

Éléments joints dans le code CESAR-LCPC. Application aux milieux fracturés, fissurés et aux problèmes d'interface

A. POUYA

F. ELMI

E. BOURGEOIS

P. BÉMANI YAZDI

Laboratoire Central
des Ponts et Chaussées
58, bd Lefebvre
75732 Paris Cedex 15
pouya@lcpc.fr

Résumé

Les discontinuités des géomatériaux (fissures, fractures ou joints dans les massifs rocheux), peuvent être prises en compte dans une modélisation par éléments finis au moyen d'éléments « joints ». Il s'agit d'éléments à épaisseur nulle proposés initialement par Goodman *et al.* (1968). Des éléments joints à quatre nœuds ont été introduits dans le code CESAR-LCPC. Ces éléments permettent de prendre en compte un comportement élastique non linéaire ou un comportement élastoplastique avec plasticité parfaite obéissant au critère de Mohr-Coulomb. Des exemples d'application de ce modèle à la stabilité des massifs rocheux et à l'homogénéisation du comportement des roches fissurées sont donnés. L'extension à un comportement endommageable est en cours.

Mots-clés : fissures, fractures, éléments finis, plasticité, massifs rocheux, homogénéisation.

Joint Elements in the Finite Element code CESAR-LCPC. Application to fractured media and to interface problems

Abstract

Discontinuities such as cracks, fractures or joints in rockmasses can be taken into account in finite element simulations by introducing so-called joint elements. These are zero thickness elements first introduced by Goodman *et al.* (1968). Four nodes joint elements have been implemented in the Finite Element code CESAR-LCPC. Non-linear elasticity or elasto-plasticity with the Mohr-Coulomb criterion are available for the joint elements. Applications of the numerical tool to the stability of fractured rockmasses and to homogenization of elastic behaviour of micro-cracked rocks are given. Extension of this work to constitutive laws integrating damage is under progress.

Key words: cracks, fractures, finite element, plasticity, rockmasses, homogenization.

NDLR : Les discussions sur
cet article sont acceptées
jusqu'au 01/03/2010.

Introduction

Les massifs rocheux sont traversés de failles, fractures, joints et d'autres types de discontinuités qui ont un effet important, voire déterminant, sur leur comportement mécanique. L'étude de la stabilité des talus et déblais rocheux, d'une part, la conception et le dimensionnement des ouvrages de génie civil tels que barrages, tunnels et fondations dans les massifs rocheux, d'autre part, nécessitent la prise en compte des effets des discontinuités et ne peuvent se faire sans intégrer l'effet des fractures et discontinuités. Les discontinuités des massifs rocheux peuvent avoir des origines, natures et propriétés mécaniques très différentes. En laissant de côté les questions liées à leur nature et leur origine géologique, on distingue essentiellement deux types de discontinuités :

- les fractures ouvertes qui constituent de vraies discontinuités matérielles ;
- les zones de contact présentant un remplissage, comme les « joints rocheux », qui résultent du colmatage de fractures, ou les couches minces entre bancs sédimentaires, qui présentent une faible épaisseur (à l'échelle du massif étudié) et une déformabilité qui peut être très grande, en fonction de la nature du matériau de remplissage.

Leur point commun est de constituer des zones de faiblesse mécanique, dont la prise en compte dans les modèles numériques pose des problèmes spécifiques liés à leur épaisseur réduite (généralement négligeable devant la taille du massif étudié). La difficulté consiste à gérer des discontinuités du champ de déplacement, alors que la méthode des éléments finis est *a priori* plutôt destinée à la recherche de fonctions continues vis-à-vis des variables d'espace. Dans les codes de calcul par la méthode des éléments finis, une discontinuité de déplacement peut être introduite grâce aux « éléments joints » introduits par Goodman *et al.* (1968). Il s'agit d'éléments d'épaisseur nulle, utilisés pour modéliser les fractures d'un massif rocheux. Cette approche a été ensuite plusieurs fois améliorée et étendue (Ghaboussi *et al.* 1973, Zienkiewicz *et al.* 1970, Buczkowski et Kleiber 1997). Il est intéressant de noter que, moyennant des « lois de comportement » adéquates, les éléments « joints » permettent de traiter aussi les problèmes d'interface ou de contact. Ces éléments ont été introduits récemment dans une version « recherche » du code de calcul par éléments finis CESAR-LCPC avec des lois de comportement pouvant représenter différents phénomènes physiques. Nous allons décrire ces éléments et les lois de comportement prises en compte ainsi que les applications qu'ils permettent de réaliser.

Phénomènes physiques et modèles mécaniques

Les discontinuités et joints que nous considérons sont des zones de faible épaisseur et de grande déformabilité par rapport au milieu environnant. La grande déformabilité résulte de la faible résistance du matériau de remplissage ou du fait que le joint est vide. Autrement dit, la surface de discontinuité Γ au voisinage de laquelle nous voulons modéliser les déformations peut

correspondre à des réalités physiques différentes : celle des surfaces en contact ou celle des couches minces.

Dans le premier cas, qui comprend par exemple les surfaces de contact entre blocs rocheux ou entre des épontes de fractures non colmatées, la matière peut devenir discontinue : les deux parties du corps en contact sur Γ ont la possibilité de se séparer, ce qui, dans le modèle mécanique, se traduit par une discontinuité de déplacement sur Γ (Fig. 1). Dans le second cas, Γ représente une surface médiane à l'intérieur d'une couche mince de matériau continu compris entre deux surfaces voisines Γ^+ et Γ^- situées à faible distance de part et d'autre de Γ .

Dans le modèle de joint, la distance initiale entre ces deux surfaces est négligée et elles sont confondues avec Γ (ce qui justifie de prendre une épaisseur nulle pour l'élément « joint »). En revanche, l'écart des déplacements entre Γ^+ et Γ^- n'est pas négligeable du fait de la grande déformabilité du matériau de cette couche par rapport au matériau environnant. Cela se traduit donc par une discontinuité de déplacement sur la surface Γ .

Examinons maintenant les contraintes régnant au voisinage de la surface. On note \underline{n} la normale unitaire à Γ au point \underline{x} .

Dans le cas des surfaces de la première catégorie, quand les deux corps sont en contact, le vecteur-contraite $\sigma(\underline{x})\underline{n}$ est continu au passage de Γ . Si les deux corps ne sont pas en contact, ce vecteur est nul sur Γ^+ et Γ^- ainsi que dans l'espace (vide) entre ces deux surfaces.

Pour les surfaces de la seconde catégorie, $\sigma(\underline{x})\underline{n}$ est continu au passage de Γ^- de la matrice vers le joint, et reste également continue au passage de Γ^+ du joint vers la matrice. Par ailleurs, la faible épaisseur du joint fait que la variation $\sigma(\underline{x})\underline{n}$ entre Γ^+ et Γ^- dans le matériau du joint peut être négligée.

Globalement il existe donc une unique valeur de $\sigma(\underline{x})\underline{n}$ qui représente la contrainte normale dans le matériau du joint sur la surface Γ ainsi que la limite quand le point se rapproche du joint de part et d'autre

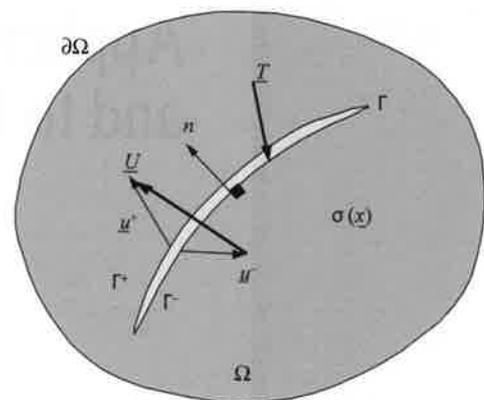


FIG. 1 Surface de discontinuité Γ dans un corps Ω . Le vecteur unitaire \underline{n} est orienté de la lèvre inférieure Γ^- vers la lèvre supérieure Γ^+ . T désigne la densité surfacique de force s'exerçant sur Γ^- .

Discontinuity surface Γ in a body Ω . Unit normal \underline{n} points from the lower border Γ^- to the upper border Γ^+ . T denotes the surface density of force acting on Γ^- .

de la surface Γ . Cette valeur unique de $\sigma(\underline{x}) \cdot \underline{n}$ est appelée vecteur contrainte du joint et notée $\underline{\sigma}$.

L'écart de déplacements entre x^- et x^+ , appelé *déplacement relatif* du joint au point \underline{x} , est noté $\underline{U}(\underline{x})$. La loi de comportement du joint relie le vecteur contrainte $\underline{\sigma}$ et la discontinuité de déplacement \underline{U} .

3

Présentation générale du modèle

Pour les joints présentant un remplissage, le modèle élastique linéaire parfaitement plastique permet une première approximation du comportement mécanique. Cette loi ne prétend pas représenter rigoureusement la réalité, mais constitue une approximation suffisante dans beaucoup d'applications et de ce fait elle est largement utilisée. Nous allons ci-dessous présenter sa forme la plus générale.

3.1

Comportement élastique linéaire

Pour un joint élastique linéaire, on écrit :

$$\underline{\sigma} = \mathbf{K} \cdot \underline{U} \quad (1)$$

où \mathbf{K} est une matrice symétrique et définie positive. Dans un repère ayant \underline{n} pour troisième axe des coordonnées, on peut décomposer $\underline{\sigma}$ et \underline{U} en leurs composantes normales et tangentielles au plan du joint :

$$\sigma_n = \underline{\sigma} \cdot \underline{n}, \quad \underline{\tau} = \underline{\sigma} - \sigma_n \underline{n}, \quad U_n = \underline{U} \cdot \underline{n}, \quad \underline{U}_t = \underline{U} - U_n \underline{n} \quad (2)$$

et écrire :

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} \underline{U}_t \\ U_n \end{bmatrix}, \quad \underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \underline{\tau} \\ \sigma_n \end{bmatrix} \quad (3)$$

Et :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_T & \underline{V} \\ \underline{V} & K_{nn} \end{bmatrix} \quad (4)$$

où K_{nn} représente la *raideur normale*, \mathbf{K}_T la *matrice* 2×2 de *raideur dans le plan tangent*, et \underline{V} le *vecteur* 2×1 de couplage entre les composantes normales et tangentielles du déplacement relatif du joint. On peut montrer que ce vecteur est lié à une propriété de dilata-
tance élastique : en effet, si on applique une contrainte de cisaillement pur $\underline{\tau}$ sur le joint et on pose $\sigma_n = 0$, on trouve, d'après (1) et (2), un déplacement relatif \underline{U} du joint dont la composante normale U_n est donnée par :

$$U_n = - \frac{\underline{V} \cdot \mathbf{K}_T^{-1} \cdot \underline{\tau}}{K_{nn} - \underline{V} \cdot \mathbf{K}_T^{-1} \cdot \underline{V}} \quad (5)$$

Cette composante normale, traduisant une dilata-
tance, est non nulle si \underline{V} n'est pas nul. Les deux paramètres formant \underline{V} ne peuvent varier que dans certaines limites. On peut, en particulier, montrer que si la matrice \mathbf{K} est définie-positive, on a alors nécessairement (voir Annexe 1) :

$$\frac{\underline{V} \cdot \mathbf{K}_T^{-1} \cdot \underline{V}}{K_{nn}} < 1 \quad (6)$$

3.2

Comportement élastique linéaire-parfaitement plastique

Dans le formalisme de l'élastoplasticité, on décompose le déplacement relatif \underline{U} en une partie élastique \underline{U}^e et une partie plastique \underline{U}^p . Sous forme incrémentale, le modèle s'écrit :

$$\begin{cases} \underline{\dot{U}} = \underline{\dot{U}}^e + \underline{\dot{U}}^p \\ \underline{\dot{U}}^e = \mathbf{K}^{-1} \cdot \underline{\dot{\sigma}} \\ \underline{\dot{U}}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} \text{ avec } \lambda \geq 0 \text{ et } \lambda = 0 \text{ si } f < 0 \text{ ou si } f = 0 \\ \text{et } \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \cdot \underline{\dot{\sigma}} < 0 \end{cases} \quad (7)$$

Dans ces relations, f représente le critère de plasticité et g le potentiel plastique, tandis que λ désigne le multiplicateur plastique. En pratique, f et g sont des fonctions de la contrainte normale σ_n et de la contrainte de cisaillement sur le joint $\underline{\tau}$.

Pour le modèle de Mohr-Coulomb, avec une loi d'écoulement non associée, les fonctions f et g s'écrivent :

$$f(\underline{\sigma}) = \|\underline{\tau}\| + \sigma_n \tan \phi - C, \quad g(\underline{\sigma}) = \|\underline{\tau}\| + \sigma_n \tan \psi \quad (8)$$

où $\|\cdot\|$ représente la norme euclidienne, ϕ l'angle de frottement, C la cohésion et ψ l'angle de dilata-
tance du joint. On prendra garde qu'il s'agit, ici, d'une dilata-
tance plastique, entièrement indépendante de la dilata-
tance élastique évoquée plus haut.

3.3

Conditions de compatibilité entre dilatances élastique et plastique

On considère un état de contraintes plastiquement admissible obtenu lors d'une procédure de chargement, que l'on note $\underline{\sigma}$. Par hypothèse, il ne peut se produire un écoulement plastique que si $f(\underline{\sigma}) = 0$ et si $(\partial f / \partial \underline{\sigma}) \cdot \underline{K} \cdot \underline{U}$ est positif ou nul. Écrivant alors la condition de cohérence $d f = 0$, on obtient :

$$(\partial f / \partial \underline{\sigma}) \cdot \underline{K} \cdot (\underline{\dot{U}} - \underline{\dot{U}}^p) = 0 \quad (9)$$

et, en utilisant la loi d'écoulement (7c) :

$$\lambda = [(\partial f / \partial \underline{\sigma}) \cdot \underline{K} \cdot \underline{U}] / [(\partial f / \partial \underline{\sigma}) \cdot \underline{K} \cdot (\partial g / \partial \underline{\sigma})] \quad (10)$$

La condition de non-négativité du multiplicateur plastique impose que le dénominateur de cette expression soit positif, ce qui impose la condition suivante sur les valeurs des paramètres ϕ , ψ et \mathbf{K} (la preuve est donnée dans l'annexe 1) :

$$\frac{\underline{V} \cdot \mathbf{K}_T^{-1} \cdot \underline{V}}{K_{nn}} < \frac{4 \tan \phi \tan \psi}{(\tan \phi + \tan \psi)^2} \leq 1 \quad (11)$$

Ainsi un choix particulier de la dilata-
tance élastique (paramètres \underline{V}) induit une condition sur l'angle de dilata-
tance plastique ψ . Cette condition implique que plus $\|\underline{V}\|$ est grand, moins ψ peut s'écarter de ϕ . On remar-
quera en particulier que si $\underline{V} = 0$ (pas de dilata-
tance élastique), la condition (11) est vérifiée pour tout ψ et ϕ . Réciproquement si $\psi = \phi$ (potentiel plastique associé) alors la condition (11) est vérifiée pour toute valeur de \underline{V} respectant (6).

Valeurs des paramètres

Les paramètres de déformabilité et de résistance des joints rocheux sont en général très mal connus et difficilement accessibles par des moyens expérimentaux courants.

Le cas le plus adapté est celui des joints colmatés dont le matériau de remplissage présente une certaine cohésion. En condition bidimensionnelle, les valeurs des paramètres K_{nn} et K_{tt} peuvent alors être obtenues à partir des caractéristiques estimées du matériau de colmatage et de l'ordre de grandeur de l'épaisseur des fissures colmatées. On pourra généralement, faute d'informations particulières, supposer que le couplage associé au vecteur \underline{v} peut être négligé.

En dehors de cette situation, le modèle donne de bons résultats pour des phénomènes physiques divers, moyennant une étude de sensibilité sur les paramètres de rigidité et de résistance du joint.

4

Mise en œuvre numérique (en 2D)

Dans le cas d'un problème en déformation plane, en notant \underline{t} la direction tangente au joint et \underline{n} la direction normale, on écrit :

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} u_t \\ u_n \end{pmatrix}, \quad \underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \tau \\ \sigma_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{tt} & k_{tn} \\ k_{nt} & k_{nn} \end{bmatrix} \quad (12)$$

avec $k_{tn} = k_{nt}$. On note $s = \pm 1$ le signe de τ et on pose :

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} s \\ \tan\phi \end{pmatrix}, \quad \underline{w} = \begin{pmatrix} s \\ \tan\psi \end{pmatrix} \quad (13)$$

Dans ce cadre, l'expression du critère et du potentiel plastique (8) devient :

$$f(\underline{\sigma}) = |\tau| + \sigma_n \tan\phi - C = \underline{v} \cdot \underline{\sigma} - C \quad (14)$$

$$g(\underline{\sigma}) = |\tau| + \sigma_n \tan\psi = \underline{w} \cdot \underline{\sigma} \quad (15)$$

et on obtient :

$$\partial f / \partial \underline{\sigma} = \underline{v}, \quad \partial g / \partial \underline{\sigma} = \underline{w} \quad (16)$$

Lors d'une incrémentation de la charge, au cours d'un calcul par éléments finis, on calcule d'abord un estimateur élastique, noté $\underline{\sigma}$, du nouvel état de contraintes atteint en un point d'un élément. Différentes situations peuvent se présenter :

– si $f(\underline{\sigma}) \leq 0$, le point considéré reste élastique, le multiplicateur plastique est nul et il n'y a pas de déplacement relatif plastique à calculer ;

– si $f(\underline{\sigma}) > 0$, on est amené à calculer une correction $\delta \underline{\sigma}$ de l'état de contraintes, associée à un incrément de déplacement relatif plastique δU^p par $\delta \underline{\sigma} = -\mathbf{K} \cdot \delta U^p$. Le principe du calcul consiste à projeter l'estimateur élastique sur la surface de charge, et le calcul est différent selon que la projection se fait sur les côtés ou sur le sommet du domaine (point A sur la figure 2).

Dans le premier cas (qui correspond au domaine I de la figure 2), la projection sur le critère prend une forme simple et on obtient facilement l'expression du multiplicateur plastique, en écrivant la condition $f(\underline{\sigma} + \delta \underline{\sigma}) = 0$ et en effectuant un développement limité au premier ordre de f au voisinage de $\underline{\sigma}$:

$$\lambda = \frac{f(\underline{\sigma})}{\underline{v} \cdot \mathbf{K} \cdot \underline{w}} \quad (17)$$

Géométriquement, $f(\underline{\sigma})$ s'interprète dans le plan (σ, τ) comme la distance entre l'estimateur élastique et une des droites qui représentent le critère. La formule (17) indique que l'on projette l'estimateur élastique sur cette droite (il ne s'agit pas d'une projection orthogonale, mais d'une projection parallèlement à la direction donnée par $\mathbf{K} \cdot \underline{w}$). Il faut vérifier aussi que le point de projection tombe sur la partie des droites se trouvant à gauche du point A. Autrement dit, le projeté $\underline{\sigma}^p = \underline{\sigma} + \delta \underline{\sigma}$, doit correspondre à une contrainte normale inférieure à $C/\tan\phi$. La condition $\underline{\sigma}_n^p \leq C/\tan\phi$ donne $\underline{\sigma}_n - \lambda(\mathbf{K} \cdot \underline{w})_n \leq C/\tan\phi$. Soit encore :

$$\underline{\sigma}_n - \lambda(k_{nt}s + k_{nn}\tan\psi) \leq C/\tan\phi \quad (18)$$

En remplaçant λ par (17) on trouve :

$$(\underline{\sigma}_n - C/\tan\phi)(k_{tt} + s k_{tn}\tan\psi) - s\tau(s k_{nt} + k_{nn}\tan\psi) \leq 0 \quad (19)$$

Les deux valeurs de $s = \pm 1$ donnent l'équation de deux demi-droites respectivement D^+ et D^- partant du point A sur la figure 2. Le plan (σ_n, τ) est alors partagé en quatre secteurs pour le mode de projection sur le critère : le domaine élastique, les domaines I^+ et I^- se projetant sur la frontière en section régulière par la formule (17), et le domaine II se projetant sur le point A. Pour les points du domaine II, la projection est définie par :

$$\delta \underline{\sigma} = \underline{\sigma} - \underline{\sigma}^A, \quad \delta U^p = -\mathbf{K}^{-1} \cdot \delta \underline{\sigma} \quad (20)$$

On pourra vérifier que, dans ce dernier cas, δU^p ainsi défini appartient bien au cône des normales extérieures au point A.

Finalement, pour un point $\underline{\sigma} = (\sigma_n, \tau)$, on définit deux fonctions σ_1 et σ_2 dépendant de τ par :

$$\sigma_1 = (C - |\tau|) / \tan\phi, \quad \sigma_2 = C/\tan\phi + |\tau| (s k_{nt} + k_{nn}\tan\psi) / (k_{tt} + s k_{tn}\tan\psi) \quad (21)$$

Le procédé de projection sur le critère est donc le suivant :

- si $\sigma_n \leq \sigma_1$, $\delta \underline{\sigma} = 0$ (domaine élastique)
- si $\sigma_1 < \sigma_n \leq \sigma_2$, $\delta \underline{\sigma} = -\lambda \mathbf{K} \cdot \underline{w}$, $\delta U^p = \lambda \underline{w}$ avec λ donné par (17) (domaines I^+ et I^-)
- si $\sigma_n > \sigma_2$, $\delta \underline{\sigma} = \underline{\sigma} - \underline{\sigma}^A$ et $\delta U^p = -\mathbf{K}^{-1} \cdot \delta \underline{\sigma}$ (domaine II)

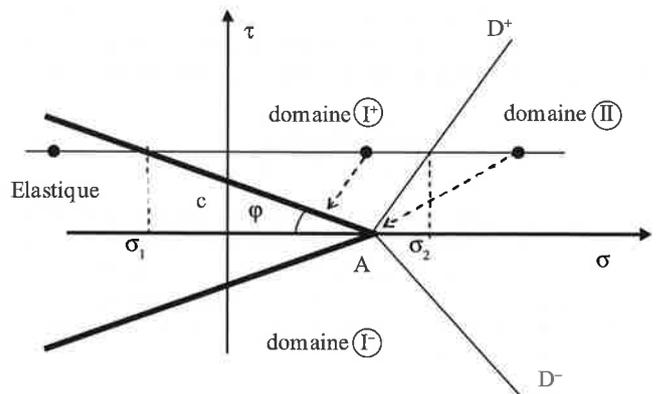


FIG. 2 Méthode de projection sur le critère.
Method of projection on the yield surface.

Application aux massifs rocheux fracturés

Cette section présente un exemple d'application de ce modèle à un problème simple de stabilité de massif rocheux. On présente un modèle bidimensionnel inspiré d'un cas réel d'instabilité due à l'excavation d'un versant rocheux (constitué des foliations des métasédiments) pour construire une autoroute à British Columbia au Canada (Corkum et Martin, 2004). Après une phase de mise en sécurité, cette instabilité a été arrêtée par la mise en place d'un remblai provisoire au pied de la pente dans la zone instable.

Pour analyser l'effet du remblayage provisoire sur la stabilité du massif, nous avons réalisé deux séries d'analyses ; la première correspond à la stabilité du versant après l'excavation et la seconde à celle du versant stabilisé par le remblai placé en pied.

La figure 4 montre la géométrie du modèle. La zone instable comprend quatre blocs séparés par des joints. Le versant comprend deux familles principales de joints ; la famille J1, qui constitue la base du glissement sur une pente vers l'extérieur du versant et la famille J2 qui correspond à des joints sub-verticaux. Afin de modéliser les interactions entre le remblai, la zone instable et le reste du massif, des joints supplémentaires (famille J3) ont été prévus entre le remblai et le massif. Les propriétés des massifs rocheux et ceux des éléments joints sont présentées dans les tableaux I et II respectivement.

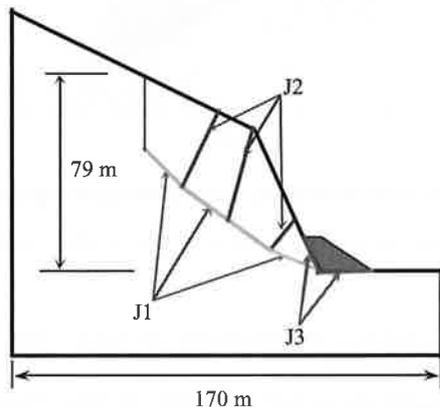


FIG. 3 Géométrie de la zone instable du versant et des différentes familles des joints.
Geometry of the instable zone of the rockslope and of the different families of rock joints.

TABLEAU I Propriétés mécaniques des joints utilisées dans le modèle.
Mechanical properties of the joints in the model.

Joint	k_n (GPa/m)	k_t (GPa/m)	ϕ (deg.)	Modèle constitutif
J1	0,12	0,01	35 (30)	Mohr-Coulomb
J2	0,12	0,01	40	Mohr-Coulomb
J3	2,0	0,2	40	Mohr-Coulomb

TABLEAU II Propriétés mécaniques du massif et du remblai utilisées dans le modèle.
Mechanical properties of the rockmass and embankment used in the model.

Matériau	Poids volumique	E(Mpa)	ν	ϕ (deg.)	Modèle constitutif
Massif rocheux	2 800	39 280	0,16	-	Élastique isotrope
Remblai	2 600	169	0,12	40	Mohr-Coulomb

L'état de contraintes est initialisé en appliquant au modèle le poids volumique du massif, mais avec des caractéristiques élevées pour les joints afin d'éviter tous glissements ou séparations possibles dans la phase de chargement initial liée à la pesanteur. Dans la deuxième phase, les caractéristiques des joints ont été ramenées aux valeurs réelles pour étudier le facteur de sécurité, les champs de déplacement et de contrainte.

Différentes analyses ont été effectuées afin d'étudier l'effet de l'angle de frottement des joints J1 sur le facteur de sécurité mais aussi sur le déplacement total au sommet du versant. La figure 4 compare les résultats obtenus numériquement avec et sans remblai. Le facteur de sécurité calculé est le rapport de l'intégrale des contraintes de cisaillement et de l'intégrale de la résistance au cisaillement sur la base du glissement J1. Le facteur de sécurité diminue presque linéairement avec l'angle de frottement. Le facteur de sécurité est égal à 1 pour un angle de frottement de 35 degrés dans le calcul sans remblai, et de 31 degrés dans le calcul prenant en compte le remblai en pied de versant. Les déplacements augmentent rapidement lorsque l'on s'approche de l'équilibre limite.

Le code permet de calculer le déplacement au niveau des joints, ce qui donne l'allure cinématique du mouvement du versant.

Ainsi ce modèle numérique permet de modéliser l'interaction des blocs rocheux et d'obtenir une estimation du champ des déplacements et des contraintes. Il constitue un moyen relativement simple de prendre en compte l'existence et le rôle mécanique des joints dans la stabilité et le mouvement d'un massif fracturé.

La figure 5 montre la déformée du maillage (en appliquant un facteur d'amplification aux déplacements pour que le résultat soit visible), les vecteurs des déplacements, les contraintes verticales et les contraintes principales pour le versant sans remblai et $\phi = 35$ degrés.

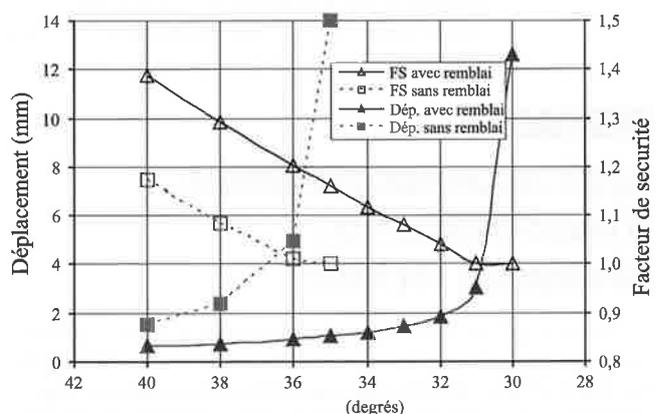


FIG. 4 Facteur de sécurité et déplacement total pour deux cas du versant sans remblai et du versant avec remblai.
Safety factor and total displacement for the cases with and without the embankment.

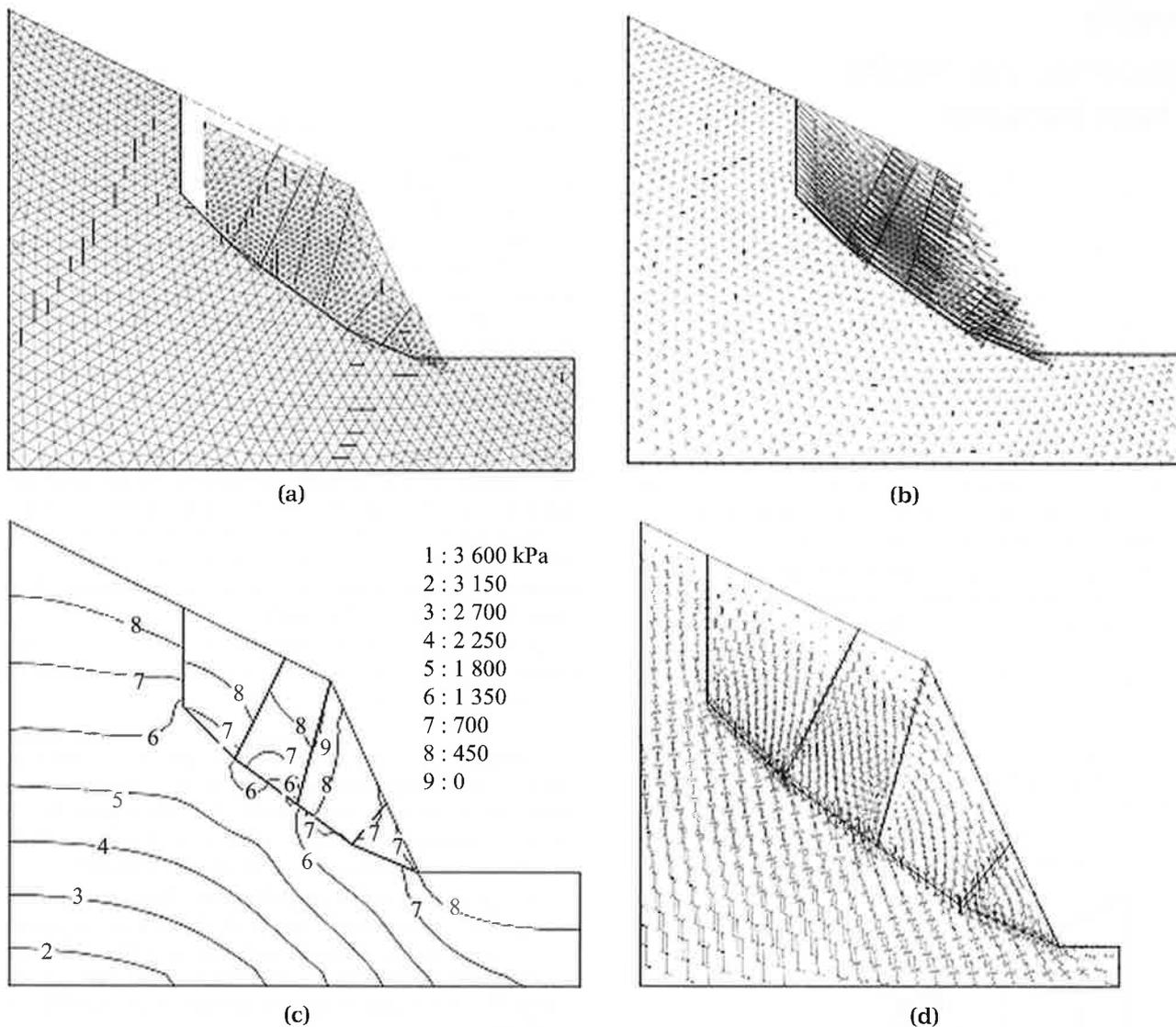


FIG. 3 (a) déformée, (b) vecteurs des déplacements, (c) contraintes verticales et (d) contraintes principales pour le versant sans remblai et $\phi = 35$ degrés.
 (a) deformed mesh, (b) displacement, (c) vertical stress and (d) principal stresses in the rock mass without embankment and with $\phi = 35$ degrees.

6

Application aux problèmes d'homogénéisation des massifs rocheux

Lorsque l'on s'intéresse à un massif rocheux contenant un grand nombre de fractures, il est habituel de recourir à une approche par homogénéisation, dans laquelle on traite le milieu fracturé comme un milieu continu, auquel on attribue des propriétés modifiées (effectives) pour prendre en compte l'effet des discontinuités. Pour les matériaux élastiques on peut citer, parmi d'autres, les travaux de Kachanov (1993) et Tsukrov et Kachanov (2000) et, pour les massifs rocheux fracturés en élasticité et en plasticité, les travaux de Pouya et Ghoreychi (2001) et de Chalhoub (2006).

On présente ici un exemple d'utilisation des éléments joints de CESAR-LCPC pour modéliser un massif rocheux contenant des fractures arbitrairement orientées et calculer le module d'Young effectif du milieu. Les résultats numériques sont comparés à ceux

issus de la méthode analytique proposée par Tsukrov et Kachanov (2000).

Pour calculer la déformation globale d'un milieu élastique fracturé contenant des fractures arbitrairement orientées, Tsukrov et Kachanov (2000) ont proposé l'équation suivante :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{\pi}{E} (\alpha_{ik} \sigma_{kj} + \sigma_{ik} \alpha_{kj}) \quad (22)$$

où α_{ij} est un tenseur symétrique du deuxième ordre relié au nombre et aux caractéristiques géométriques des fractures. Kachanov (1980) a suggéré la relation suivante :

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{A} \sum_k l_k^2 \eta_i^{(k)} \eta_j^{(k)} \quad (23)$$

où A est la superficie du domaine sur lequel on procède au calcul, l_k est la demi-longueur de la $k^{\text{ème}}$ fracture et $\underline{\eta}^{(k)}$ est le vecteur unitaire normal à la $k^{\text{ème}}$ fracture.

On considère ici un massif rocheux carré de 40 m \times 40 m contenant huit fractures de longueurs et d'inclinaisons différentes. La géométrie et les conditions aux limites sont montrées dans la figure 6.

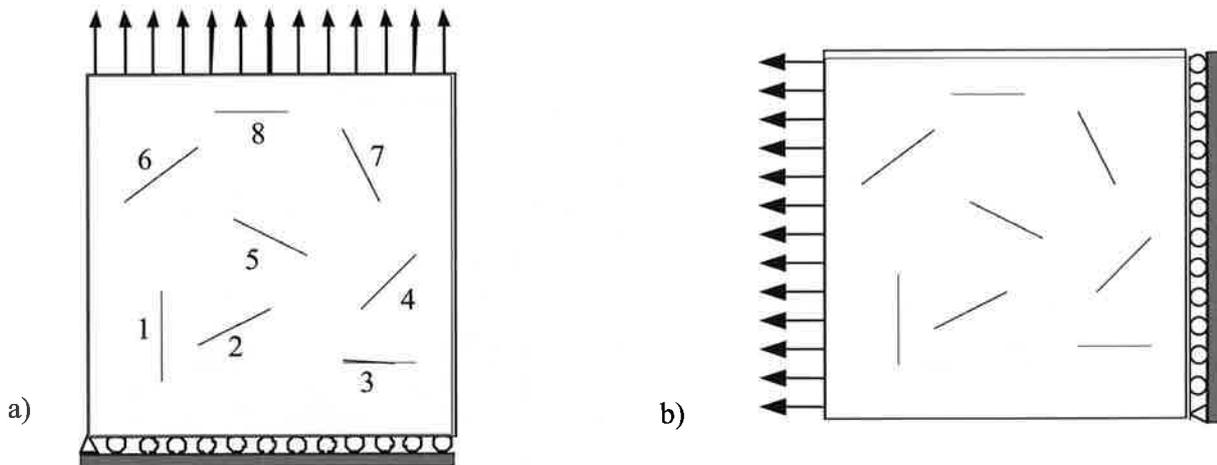


FIG. 6 Géométrie, conditions aux limites et chargement appliqué au domaine fracturé.
Geometry, boundary conditions, and prescribed loads on the fractured domain.

TABLEAU III Caractéristiques géométriques des fissures dans le domaine.
Geometrical data for the cracks in the domain.

K	1	2	3	4	5	6	7	8
$L^{(k)}$	5	$2\sqrt{5}$	4	$3\sqrt{2}$	$2\sqrt{5}$	5	$2\sqrt{5}$	4
$N^{(k)}$	(1,0)	$(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$	(0,1)	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$	$(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5})$	$(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$	$(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5})$	(0,1)

Les caractéristiques géométriques des fractures sont précisées dans le tableau III. Les joints sont ici des fissures vides : leurs raideurs, normale et tangentielle, sont nulles. Le module d'Young et le coefficient de Poisson de la roche saine valent respectivement 100 GPa et 0,25. On applique successivement une traction (unité) dans la direction verticale et dans la direction horizontale.

Avec les propriétés géométriques des fissures données dans le tableau III et en utilisant (23), on trouve :

$$\alpha = \frac{1}{1600} \begin{bmatrix} 67 & -13 \\ -13 & 93 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Les figures 7 et 8 montrent les résultats graphiques de simulations effectuées avec le code de calcul par éléments finis CESAR-LCPC. On observe une concentration des contraintes au voisinage des deux extrémités de chaque joint, ainsi que la rotation des contraintes principales autour des joints. Les déformations et le module d'Young effectif du massif sont calculés à partir des déplacements moyens et des contraintes appliquées sur les frontières du modèle.

Ces derniers sont aussi calculés analytiquement avec la formule de Kachanov (23). Le tableau IV récapitule les résultats numériques et analytiques pour les chargements dans les directions verticale et horizontale.

L'accord entre les résultats numériques et les calculs analytiques est remarquable, en particulier pour l'estimation des modules.

Les éléments joints permettent aussi de tenir compte de la raideur normale et tangentielle des joints, mais dans ce dernier cas, il n'y a pas de solution analytique dans la littérature. A titre d'illustration, on a repris le problème détaillé ci-dessus avec une raideur normale (K_n) et une raideur tangentielle (K_t) respectivement égales à 10 et 3 GPa/m. Le tableau V montre les résultats pour les deux chargements dans les directions verticale et horizontale. La prise en compte de la raideur des joints réduit les déformations calculées, et les modules d'Young sont plus élevés que dans le cas des joints sans raideur.

TABLEAU IV Tenseur de déformation global et modules d'Young effectifs numérique et analytique pour les deux cas de chargement.

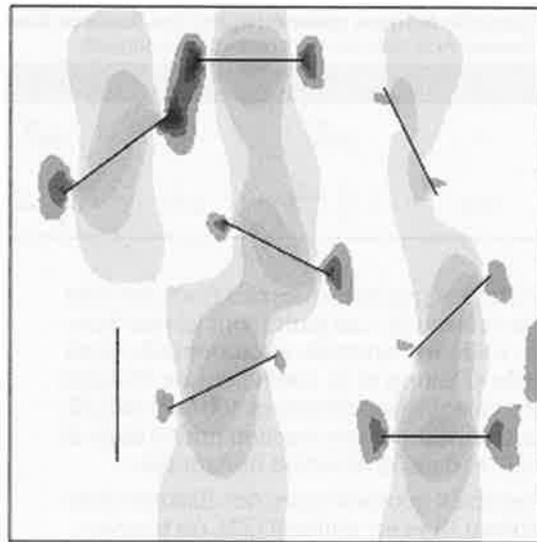
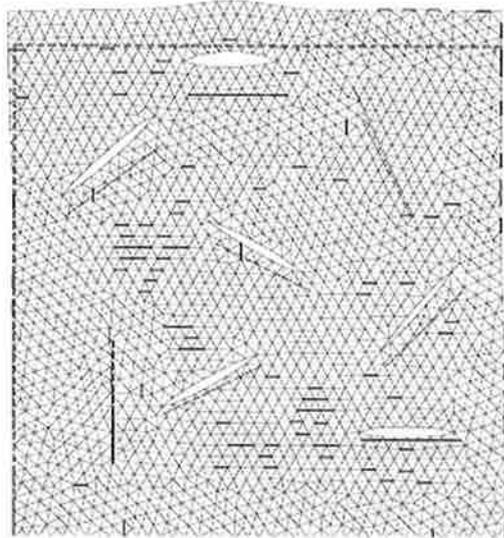
Global strain tensor and effective Young modulus obtained numerically and analytically for two loading cases with zero stiffness joints.

	Chargement vertical	Chargement horizontal
Résultats analytiques	$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} -0,002500 & -0,000255 \\ -0,000255 & 0,013652 \end{bmatrix}$ $\bar{E}_w = 73,25 \text{ GPa}$	$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0,012631 & -0,000255 \\ -0,000255 & -0,002500 \end{bmatrix}$ $\bar{E}_{xx} = 79,17 \text{ GPa}$
Résultats numériques	$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} -0,002299 & -0,000440 \\ -0,000440 & 0,013658 \end{bmatrix}$ $\bar{E}_w = 73,22 \text{ GPa}$	$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0,012544 & -0,000318 \\ -0,000318 & -0,002296 \end{bmatrix}$ $\bar{E}_{xx} = 79,72 \text{ GPa}$

DESSIN DE LA DÉFORMÉE

maillage initial -----

maillage déformé ———



CONTRAINTES PRINCIPALES

échelle |—————|

5E9

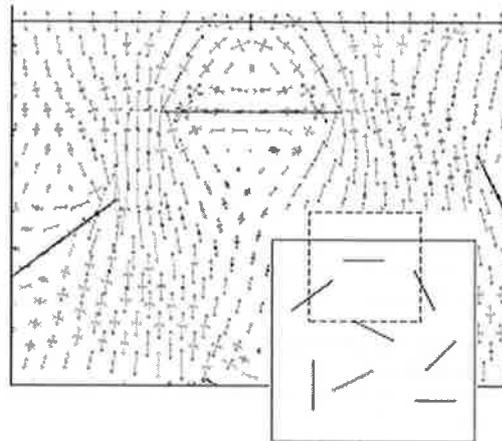
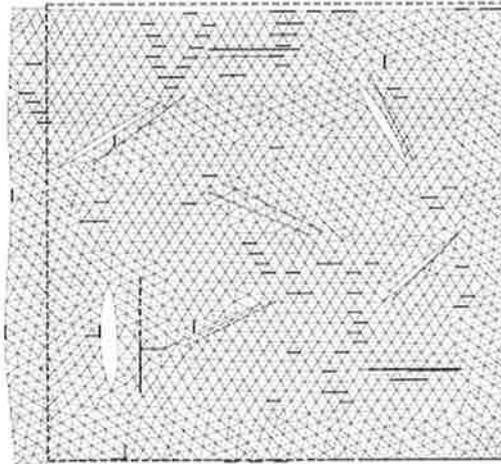


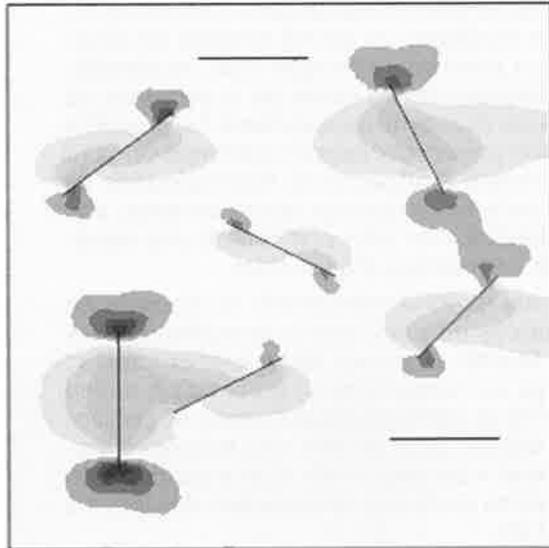
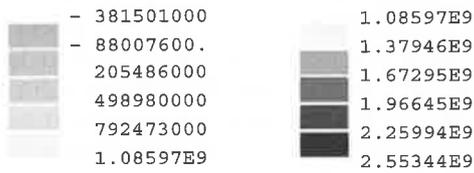
FIG. 7 Déformée, contraintes verticales et contraintes principales (en Pascal) sous chargement vertical.
Deformed mesh, vertical stress and principal stresses (in Pascal) under vertical load.

DESSIN DE LA DÉFORMÉE

maillage initial ----
 maillage déformé ———



Contrainte Sxx



CONTRAINTES PRINCIPALES

échelle |—————|
 5E9

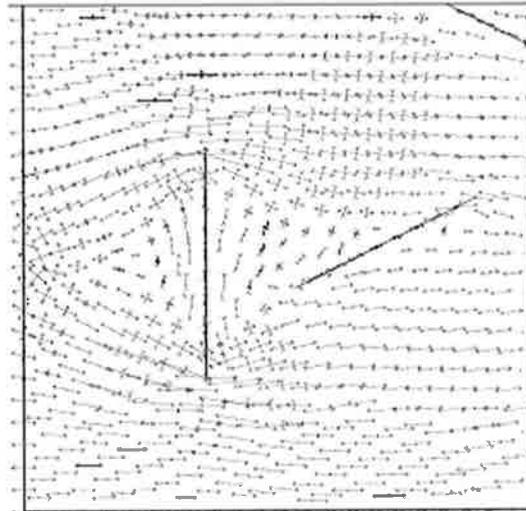
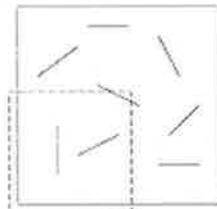


FIG. 8 Déformée, contraintes horizontales et contraintes principales (en Pascal) sous chargement horizontal.
 Deformed mesh, horizontal stress and principal stresses (in Pascal) under horizontal load.

Chargement vertical	Chargement horizontal
$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} -0,002650 & -0,000165 \\ -0,000165 & 0,011587 \end{bmatrix}$ $\bar{E}_{yy} = 86,30 \text{ GPa}$	$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} 0,011141 & -0,000144 \\ -0,000144 & -0,002646 \end{bmatrix}$ $\bar{E}_{xx} = 89,76 \text{ GPa}$

7

Conclusion

Les éléments de joint introduits dans CESAR-LCPC permettent de modéliser un grand nombre de situations difficiles à prendre en compte dans les modélisations par éléments finis à cause de la présence de discontinuités du champ de déplacement. La première des applications présentées montre comment on peut prendre en compte l'influence de discontinuités de déplacement entre blocs dans un massif rocheux, afin d'évaluer la stabilité d'un talus et d'obtenir une représentation de la cinématique d'un versant.

Les éléments de joint permettent de prendre en compte la raideur du matériau de remplissage des joints, ce qui fournit un moyen de quantifier l'apport du remplissage au comportement global d'un milieu fracturé. On a vu en particulier que l'approche présentée peut être utilisée pour réaliser une homogénéisation « numérique » des propriétés d'un matériau fracturé en prenant en compte la contribution des joints à la raideur globale.

De manière plus générale, le modèle de joint peut être combiné avec différentes lois de comportement pour la roche saine, et la géométrie des joints peut être quelconque. En particulier, les joints ne sont pas

nécessairement « traversants » : un élément de joint peut s'arrêter en un point quelconque du massif. Par ailleurs, les éléments de joints implantés dans CESAR-LCPC peuvent être employés de manière plus générale pour la modélisation des interfaces ou surfaces de contact, qui jouent un rôle prépondérant dans le domaine géotechnique pour la modélisation des interactions sol-structure, par exemple à l'interface sol-mur de soutènement (Elmi *et al.*, 2006).

Le domaine d'application des éléments joints peut être étendu dans différentes directions :

- la première est celle des lois de comportement mécaniques et consiste à prendre en compte les non-linéarités dans le domaine des petites déformations des joints, ou leur endommagement progressif au cours du cisaillement. Ces extensions sont actuellement en cours et en partie réalisées ;
- la seconde porte sur la prise en compte des phénomènes hydrauliques et des couplages hydromécaniques ;
- la troisième concerne la généralisation du traitement numérique des joints dans un cadre tridimensionnel. Cette généralisation nécessite le développement d'outils de maillages spécifiques et, de ce fait, constitue une perspective à plus long terme du présent travail.

Bibliographie

- Chalhoub M. – *Apports des méthodes d'homogénéisation numériques à la classification des massifs rocheux fracturés*. Thèse ENSMP 2006.
- Corkum A.G., Martin C.D. – Analysis of a rock slide stabilized with a toe-berm: a case study in British Columbia, Canada. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 41, 2004, p. 1109-1121.
- Elmi F., Bourgeois E., Pouya A., Rospars C. – Elastoplastic joint element for the finite element analysis of the Hochstetten sheet pile wall. *NUMGE 2006*, Graz, 2006, p. 411-416.
- Ghaboussi J., Wilson E.L., Isenberg J. – Finite element for rock joints and interfaces. *J. of Soil Mech. Div. ASCE* 99, SM10, 1973, p. 833-848.
- Goodman R.E., Taylor R.I., Brekke T.L. – A model for mechanics of jointed rock. *J. of Soil Mech. Div. ASCE* 94, SM3, 1968, p. 637-659.
- Humbert P., Dubouchet A., Fezans G., Remaud D. – CESAR-LCPC un progiciel de calcul dédié au génie civil. *Bulletin des laboratoires des ponts et chaussées*, n° 256-257, 2005, p. 7-37.
- Kachanov M. – Elastic Solids with Many Cracks and Related Problems, in *Advances in applied mechanics*, vol. 30, Hutchinson J. W., Wu, T., eds, 1993, p. 259-445.
- Pouya A., Ghoreychi M. – Determination of rock mass strength by homogenization. *J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, 25, 2001, p. 1285-1303.
- Tsukrov I., Kachanov M. – Effective moduli of an anisotropic material with elliptical holes of arbitrary orientational distribution. *International Journal of Solids and Structures*, 37, 2000, p. 5919-5941.
- Zienkiewicz O.C., Best B., Dullage C., Stagg K. – Analysis of nonlinear problems in rock mechanics with particular reference to jointed rock systems. *Proc. of the 2nd Intern. Cong. on Rock Mechanics*, Belgrade, 1970.

Annexe 1 : Démonstration de deux inégalités

Le caractère défini positif de la matrice \mathbf{K} se traduit par la condition :

$$\underline{Y} \cdot \mathbf{K} \cdot \underline{Y} > 0 \text{ pour tout } \underline{Y} \text{ non nul.}$$

En distinguant la composante normale de \underline{Y} notée Y_n et la partie tangentielle notée $\underline{X} = (Y_t, Y_2)$, cette condition s'écrit :

$$\underline{Y} \cdot \mathbf{K} \cdot \underline{Y} = \underline{X} \cdot \mathbf{K}_r \cdot \underline{X} + 2 Y_n \underline{V} \cdot \underline{X} + K_{nn} Y_n^2 > 0.$$

Le cas particulier $\underline{X} = -(\mathbf{K}_r)^{-1} \cdot \underline{V}$ et $Y_n = 1$ donne l'inégalité (6) indiquée dans le texte.

En ce qui concerne l'inégalité (11), notons que,

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\underline{\tau}}{\|\underline{\tau}\|} + \tan \phi \underline{n}, \quad \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\underline{\tau}}{\|\underline{\tau}\|} + \tan \psi \underline{n}$$

et donc :

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \cdot \mathbf{K} \cdot \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{\underline{\tau}}{\|\underline{\tau}\|} \cdot \mathbf{K}_r \cdot \frac{\underline{\tau}}{\|\underline{\tau}\|} + \frac{\underline{\tau}}{\|\underline{\tau}\|} \cdot \underline{V} (\tan \phi + \tan \psi) + K_{nn} \tan \phi \tan \psi \quad (\text{A.1})$$

En dérivant cette expression par rapport à $\tau/\|\tau\|$, on trouve que le minimum est obtenu pour :

$$\tau/\|\tau\| = -1/2 (\tan \phi + \tan \psi) \mathbf{K}_r^{-1} \cdot \underline{V}$$

En remplaçant par cette valeur dans (A.1) et en exprimant que le résultat doit être positif, on obtient l'inégalité (11) du texte.

Annexe 2 : Modèle numérique 2D

Du point de vue numérique, l'élément « joint » que nous considérons ici est celui de Goodman (Fig. 9). Il s'agit d'un élément à quatre nœuds, d'épaisseur nulle : les nœuds 1 et 4 ont les mêmes coordonnées, de même que les nœuds 2 et 3. Les nœuds peuvent avoir des déplacements différents, ce qui produit une discontinuité de déplacement au niveau de l'élément.

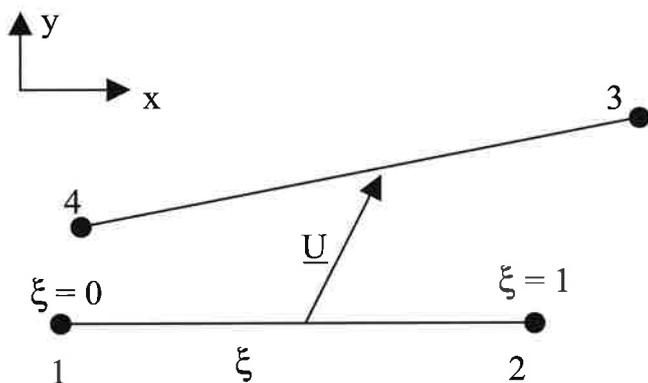


FIG. 9 Élément joint de Goodman (Goodman et al., 1968).
Joint element of Goodman (Goodman et al. 1968).

Cet élément possède huit degrés de liberté de déplacement. Le vecteur des déplacements absolus nodaux par rapport au repère global (x,y) est donné par :

$$\{u\} = \{u_{1x} \ u_{1y} \ u_{2x} \ u_{2y} \ u_{3x} \ u_{3y} \ u_{4x} \ u_{4y}\}^T$$

où l'exposant T indique une transposée. Le vecteur des forces nodales correspondant est :

$$\{f\} = \{f_{1x} \ f_{1y} \ f_{2x} \ f_{2y} \ f_{3x} \ f_{3y} \ f_{4x} \ f_{4y}\}^T$$

On suppose que le déplacement relatif des deux lèvres du joint ou de la fissure est une fonction affine de l'abscisse curviligne le long du joint :

$$U(\xi) = \xi \underline{U}^1 + (1 - \xi) \underline{U}^0$$

avec :

$$\underline{U}^0 = \begin{pmatrix} u_x^4 - u_x^1 \\ u_y^4 - u_y^1 \end{pmatrix}, \quad \underline{U}^1 = \begin{pmatrix} u_x^3 - u_x^2 \\ u_y^3 - u_y^2 \end{pmatrix}$$

Le déplacement relatif se partage en une partie élastique et une partie plastique : $\underline{U} = \underline{U}^e + \underline{U}^p$, qui sont chacune une fonction affine de ξ :

$$\underline{U}^p(\xi) = \xi \underline{U}^{p1} + (1 - \xi) \underline{U}^{p0}$$

L'énergie élastique est donnée par :

$$\Phi = L/2 \int_{\xi=0}^1 \frac{1}{2} (\underline{U} - \underline{U}^p) \cdot \mathbf{K} \cdot (\underline{U} - \underline{U}^p) d\xi$$

où : $\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_t & k_n \\ k_n & k_n \end{bmatrix}$

On définit les forces nodales : $\{f\} = \frac{\partial \Phi}{\partial \{u\}}$,

pour $i = 1, 4$: $f_x^i = \frac{\partial \Phi}{\partial u_x^i}$, $f_y^i = \frac{\partial \Phi}{\partial u_y^i}$

Cela conduit, pour l'élément joint, à une relation matricielle :

$$\{f\} = \mathbf{K}\{u\} + \{f^p\}$$

où la matrice de rigidité \mathbf{K} et le vecteur force plastique $\{f^p\}$ de l'élément joint sont donnés par les expressions suivantes :

$$\mathbf{K} = \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2k_t & 2k_{tn} & k_t & k_{tn} & -k_t & -k_{tn} & -2k_t & -2k_{tn} \\ 2k_{tn} & 2k_n & k_{tn} & k_n & -k_{tn} & -k_n & -2k_{tn} & -2k_n \\ k_t & k_{tn} & 2k_t & 2k_{tn} & -2k_t & -2k_{tn} & -k_t & -k_{tn} \\ k_{tn} & k_n & 2k_{tn} & 2k_n & -2k_{tn} & -2k_n & -k_{tn} & -k_n \\ -k_t & -k_{tn} & -2k_t & -2k_{tn} & 2k_t & 2k_{tn} & k_t & k_{tn} \\ -k_{tn} & -k_n & -2k_{tn} & -2k_n & 2k_{tn} & 2k_n & k_{tn} & k_n \\ -2k_t & -2k_{tn} & -k_t & -k_{tn} & k_t & k_{tn} & 2k_t & 2k_{tn} \\ -k_{tn} & -2k_n & -k_{tn} & -k_n & k_{tn} & k_n & 2k_{tn} & 2k_n \end{bmatrix}$$

$$\{f^p\} = \begin{bmatrix} -[2(k_t U_t^{p0} + k_n U_n^{p0}) + (k_t U_t^{p1} + k_n U_n^{p1})] \\ -[2(k_n U_t^{p0} + k_n U_n^{p0}) + (k_n U_t^{p1} + k_n U_n^{p1})] \\ -[2(k_t U_t^{p1} + k_n U_n^{p1}) + (k_t U_t^{p0} + k_n U_n^{p0})] \\ -[2(k_n U_t^{p1} + k_n U_n^{p1}) + (k_n U_t^{p0} + k_n U_n^{p0})] \\ 2(k_t U_t^{p0} + k_n U_n^{p0}) + (k_t U_t^{p1} + k_n U_n^{p1}) \\ 2(k_n U_t^{p0} + k_n U_n^{p0}) + (k_n U_t^{p1} + k_n U_n^{p1}) \\ 2(k_t U_t^{p1} + k_n U_n^{p1}) + (k_t U_t^{p0} + k_n U_n^{p0}) \\ 2(k_n U_t^{p1} + k_n U_n^{p1}) + (k_n U_t^{p0} + k_n U_n^{p0}) \end{bmatrix}$$