol est plus sécuritaire par rapport à celle des paramètres négativement corrélés pour les

deux cas de distributions normales et non normales. A titre d'exemple, pour un facteur de sécurité égal à 4,27 (i.e. $V = 500$ kN/m), l'indice de fiabilité augmente de 40 % si les variables c et φ sont considérées négativement corrélées avec $\rho_{c,\varphi} = -0.5$. La figure 8 montre aussi que, pour des faibles valeurs du facteur de sécurité, les résultats des variables normales et non normales sont presque identiques. Une différence apparaît pour les grandes valeurs du facteur de sécurité.

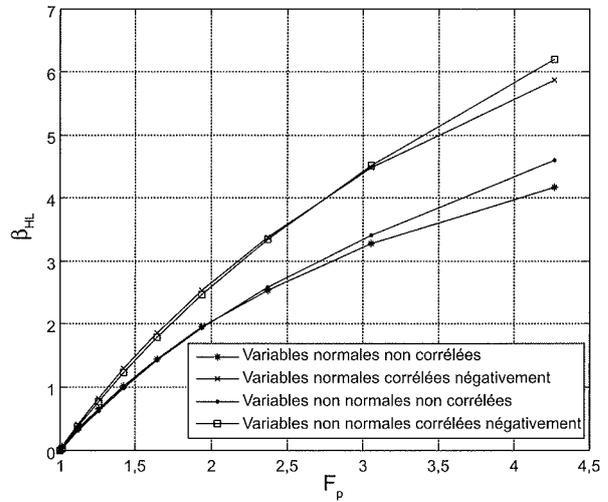


FIG. 8 Indice de fiabilité en fonction du facteur de sécurité F_p .
Reliability index versus safety factor F_p .

Les valeurs des facteurs d'omission de la cohésion et de l'angle de frottement interne sont présentées dans le tableau I pour les quatre combinaisons d'hypothèses de variables normales, non normales, corrélées et non corrélées. Les valeurs du facteur d'omission de la cohésion sont beaucoup plus proches de 1 que celles de l'angle de frottement interne. Par conséquent, l'effet des incertitudes de l'angle de frottement interne sur l'indice de fiabilité est beaucoup plus prononcé que l'effet des incertitudes de la cohésion, particulièrement pour le cas des variables non normales.

TABEAU I Facteurs d'omission.
Omission factors.

V (kN/m)	Normales non corrélées		Normales corrélées		Non normales non corrélées		Non normales corrélées	
	$\gamma(\mu_c)$	$\gamma(\mu_\varphi)$	$\gamma(\mu_c)$	$\gamma(\mu_\varphi)$	$\gamma(\mu_c)$	$\gamma(\mu_\varphi)$	$\gamma(\mu_c)$	$\gamma(\mu_\varphi)$
500	1,30	1,39	0,92	0,99	1,20	5,44	0,89	4,03
700	1,21	1,60	0,88	1,17	1,18	5,27	0,89	3,99
900	1,16	1,81	0,87	1,36	1,15	4,87	0,89	3,76
1 100	1,13	2,01	0,87	1,54	1,13	3,89	0,89	3,05
1 300	1,11	2,20	0,87	1,72	1,12	3,51	0,89	2,80
1 500	1,09	2,38	0,87	1,90	1,12	3,29	0,90	2,66
1 700	1,08	2,56	0,87	2,07	1,13	3,16	0,92	2,57
1 900	1,08	2,74	0,88	2,23	1,19	3,03	0,97	2,49
2 100	1,02	2,91	0,93	2,40	1,37	2,17	1,13	1,80

Facteurs de sécurité partiels

Les valeurs de c^* et φ^* des différents points de conception, correspondant aux différentes valeurs de la charge appliquée, permettent de connaître les valeurs des facteurs de sécurité partiels réellement mobilisés pour chacun des paramètres de cisaillement c et φ :

$$F_c = \frac{\mu_c}{c^*} \quad (13)$$

$$F_\varphi = \frac{\tan(\mu_\varphi)}{\tan\varphi^*} \quad (14)$$

Pour des paramètres de cisaillement non corrélés, les valeurs de c^* et φ^* sont plus petites que leurs valeurs moyennes respectives et augmentent avec l'augmentation de la charge appliquée (Youssef Abdel Massih, 2007 ; Youssef Abdel Massih et Soubra, 2008 ; Youssef Abdel Massih *et al.*, 2008). Par conséquent, les valeurs des facteurs de sécurité F_c et F_φ diminuent avec l'augmentation de la charge appliquée et tendent vers 1 pour la charge ultime déterministe (Tableau II). Pour des paramètres de cisaillement négativement corrélés, c^* excède légèrement la moyenne pour certaines valeurs de la charge appliquée, ce qui conduit à des facteurs de sécurité F_c légèrement inférieurs à 1. Ceci peut s'expliquer par la rotation de l'ellipse critique (Fig. 1) avec l'augmentation de la corrélation aboutissant ainsi à des valeurs de c supérieures à la valeur moyenne. Ceci signifie que la cohésion est complètement mobilisée pour ces cas. La rotation de l'ellipse avec la corrélation est illustrée graphiquement dans le paragraphe suivant.

Surface d'état limite

La surface d'état limite sépare les couples (c, φ) pour lesquels le sol est en état de défaillance de ceux pour lesquels le sol est en état de sûreté. Les valeurs (c, φ) définissant la surface d'état limite sont obtenues en

cherchant la valeur de c (ou φ) pour une valeur donnée de φ (ou c) satisfaisant les deux conditions suivantes :

- (i) une valeur minimale de la charge ultime V_u ;
- (ii) un facteur de sécurité $F_p = V_u / V = 1$.

Pour la recherche de cette surface, un programme informatique a été écrit en Visual Basic sous Excel. Il appelle le solveur d'Excel d'une façon itérative afin de satisfaire simultanément les deux conditions ci-dessus. Pour chaque itération, une minimisation et une résolution d'une équation non linéaire sont effectuées.

On a vu auparavant que la détermination de l'indice de fiabilité dans l'espace physique des variables aléatoires revient à rechercher la plus petite ellipse qui tangente la surface d'état limite. Cette ellipse (appelée ellipse de dispersion critique et notée ellipse β_{HL}) est présentée sur la figure 9 pour des paramètres de cisaillement non corrélés et corrélés négativement. Les deux ellipses sont dessinées pour $V = 700$ kN/m. Les points de tangence des ellipses avec la surface d'état limite sont les points de conception. La corrélation négative entre les paramètres de cisaillement conduit à une rotation des axes majeurs de l'ellipse dans le sens contraire de celui des aiguilles d'une montre. De plus, une ellipse plus grande est obtenue et l'indice de fiabilité augmente par rapport à celui déterminé pour des paramètres de cisaillement indépendants.

Distributions de la charge ultime

Les incertitudes et aléas des propriétés du sol représentés par des lois de distribution de probabilité (Normale, Lognormale, Bêta) affectent la valeur de la charge ultime de la fondation. Cette charge n'est plus définie par une valeur unique comme dans le calcul déterministe mais par une distribution de probabilité. Cette distribution est représentée ici par sa fonction de répartition (CDF) et sa densité de probabilité (PDF). En variant la valeur cible P de la charge ultime, on peut déterminer sa fonction de répartition CDF (notée F_{V_u}) pour une variabilité donnée des propriétés du sol comme suit :

$$F_{V_u}(P) = \Pr [V_u \leq P] = P_f \quad (15)$$

TABLEAU II Facteurs de sécurité partiels.
Partial safety factors.

V (kN/m)	Normales non corrélées		Normales corrélées		Non normales non corrélées		Non normales corrélées	
	F_c	F_φ	F_c	F_φ	F_c	F_φ	F_c	F_φ
500	2,25	1,53	1,85	1,64	1,61	1,74	1,33	1,92
700	1,61	1,43	1,21	1,60	1,39	1,51	1,15	1,63
900	1,35	1,33	1,06	1,45	1,27	1,36	1,06	1,45
1 100	1,22	1,25	1,01	1,33	1,19	1,26	1,02	1,32
1 300	1,14	1,18	0,99	1,23	1,14	1,18	1,00	1,23
1 500	1,09	1,12	0,98	1,16	1,10	1,12	1,00	1,15
1 700	1,05	1,08	0,98	1,10	1,07	1,07	1,00	1,09
1 900	1,02	1,04	0,99	1,05	1,04	1,04	1,01	1,04
2 100	1,00	1,01	1,00	1,01	1,02	1,00	1,02	1,00
2 137	1,00	1,00	1,00	1,00	1,02	1,00	1,02	1,00

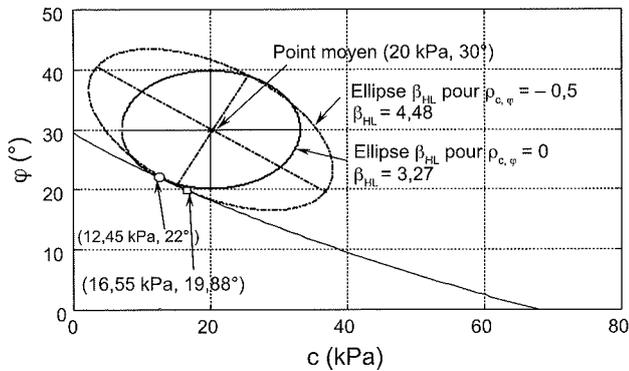


FIG. 9 Ellipses β_{HL} pour des variables corrélées et non corrélées dans l'espace physique des variables aléatoires.

β_{HL} ellipses for correlated and uncorrelated variables in the physical space of random variables.

où P_f est la probabilité de défaillance calculée par l'approximation FORM pour une valeur donnée de la charge appliquée $V = P$. Pour la détermination de la densité de probabilité (PDF), elle est déduite de la fonction de répartition par dérivation numérique en utilisant l'équation suivante :

$$f_{V_v}(P) = \frac{F_{V_v}(P + dP) - F_{V_v}(P)}{dP} \quad (16)$$

La figure 10 présente les fonctions de répartition (CDF) de la charge ultime données par la méthode FORM pour les quatre combinaisons d'hypothèses de variables normales, non normales, corrélées et non corrélées. Pour le cas des propriétés de cisaillement non corrélées, la fonction de répartition de la charge ultime est plus étendue (ce qui correspond à un plus grand coefficient de variation de la charge ultime) que celle obtenue dans le cas de variables corrélées négativement. Le choix de la distribution de probabilité (i.e. normale, lognormale et distribution Bêta) n'a pas un effet significatif sur les valeurs de la probabilité de défaillance.

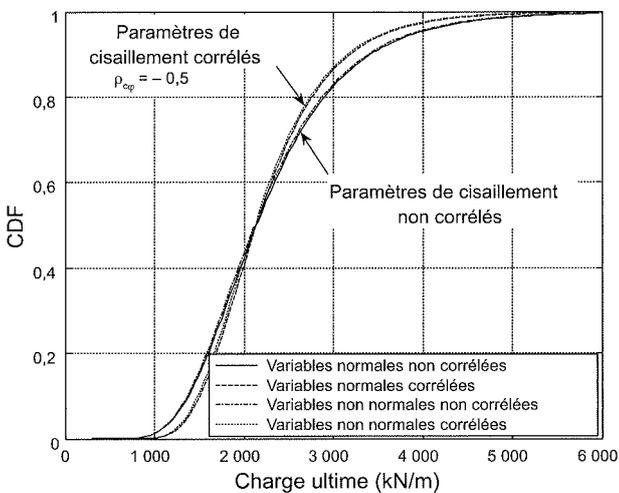


FIG. 10 Comparaison des fonctions de répartition (CDF) de la charge ultime pour des variables normales, non normales, corrélées et non corrélées.

Comparison of the cumulative distribution functions (CDF) of the ultimate footing load for normal, non-normal, correlated and uncorrelated variables.

La figure 11 présente la densité de probabilité (PDF) correspondant à la fonction de répartition (CDF) de la figure 10 pour des variables normales non corrélées obtenues à partir de l'approximation FORM et son ajustement selon des lois empiriques existantes (lois normale, lognormale et Gamma) ayant la même moyenne et le même écart-type. On remarque que la distribution de la charge ultime est asymétrique et non normale même pour le cas des variables normales. Le mode (i.e. la valeur de la charge ultime correspondant à la valeur maximale de la densité) est plus petit que la charge ultime déterministe calculée pour les valeurs moyennes de c et ϕ . Il a été montré aussi par des courbes similaires à la figure 11, mais qui ne sont pas présentées dans cet article, que la loi lognormale est celle qui ajuste au mieux la densité de la charge ultime pour les quatre combinaisons d'hypothèses de variables normales, non normales, corrélées et non corrélées.

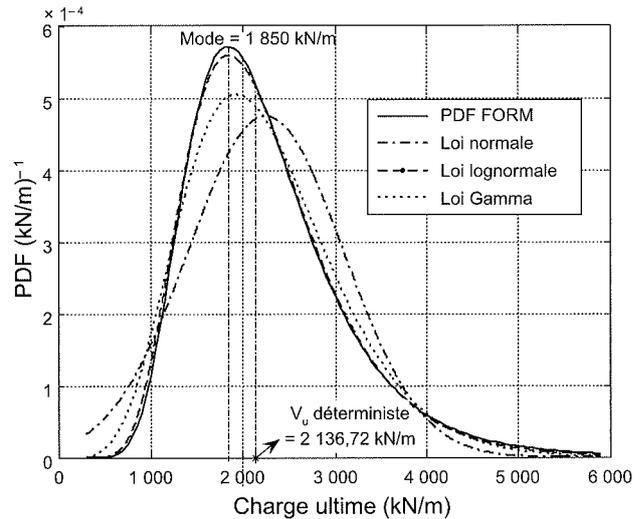


FIG. 11 Densités de probabilité (PDF) de la charge ultime pour le cas des variables normales non corrélées.

Probability density functions (PDF) of the ultimate footing load for the case of normal and uncorrelated variables.

4.1.6

Effet du coefficient de variation des variables aléatoires sur la fonction de répartition de la charge ultime

La figure 12 présente l'effet du coefficient de variation des propriétés de cisaillement du sol sur la fonction de répartition de la charge ultime. Un faible changement dans le coefficient de variation de ϕ affecte de manière significative la distribution de la charge ultime. Par contre, cette distribution est peu sensible à la variabilité de la cohésion. En conclusion, plus l'incertitude sur ϕ est importante, plus la fonction de répartition de la portance est étendue, ce qui correspond à un fort coefficient de variation de la charge ultime. Ceci signifie aussi que la détermination précise des incertitudes de l'angle de frottement interne ϕ est très importante pour l'obtention de résultats probabilistes fiables, l'incertitude de c pouvant être négligée.

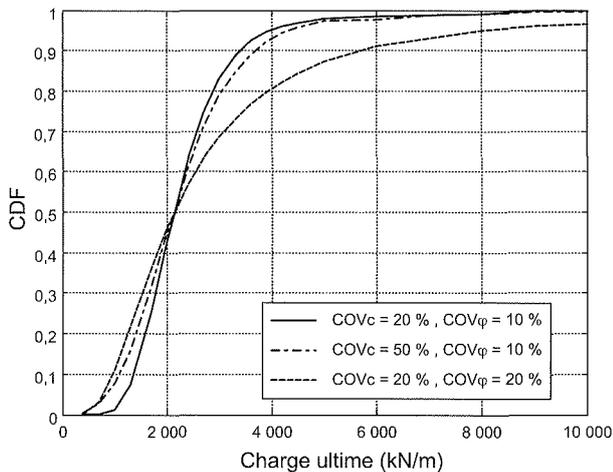


FIG. 12 Comparaison des fonctions de répartition (CDF) de la charge ultime pour différentes valeurs des coefficients de variation des variables aléatoires.

Comparison of the cumulative distribution functions (CDF) of the ultimate footing load for different values of the coefficients of variation of the random variables.

4.1.7

Dimensionnement fiabiliste

L'approche classique utilisée pour le dimensionnement des fondations superficielles consiste à fixer un facteur de sécurité cible (généralement $F_p = 3$) et à déterminer la largeur B de la fondation. Dans ce paragraphe, un dimensionnement fiabiliste (*Reliability Based Design, RBD*) est présenté. Il consiste à calculer B pour un indice de fiabilité cible de 3,8 comme suggéré par l'Eurocode 7 pour les états limites ultimes

(Calgaro, 1996). La figure 13 présente la largeur fiabiliste de la fondation pour différentes valeurs des coefficients de variation des propriétés de cisaillement du sol et de leur coefficient de corrélation. Cette figure présente aussi la largeur déterministe de la fondation correspondant à un facteur de sécurité de 3 et calculée sur la base des valeurs moyennes des paramètres de cisaillement du sol. La largeur fiabiliste de la fondation décroît avec l'augmentation de la corrélation négative des propriétés de cisaillement et la diminution de leurs coefficients de variation. La largeur déterministe de la fondation peut ainsi surestimer ou sous-estimer la largeur fiabiliste suivant les valeurs utilisées pour les incertitudes. Pour de grandes valeurs des coefficients de variation et de petites valeurs du coefficient de corrélation, la largeur de la fondation déterminée pour des variables *normales* est supérieure à celle calculée pour des variables *non normales*. Ceci signifie que l'hypothèse de variables *normales* est conservative par rapport à celle de variables *non normales*.

Contrairement à l'Eurocode 7 qui préconise des valeurs constantes des facteurs de sécurité partiels F_c et F_ϕ , le présent dimensionnement fiabiliste (RBD) a l'avantage de fournir des valeurs différentes de ces facteurs suivant la variabilité du sol. Ces facteurs sont optimaux et déterminés rigoureusement par une maximisation de la probabilité de défaillance pour une variabilité donnée du sol. Un dimensionnement fiabiliste a ainsi le mérite de trouver de façon automatique les facteurs de sécurité partiels les plus probables sans se baser sur des valeurs constantes imposées de ces facteurs. Ceux-ci dépendent des hypothèses de modélisation probabiliste (loi de probabilité et corrélation entre variables aléatoires). Par conséquent, ils apportent une information bien plus riche qu'un facteur de sécurité déterministe.

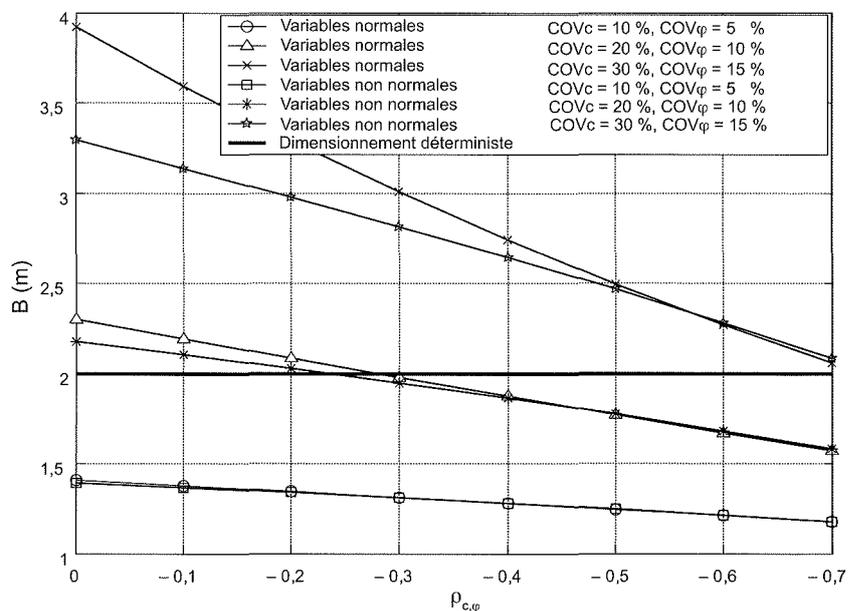


FIG. 13 Comparaison entre les dimensionnements fiabiliste et déterministe pour le cas d'un chargement vertical centré.

Comparison between deterministic and probabilistic designs for the case of a central footing load.

Résultats du chargement sismique pseudo-statique (mécanisme M2)

Le nombre n des blocs rigides utilisés pour le mécanisme M2 est égal à douze puisqu'un nombre plus grand améliore (*i.e.* réduit) la solution optimale de moins de 0,5 %. L'angle de frottement δ au niveau de l'interface sol-fondation est supposé égal à $2\varphi/3$.

Lors de l'étude du mécanisme M1, les facteurs d'omission (Tableau I) et les courbes de la figure 12 ont montré que la fiabilité d'une fondation soumise à une charge verticale centrée est beaucoup plus sensible à une variation de l'angle de frottement interne du sol qu'à une variation de la cohésion. En conséquence, pour le chargement sismique, seuls l'angle de frottement interne φ et le coefficient sismique horizontal K_h sont modélisés par des variables aléatoires. L'angle de frottement interne du sol est supposé suivre une loi Bêta. Les mêmes paramètres statistiques utilisés dans le cas du chargement vertical centré sont considérés ici. Une distribution de probabilité exponentielle (Exp D) et une distribution extrême du type II (EVD) sont utilisées pour le coefficient sismique (Haldar et Mahadevan, 2000). La valeur moyenne du coefficient sismique horizontal est supposée égale à 0,15.

4.2.1

Indices de fiabilité, points de conception et facteurs d'omission

Dans le cas d'un chargement sismique, deux modes de rupture peuvent se développer : le poinçonnement du sol et le glissement de la fondation par rapport au sol sous-jacent. Par conséquent, deux valeurs de l'indice de fiabilité correspondant aux deux modes de rupture sont déterminées.

Les tableaux III et IV présentent les résultats fiabilistes [*i.e.* l'indice de fiabilité de chaque mode de rupture, les points de conception correspondants (φ^* , K_h^*), les facteurs d'omission, la probabilité de défaillance et l'indice de fiabilité du système] pour différentes valeurs de la charge appliquée V et pour les deux types de distribution de K_h . La probabilité de défaillance du système poinçonnement-glissement est déterminée en utilisant l'équation suivante :

$$P_{f_{\text{sys}}} = P_f(P \cup S) = P_f(P) + P_f(S) - P_f(P \cap S) \quad (17)$$

où $P_f(P \cap S)$ est la probabilité de défaillance de l'intersection des deux modes de rupture par poinçonnement et par glissement ; $P_f(P)$ et $P_f(S)$, les probabilités correspondant au mode de poinçonnement et de glissement respectivement. La probabilité de défaillance de l'intersection est déterminée par les bornes en approximation de premier ordre (Lemaire, 2005) :

$$\max [P(A), P(B)] \leq P_f(P \cap S) \leq P(A) + P(B) \quad (18)$$

où

$$P(A) = \Phi(-\beta_p) \Phi\left(-\frac{\beta_s - \rho_{ps}\beta_p}{\sqrt{1-\rho_{ps}^2}}\right) \quad (19)$$

$$P(B) = \Phi(-\beta_s) \Phi\left(-\frac{\beta_p - \rho_{ps}\beta_s}{\sqrt{1-\rho_{ps}^2}}\right) \quad (20)$$

$$\rho_{ps} = \langle \alpha_p \rangle \langle \alpha_s \rangle \quad (21)$$

Dans ces formules, β_p et β_s sont les indices de fiabilité correspondant aux modes de poinçonnement et de glissement respectivement ; ρ_{ps} , la corrélation entre les deux modes de rupture ; α_p et α_s , les vecteurs des indices de sensibilité pour les modes de poinçonnement et de glissement. Ils sont définis comme suit (cf. équations 6 et 7) :

$$\alpha_p = -\frac{\partial \beta_p}{\partial u_p} \bigg|_{\{u_p^*\}} = -\frac{u_p^*}{\beta_p} \quad (22)$$

$$\alpha_s = -\frac{\partial \beta_s}{\partial u_s} \bigg|_{\{u_s^*\}} = -\frac{u_s^*}{\beta_s} \quad (23)$$

où u_p^* et u_s^* sont les valeurs des variables aléatoires standard non corrélées aux points de conception pour les deux modes de rupture. L'équation (18) est applicable dans le cas où $\rho_{ps} > 0$. Si $\rho_{ps} < 0$, les bornes de premier ordre de la probabilité de l'intersection sont données par :

$$0 \leq P_f(P \cap S) \leq \min [P(A), P(B)] \quad (24)$$

Afin d'obtenir la valeur la plus critique de la probabilité de défaillance du système $P_{f_{\text{sys}}}$, la probabilité de l'intersection est considérée égale à sa borne inférieure. L'indice de fiabilité du système est calculé par la méthode FORM :

$$\beta_{\text{sys}} = -\Phi^{-1}(P_{f_{\text{sys}}}) \quad (25)$$

Pour les deux modes, l'indice de fiabilité décroît avec l'augmentation de la charge verticale V . On remarque que la valeur de l'indice de fiabilité du système est très proche de la valeur minimale des deux modes (cf. la dernière colonne des tableaux III et IV). On peut conclure qu'un seul mode de rupture est prédominant dans le calcul de la probabilité de défaillance du système. Pour des faibles valeurs de la charge appliquée, le mode de glissement est dominant. Quand la charge appliquée augmente, le mode de poinçonnement devient le plus critique.

Les valeurs des facteurs d'omission montrent que, pour le mode de glissement, l'hypothèse consistant à considérer φ comme une variable aléatoire a un effet mineur sur la valeur de l'indice de fiabilité puisque $\gamma(u_\varphi) \approx 1$ pour les deux types de distributions (*i.e.* Exp D et EVD). Ces résultats sont aussi valides pour le mode de poinçonnement quand la charge appliquée est relativement faible par rapport à la charge ultime déterministe. D'un autre côté, l'incertitude sur le coefficient sismique a un effet significatif sur l'indice de fiabilité pour les deux modes de poinçonnement et de glissement. Par conséquent, pour les faibles valeurs de la charge appliquée pour lesquelles le mode de glissement est dominant, on peut négliger l'incertitude sur φ . Par contre, pour les grandes valeurs de la charge appliquée où le mode de poinçonnement est dominant, la prise en compte des incertitudes de l'angle de frottement et du coefficient sismique est nécessaire dans l'analyse fiabiliste.

4.2.2

Probabilité de défaillance du système

La figure 14 présente la variation de la probabilité de défaillance du système avec la charge verticale appliquée exprimée sous forme adimensionnelle

TABEAU III Résultats probabilistes pour la loi de distribution exponentielle (ExpD) de K_h .
Probabilistic results for the exponential distribution (ExpD) of K_h .

V (kN/m)	Poinçonnement					Glissement					Fiabilité du système	
	φ^*	K_h^*	β_{HL}	$\gamma(\mu_\varphi)$	$\gamma(\mu_{K_h})$	φ^*	K_h^*	β_{HL}	$\gamma(\mu_\varphi)$	$\gamma(\mu_{K_h})$	$P_{r,sys}$ (%)	β_{sys}
200	28,58	0,70	2,44	1,02	2,03	29,37	0,48	1,76	1,01	2,82	3,87	1,76
450	28,77	0,45	1,71	1,03	2,62	29,39	0,41	1,53	1,01	3,24	6,52	1,51
700	28,84	0,32	1,25	1,06	1,95	29,40	0,39	1,46	1,01	3,40	11,45	1,20
1 000	29,01	0,22	0,80	1,09	1,34	29,40	0,38	1,42	1,02	3,49	21,41	0,79
1 300	29,40	0,15	0,37	1,20	0,47	29,41	0,38	1,40	1,01	3,54	35,33	0,38
1 600	30,01	0,10	0,00	-	-	29,41	0,37	1,39	1,01	3,57	50,00	0,00

TABEAU IV Résultats probabilistes pour la loi de distribution extrême quand $COV_{K_h} = 40\%$.
Probabilistic results for the extreme value distribution (EVD) of K_h when $COV_{K_h} = 40\%$.

V kN/m	Poinçonnement					Glissement					Fiabilité du système	
	φ^*	K_h^*	β_{HL}	$\gamma(\mu_\varphi)$	$\gamma(\mu_{K_h})$	φ^*	K_h^*	β_{HL}	$\gamma(\mu_\varphi)$	$\gamma(\mu_{K_h})$	$P_{r,sys}$ (%)	β_{sys}
200	28,86	0,71	3,22	1,02	1,54	29,01	0,48	2,71	1,01	1,83	0,34	2,71
450	28,08	0,44	2,65	1,02	1,69	28,94	0,41	2,48	1,01	2,00	0,68	2,47
700	26,9	0,27	2,05	1,10	1,18	28,89	0,39	2,40	1,01	2,07	2,27	2,01
1 000	27,08	0,16	1,11	1,45	0,97	28,86	0,37	2,36	1,01	2,10	13,63	1,10
1 300	29,15	0,14	0,31	2,18	0,54	28,84	0,37	2,34	1,01	2,12	0,38	0,31
1 450	30,0	0,13	0,00	-	-	28,83	0,37	2,33	1,01	2,13	50,00	0,00

$V / (\gamma \cdot B^2)$. La probabilité de défaillance du système augmente avec l'augmentation de la charge verticale appliquée. Ceci est dû au fait que la charge horizontale est linéairement dépendante de la charge verticale (i.e. $H = K_h V$). Les deux chargements augmentent dans un même sens favorisant ainsi la rupture soit par poinçonnement, soit par glissement. Par conséquent, la probabilité de défaillance augmente avec la charge verticale appliquée. Deux régions peuvent être identifiées dans la figure 14 : une zone où le glissement domine et une autre où le poinçonnement est le plus critique. On peut noter aussi que l'hypothèse d'une loi de distribution exponentielle pour le coefficient sismique est très conservatrice par rapport à une loi de distribution extrême de type II et aboutit à des dimensions de la fondation très largement surestimées.

4.2.3

Effet du coefficient de variation et des lois de distribution du coefficient sismique sur la fonction de répartition des facteurs de sécurité

Les figures 15 et 16 présentent les fonctions de répartition (CDF) des facteurs de sécurité F_p et F_s obtenues par l'approximation FORM pour la loi de distribution exponentielle et pour différentes valeurs du coefficient de variation de la loi de distribution extrême du type II. Le choix de la loi de distribution de probabilité

de K_h affecte largement la fonction de répartition des facteurs de sécurité. Une très large dispersion est obtenue quand on considère une loi exponentielle pour le coefficient sismique surtout pour le cas du facteur de sécurité vis-à-vis du glissement.

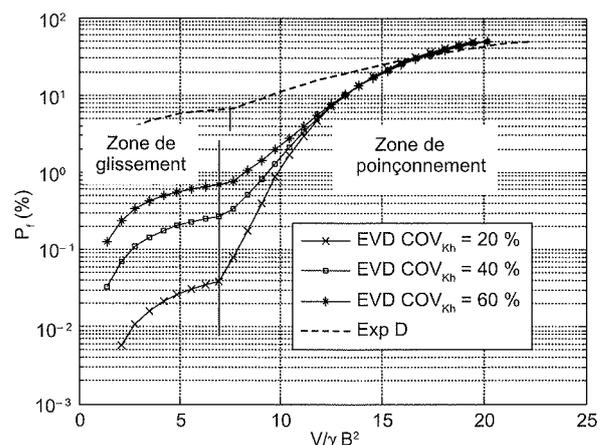


FIG. 14 Probabilité de défaillance du système en fonction de $V / (\gamma \cdot B^2)$.
System failure probability versus $V / (\gamma \cdot B^2)$.

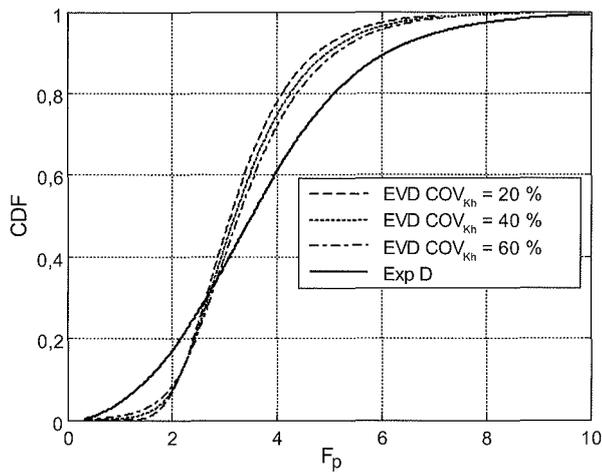


FIG. 15 Fonctions de répartition (CDF) du facteur de sécurité pour le poinçonnement ($V = 450$ kN/m).
Cumulative distribution functions (CDF) of punching safety factor ($V = 450$ kN/m).

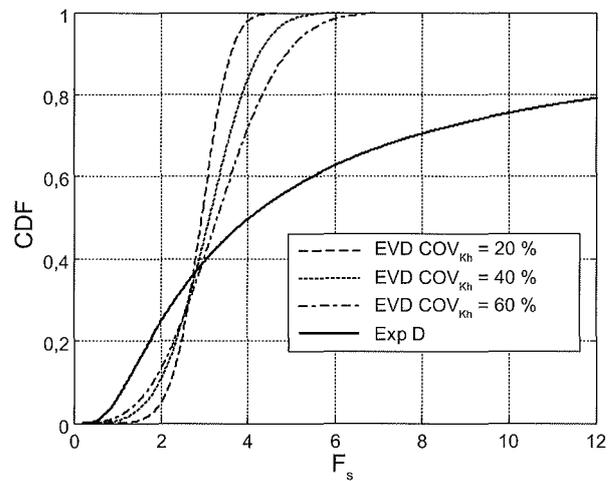


FIG. 16 Fonctions de répartition (CDF) du facteur de sécurité pour le glissement ($V = 450$ kN/m).
Cumulative distribution functions (CDF) of sliding safety factor ($V = 450$ kN/m).

4.2.4

Ajustement des distributions des facteurs de sécurité selon une loi de distribution empirique

Les figures 17 et 18 illustrent les densités de probabilité (PDF) correspondant aux fonctions de répartition (CDF) des figures 15 et 16 pour le cas d'une distribution du type extrême pour K_h et un coefficient de variation de 40 %. Ces figures présentent aussi l'ajustement de ces fonctions selon des lois de distribution empiriques existantes (lois normale, lognormale et Gamma) ayant la même moyenne et le même écart-type. La loi lognormale ajuste au mieux la distribution de probabilité du facteur de sécurité F_p (Fig. 17). En revanche, pour le facteur de sécurité F_s , une distribution symétrique est obtenue. La loi normale ajuste au mieux cette distribution (Fig. 18).

4.2.5

Dimensionnement fiabiliste

Pour le dimensionnement d'une fondation soumise à une charge verticale et située dans une zone sismique, une probabilité de défaillance cible de 1 % a été utilisée. La figure 19 décrit la largeur fiabiliste de la fondation pour une distribution extrême du type II de K_h et pour différentes valeurs du coefficient de variation de K_h . La largeur déterministe correspondant à un facteur de sécurité vis-à-vis du poinçonnement de 3, et pour laquelle le facteur de sécurité vis-à-vis du glissement est supérieur à 2, est aussi présentée. La charge verticale appliquée est de 700 kN/m. La largeur fiabiliste de la fondation croît avec l'augmentation du coefficient de variation de K_h . Elle peut dépasser la valeur déterministe pour de grandes valeurs du coefficient de variation de K_h .

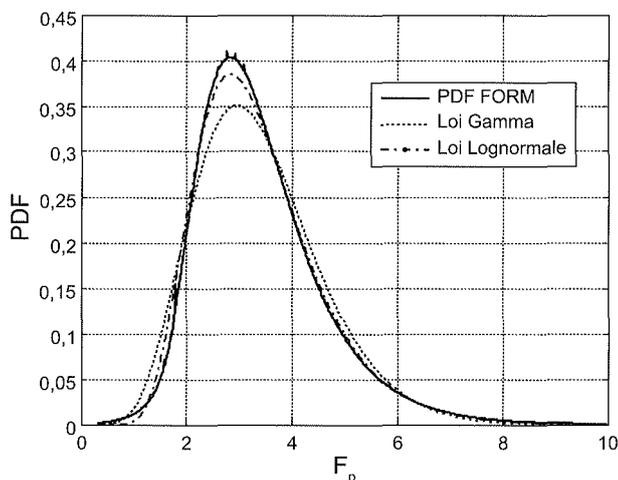


FIG. 17 Densités de probabilité (PDF) de F_p pour le cas d'un chargement sismique.
Probability density functions (PDF) of F_p for the seismic loading case.

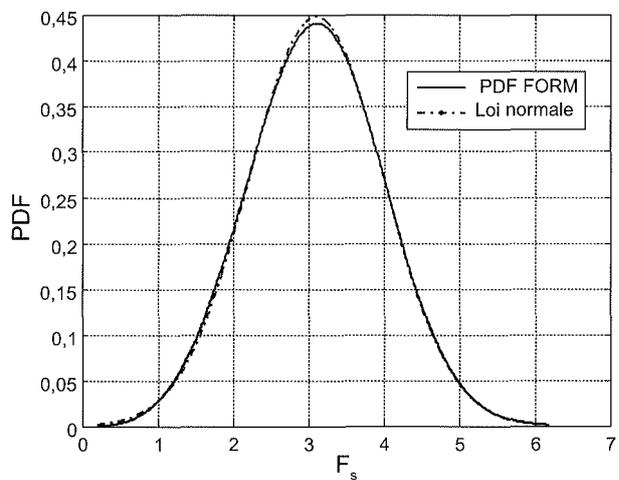


FIG. 18 Densités de probabilité (PDF) de F_s pour le cas d'un chargement sismique.
Probability density functions (PDF) of F_s for the seismic loading case.

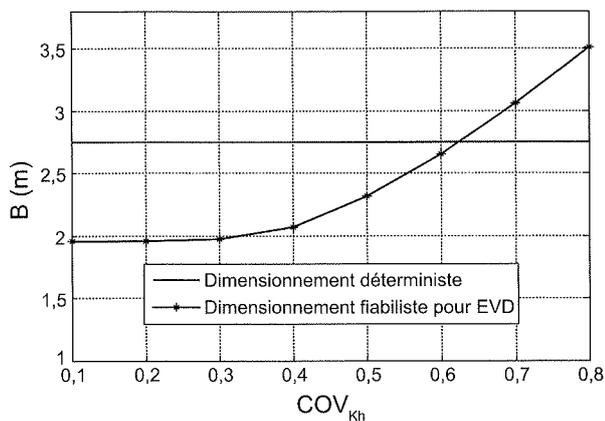


FIG. 19 Comparaison entre les dimensionnements déterministe et fiabiliste pour le cas d'un chargement sismique.

Comparison between deterministic and probabilistic designs for the seismic loading case.

5

Conclusion

Une analyse et un dimensionnement fiabilistes d'une fondation superficielle filante ont été réalisés. La fondation était chargée verticalement, soumise ou non à un chargement sismique pseudo-statique. Deux modèles déterministes rigoureux, basés sur deux mécanismes de ruine en analyse limite, ont été utilisés. Pour le cas d'un chargement vertical centré sans présence de séisme, le mode de rupture par poinçonnement du sol a été considéré. Cependant, pour le cas d'une fondation chargée verticalement et située dans une zone sismique, les modes de poinçonnement du sol et de glissement de la fondation le long de l'interface sol-fondation, ont été étudiés. Les paramètres de cisaillement du sol et le coefficient sismique ont été modélisés par des variables aléatoires. La distribution de probabilité de la cohésion a été supposée normale ou lognormale et celle de l'angle de frottement interne normale ou de distribution Bêta. La distribution de probabilité du coefficient sismique a été choisie exponentielle ou extrême du type II. L'indice de fiabilité de Hasofer-Lind a été adopté et la probabilité de défaillance calculée en utilisant l'approximation FORM. Une analyse de sensibilité a été effectuée et un dimensionnement fiabiliste présenté. Les conclusions de ces études peuvent être résumées comme suit.

Il a été montré que les valeurs de l'indice de fiabilité sont des majorants. Aussi, l'indice de fiabilité calculé

en se basant sur la surface de rupture probabiliste est plus petit (*i.e.* plus critique) que celui déterminé en utilisant la surface de rupture déterministe.

Les résultats correspondant au chargement vertical centré (mécanisme M1) pour les quatre combinaisons d'hypothèses de variables normales, non normales, non corrélées et corrélées ont démontré que l'indice de fiabilité décroît avec l'augmentation de la charge appliquée V . L'hypothèse de paramètres de cisaillement de sol non corrélés est conservatrice par rapport à celle des paramètres corrélés négativement. Par conséquent, la corrélation négative augmente la fiabilité de la fondation. L'analyse de sensibilité a souligné que l'effet des incertitudes de l'angle de frottement interne sur l'indice de fiabilité est beaucoup plus prononcé que l'effet des incertitudes de la cohésion, particulièrement pour les cas des variables *non normales*. Un dimensionnement fiabiliste a aussi été effectué. La largeur probabiliste de la fondation décroît avec l'augmentation de la corrélation négative des propriétés de cisaillement et la diminution de leurs coefficients de variation. La largeur déterministe de la fondation peut donc surestimer ou sous-estimer la largeur probabiliste suivant les valeurs utilisées des incertitudes. Il a été également établi qu'un dimensionnement fiabiliste permet de trouver de façon automatique les facteurs de sécurité partiels les plus probables sans se baser sur des valeurs constantes imposées de ces facteurs. Ceux-ci dépendent d'hypothèses de modélisation probabiliste (loi de probabilité et corrélation entre variables aléatoires). Par conséquent, ils apportent une information plus riche qu'un facteur de sécurité déterministe.

Pour les résultats du chargement sismique pseudo-statique (mécanisme M2), plusieurs conclusions ont été tirées. Pour les deux modes de glissement et de poinçonnement, l'indice de fiabilité décroît avec l'augmentation de la charge verticale V . Un seul mode de rupture (soit le glissement de la fondation, soit le poinçonnement du sol) était prédominant dans la détermination de la probabilité de défaillance du système. Pour de faibles valeurs de la charge appliquée, le mode de glissement est dominant. Quand la charge appliquée augmente, le mode de poinçonnement devient le plus critique. L'hypothèse d'une loi de distribution exponentielle pour le coefficient sismique est beaucoup plus conservatrice que celle d'une loi de distribution extrême de type II. Les valeurs des facteurs d'omission ont montré que, pour des faibles valeurs de la charge appliquée pour lesquelles le mode de glissement est dominant, on peut négliger la variabilité de ϕ . En revanche, pour de grandes valeurs de la charge appliquée où le mode de poinçonnement est dominant, les variabilités de l'angle de frottement et du coefficient sismique doivent être prises en compte dans l'analyse fiabiliste.

Enfin, il est à mentionner ici que seul l'état limite ultime de portance du sol a été étudié. L'étude de l'état limite de service fera l'objet de travaux futurs.

Bibliographie

- Calgario J.-A. – *Introduction aux Eurocodes. Sécurité des constructions et bases de la théorie de la fiabilité*. Presses de l'ENPC, 1996, 200 p.
- Caquot A. – *Équilibre des massifs à frottement interne. Stabilité des sols pulvérulents et cohérents*. Gauthier-Villars, 1934.
- Cherubini C. – Reliability evaluation of shallow foundation bearing capacity on c' , ϕ soils. *Canadian Geotechnical Journal*, vol. 37, 2000, p. 264-269.
- Christian J., Ladd C., Baecher G. – Reliability applied to slope stability analysis. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE*, vol. 120, n° 12, 1994, p. 2180-2207.
- Ditlevsen O. – *Uncertainty Modelling : With Applications to Multidimensional Civil Engineering Systems*. McGraw-Hill, New York, 1981, 412 p.
- Eurocode 7. *Calcul géotechnique*. XP ENV 1997-1.
- Fenton G.A., Griffiths D.V. – Probabilistic foundation settlement on spatially random soil. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE*, vol. 128, n° 5, 2002, p. 381-390.
- Fenton G.A., Griffiths D.V. – Bearing capacity prediction of spatially random c - ϕ soils. *Canadian Geotechnical Journal*, vol. 40, 2003, p. 54-65.
- Fenton G.A., Griffiths D.V. – Three-Dimensional probabilistic foundation settlement. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE*, vol. 131, n° 2, 2005, p. 232-239.
- Griffiths D.V., Fenton G.A. – Bearing capacity of spatially random soil : the undrained clay Prandtl problem revisited. *Géotechnique*, vol. 51, n° 4, 2001, p. 351-359.
- Griffiths D.V., Fenton G.A., Manoharan N. – Bearing capacity of rough rigid strip footing on cohesive soil : Probabilistic study. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE*, vol. 128, n° 9, 2002, p. 743-755.
- Haldar A., Mahadevan S. – *Probability, reliability and statistical methods in Engineering Design*. John Wiley, New York, 2000, 304 p.
- Harr M.E. – *Reliability-based design in civil engineering*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1987, 290 p.
- Hasofer A.M., Lind N.C. – Exact and invariant second-moment code format. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, vol. 100, n° 1, 1974, p. 11-121.
- Lemaire M. – *Fiabilité des structures*. Hermès, Lavoisier, Paris, 2005, 506 p.
- La Borderie C., Breyse D. – Étude du tassement différentiel sur sols hétérogènes. *Revue européenne de génie civil, REGC*, vol. 11, n° 4, 2007.
- Low B.K. – Reliability analysis of rock wedges. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE*, vol. 123, n° 6, 1997, p. 498-505.
- Low B.K. – Reliability-based design applied to retaining walls. *Géotechnique*, vol. 55, n° 1, 2005, p. 63-75.
- Low B.K., Tang W.H. – Reliability analysis of reinforced embankments on soft ground. *Canadian Geotechnical Journal*, vol. 34, 1997a, p. 672-685.
- Low B.K., Tang W.H. – Efficient reliability evaluation using spreadsheet. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, vol. 123, 1997b, p. 749-752.
- Low B.K., Tang W.H. – Probabilistic slope analysis using Janbu's generalized procedure of slices. *Computers & Geotechnics*, vol. 21, n° 2, 1997c, p. 121-142.
- Low B.K., Tang W.H. – Reliability analysis using object-oriented constrained optimization. *Structural Safety*, vol. 26, 2004, p. 68-89.
- Low B.K., Phoon K.K. – Practical first-order reliability computations using spreadsheet. *Proc. Probabilistics in Geotechnics, Technical and Economic Risk Estimation*, Graz, September 15-19, 2002, p. 39-46.
- Lumb P. – Safety factors and the probability distribution of soil strength. *Canadian Geotechnical Journal*, vol. 7, 1970, p. 225-242.
- Melchers R.E. – *Structural Reliability: Analysis and Prediction*. Ellis Horwood Ltd., Chichester, U. K., 1999, 437 p.
- Phoon K.-K., Kulhawy F H. – Evaluation of geotechnical property variability. *Canadian Geotechnical Journal*, vol. 36, 1999, p. 625-639.
- Popescu R., Deodatis G., Nobahar A. – Effect of random heterogeneity of soil properties on bearing capacity. *Probabilistic Engineering Mechanics*, vol. 20, 2005, p. 324-341.
- Przewlocki J. – A stochastic approach to the problem of bearing capacity by the method of characteristics. *Computers & Geotechnics*, vol. 32, 2005, p. 370-376.
- Soubra A.-H. – Upper-bound solutions for bearing capacity of foundations. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE*, vol. 125, n° 1, 1999, p. 59-68.
- Soubra A.-H., Youssef Abdel Massih D.S. – Analysis and design of footings on spatially random soils. *Géotechnique, ICE*, 2010.
- Wolff T.H. – *Analysis and design of embankment dam slopes : a probabilistic approach*. Ph. D. thesis, Purdue University, Lafayette, Ind., 1985.
- Yuceman M.S., Tang W.H., Ang A.H.S. – A probabilistic study of safety and design of earth slopes. *Civil Engineering Studies, Structural Research Series 402*, University of Illinois, Urbana, 1973.
- Youssef Abdel Massih D.S. – *Analyse du comportement des fondations superficielles filantes par des approches fiabilistes*. Thèse de doctorat, université de Nantes, 2007, 269 p.
- Youssef Abdel Massih D.S., Soubra A.-H. – Reliability-based analysis of strip footings using response surface methodology. *International Journal of Geomechanics, ASCE*, vol. 8, n° 2, 2008, p. 134-143.
- Youssef Abdel Massih, D.S., Soubra, A.-H., Low B.K. – Reliability-based analysis and design of strip footings against bearing capacity failure. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE*, vol 134, n° 7, 2008, p. 917-928.