# Modélisation physique et numérique des interactions sismiques sol-pieu : simulateur de séisme du LCPC

Résumé

Le travail présenté est une étude expérimentale des interactions inertielle et cinématique, mises en jeu lorsqu'une superstructure fondée sur pieux est sollicitée par un séisme. A l'aide de modèles réduits centrifugés, trois configurations ont été testées pour observer ces interactions indépendamment puis de manière combinée. La superstructure qui conditionne l'interaction inertielle a été modélisée par un chevêtre pesant, fixé rigidement en tête du pieu. Le pieu a été modélisé par un tube creux flexible mis en place par battage. Le massif de sol a été constitué d'un sable de Fontainebleau homogène sec et dense. Cet article présente par la suite une plateforme de modélisation numérique non-linéaire temporelle de la réponse du système superstructure-pieu-sol. Cette plateforme a permis de proposer une première génération de modèles d'éléments d'interface de type Winkler calés sur les résultats expérimentaux. Les modèles d'éléments d'interface ont été choisis dans la littérature parmi ceux fondés sur des paramètres physiques.

*Mots-clés* : interactions sol-pieu, interaction inertielle, interaction cinématique, modèles réduits en centrifugeuse, simulateur de séisme, modèle numérique, modèles de Winkler.

# Soil-pile seismic interactions physical and numerical modelling: LCPC earthquake simulator

Abstract

The present work is an experimental study of the inertial and kinematic interactions for a superstructure-pile-soil system submitted to an earthquake, based on reduced scale model tests in the centrifuge. Three configurations were set up in order to observe each interaction separately and then to combine them. The superstructure generating the inertial effect was modelled by a heavy pile cap attached on the pile head. The flexible pile was driven into the sol. The sol deposit was a homogenous dry Fontainebleau sand layer. In a second part, a numerical code is presented to compute the temporal non-linear response of superstructure-pile-soil system. The numerical model is based on the 1D Winkler beam on non-linear bearings and computes the response in the time domain. The different interface elements based on physical parameters were chosen from the literature and fitted on the experimental data.

Key words: sol-pile interactions, inertial interaction, kinematic interaction, scale centrifuge tests, earthquake simulator, numerical model, Winkler model.

# N. CHENAF<sup>1</sup> J.-L. CHAZELAS

Laboratoire central des ponts et chaussées Division Reconnaissance et Mécaniques des dols Route de Bouaye BP 4129 44341 Bouguenais Cedex Nawel.chenaf@lcpc.fr J-L.chazelas@lcpc.fr

 Nawel Chenaf a reçu le prix Jean Kerisel 2008, décerné par le Comité français de mécanique de sols et de géotechnique (CFMS), pour les travaux résumés dans cet article.

> NDLR : Les discussions sur cet article sont acceptées jusqu'au 30 novembre 2009.

# Introduction

1

Lorsqu'une structure fondée sur pieux subit un séisme, les pieux interagissent avec le sol par deux mécanismes : l'interaction inertielle et l'interaction cinématique. L'interaction cinématique est le chargement du pieu par le mouvement du sol dû à la propagation des ondes sismiques. L'interaction inertielle est due aux forces d'entraînement, exercées par la superstructure sur le système pieu-sol, engendrées par l'accélération de la masse du chevêtre, due à l'effet cinématique. L'approche rationnelle de l'étude puis de la modélisation de l'interaction sismique sol-pieu qui combine les deux effets suppose de les étudier séparément puis d'étudier leur superposition. On sait que la séparation des deux effets ne sera pas une simple addition compte tenu de la non-linéarité du comportement du sol, même si Mylonakis et al. (1997) proposent de l'envisager pour des systèmes modérément non linéaires. L'argument en faveur d'une telle dissociation et addition simple est que la déformation d'un pieu, soumis à une charge latérale transmise par la superstructure, s'atténue rapidement avec la profondeur, les déformations dues à l'effet inertiel ne sont donc significatives qu'en surface, alors que les ondes sismiques n'induisent d'importants déplacements qu'en profondeur. La superposition des deux effets peut donc être une approximation raisonnable si la non-linéarité du sol est explorée.

Dans des cas plus complexes, caractérisés par de fortes non-linéarités, il est possible d'observer ces deux interactions indépendamment l'une de l'autre : puisque l'interaction inertielle est due à la masse de la superstructure, l'interaction cinématique sol-pieu peut être isolée à partir de la réponse d'un pieu sans superstructure sollicité par des ondes sismiques. Au contraire, la sollicitation d'un pieu avec une superstructure par un impact en tête permet d'observer la réponse inertielle du système superstructure-pieu-sol. Enfin, un essai sismique appliqué à un ensemble complet superstructure-pieu-sol met en jeu les deux interactions. C'est l'ensemble de ces trois approches expérimentales qui est présenté dans cet article.

Les travaux de modélisation des deux interactions séparées et combinées sont nombreux. Les approches analytiques de l'interaction cinématique (Margason, 1975 ; Flores-Berrones et Whitman, 1982 ; Dobry et O'Rourke, 1983 ; Barghouti, 1984 ; Gazetas, 1984 ; Souloumiac, 1986 ; Makris et Gazetas, 1992 ; Shahrour et al., 1994 ; Nikolaou et al., 2001) et de l'interaction inertielle (Novak, 1974 ; Kaynia et Kausel, 1982 ; Matlock et al., 1978 ; Novak et Aboul-Ella, 1978 ; Nogami, 1991 ; El Naggar et Novak, 1996 ; Boulanger et al., 1999) sont faciles à mettre en œuvre et prennent en compte, selon l'approche, divers paramètres d'interaction et les caractéristiques du sol, du pieu et de l'excitation sismique. Elles ont cependant été développées dans le domaine fréquentiel ou pour un comportement linéaire ou linéaire équivalent, ce qui en limite l'usage, surtout dans une perspective de superposition des deux interactions.

Les approches numériques basées sur des modèles aux éléments finis ont principalement étudié le comportement du système couplé superstructure-pieusol soumis à un séisme (El Naggar et Bentley, 2000 ; Maheshwari *et al.,* 2004a et 2004b). Les analyses consacrées à l'interaction cinématique se sont plutôt intéressées à l'étude de l'effet de cette interaction sur le déplacement de la tête du pieu, ce qui est logique par rapport à son rôle comme générateur de l'accélération des superstructures. Nikolaou *et al.* (2001) ont signalé cependant, dans un rapport de retour d'expérience, que des ruptures de pieux ont été localisées dans la zone proche du pied du pieu sans que la liquéfaction ne soit mise en cause. L'évaluation de cet effet sur toute la hauteur du pieu s'avère donc déterminante.

La modélisation physique a aussi traité du chargement sismique plus que du chargement en tête (Meymand, 1998 ; Wilson, 1998 ; Tokimatsu et al., 2005), l'effet inertiel pur a souvent été déduit d'essai sismique par une décomposition analytique des deux effets (Tokimatsu et al., 2005). Il convient également de rappeler l'existence de l'essai STATNAMIC (El-Naggar, 1998 ; Chakraborty, 2000) qui consiste à appliquer un choc en tête d'un pieu en vraie grandeur. Cet essai fournit un moyen de produire de grands chargements axiaux et latéraux sur des fondations par le biais d'une masse de réaction mobile. L'énergie développée lors de l'impact est entièrement restituée dans une bande de fréquences proche de la fréquence fondamentale du système sol-pieu, engendrant ainsi des forces d'inertie significatives, ce qui a permis de déterminer les propriétés dynamiques de l'interaction sol-pieu.

Dans le domaine des essais en modèles réduits, Grundhoff *et al.* (1998) ont commencé une telle étude à l'aide d'un simulateur d'impact en tête du pieu qui fonctionne en microgravité, leurs résultats ne sont pas connus. Bonab (2003) a repris ce concept pour concevoir un générateur de chocs répétitifs en vol sans arrêter la centrifugeuse et a présenté une étude paramétrique expérimentale de l'interaction inertielle.

Le travail présenté ici a complété cette étude paramétrique en utilisant le même outil de chargement, qui ne sera rappelé ici que succinctement. En revanche, le présent article détaille plus particulièrement les expérimentations sous sollicitations sismiques en centrifugeuse qui constituent une première en France. Les résultats expérimentaux en terme d'évolution temporelle des moments fléchissants en fonction de la profondeur seront présentés et commentés pour les trois configurations d'essai et donc pour les trois niveaux d'interaction : inertielle, cinématique et combinée.

Parallèlement aux travaux expérimentaux, des outils numériques d'interprétation des données ont été développés. Il s'agit d'une plateforme numérique fondée sur le modèle de la poutre de Winkler sur appuis non linéaires dans le domaine temporel. Cette plateforme vise à permettre la constitution et le test d'éléments d'interface représentatifs des deux formes d'interaction. Cet article présente cette plateforme et sa validation dans le domaine statique par comparaison avec différents outils : solution analytique, comparaison avec PILATE-LCPC (Baguelin et al., 1976) et comparaison avec des résultats expérimentaux. Une vérification de la plateforme dans le domaine dynamique sera aussi présentée à travers un exemple d'ajustement d'un modèle d'interaction inertielle sur les résultats expérimentaux.

# Modélisation physique à échelle réduite de l'interaction sol-pieu

2

Dans cette étude expérimentale, deux types de chargement sont utilisés pour simuler les différentes interactions auxquelles est sujet le système sol-pieu sous charges dynamiques : des essais d'impact en tête du pieu pour simuler en premier lieu l'interaction inertielle pure et des essais sismiques avec le Simulateur de Séisme du LCPC pour modéliser l'effet cinématique pur et les deux interactions combinées. Le sol, le pieu modèle, le chevêtre qui équipe la tête du pieu ainsi que l'instrumentation mis en œuvre sont identiques pour les deux types de chargement et pour les trois configurations d'essai. Cette partie résume les procédures expérimentales établies ainsi que les moyens mis en œuvre pour réaliser les essais.

## Procédures expérimentales

#### 241.1

## Propriétés du sol

Le massif de sol, reconstitué par pluviation dans des conteneurs rigides, est un sable de Fontainebleau homogène, fin, sec et dense (1 600 kg/m<sup>3</sup>; la densité relative Dr est égale à 86 %). Le tableau I résume les principales caractéristiques du sable utilisé.

#### 2.1.2

#### Propriétés des pieux modèles

Les pieux modèles ont été conçus pour un facteur d'échelle sur les longueurs de 1/40° et donc des essais à 40 g (facteur d'échelle N = 40). Les caractéristiques géométriques et mécaniques du pieu prototype modélisé et celles du pieu modèle sont résumées dans le tableau II.

Le pieu modèle est souple, sa longueur de transfert a été estimée à 3 m (Remaud, 1999).

Le pieu modèle est battu dans le massif de sable à 1 g, à l'aide d'un dispositif simple de battage conçu au LCPC (Fig. 1). Ce dispositif assure une bonne répétitivité du battage d'un essai à un autre.

Le pieu modèle est équipé de vingt niveaux de mesures de déformation. Chaque niveau de jauge est constitué de deux jauges collées en regard sur les deux génératrices du pieu. Les jauges sont collées par paire

TABLEAU I	Propriétés physiques du sable de	
	Fontainebleau.	

Physical properties of the Fontainebleau sand.

Densité (kg/m <sup>3</sup> )			Indice des vides	
Qs	$\rho_{dmax}$	P <sub>d min</sub>	emax	e <sub>min</sub>
2 650	1 676	1 412	0,887	0,581

et montées en demi-pont de manière à permettre l'évaluation directe de la déformation de flexion à chaque étage de paire de jauges. Les paires de jauges sont réparties sur la fiche du pieu tous les 15 mm sur une longueur totale de 285 mm. Les jauges sont protégées par une couche de gelcot.





FIG. 1 Dispositif de battage du pieu modèle. Model pile driving device.

TABLEAU II Caractéristiques mécaniques et géométriques du pieu prototype et du pieu modèle. Prototype and model piles mechanical and geometrical characteristics.

	Facteur d'échelle	Pieu prototype	Pieu modèle
Matériau		Acier	Aluminum
Longueur [m]	Ν	15,2	0,380
Longueur de fiche D [m]	N	12	0,3
Diamètre B [m]	N	0,72	0,018
Diamètre b [m]	N	0,685	0,015
Module d'Young du matériau E <sub>p</sub> [MPa]		2.105	7,4.104
Moment d'inertie de la section I <sub>p</sub> [m <sup>4</sup> ]	$\mathbb{N}^4$	2,38. 10-3	2,67.10-9
Rigidité E <sub>p</sub> l <sub>p</sub> [MN.m <sup>2</sup> ]	$\mathbb{N}^4$	476	197.10-6

#### Le chevêtre

Une masse pesante est fixée en tête du pieu pour simuler l'effet inertiel. Dans le cas des essais de choc, il permet aussi de protéger la tête du pieu d'un éventuel endommagement, puisque le générateur de choc est dirigé vers le centre de gravité de la tête du pieu qui correspond à l'extrémité du pieu. Le chevêtre a été conçu pour assurer une liaison rigide avec la tête du pieu, pour éviter une discontinuité de la rotation ainsi que des vibrations locales des pièces. Le chevêtre en aluminium modèle (30 × 50 × 50 mm<sup>3</sup>) pesant 188,3 gr simule une superstructure prototype de 13 t.

L'accélération au niveau du chevêtre est mesurée par un accéléromètre collé à hauteur de son centre de gravité et sur la face opposée à celle qui reçoit l'impact. Le déplacement du chevêtre est enregistré par un capteur laser analogique. Ce capteur est fixé sur un support métallique de telle sorte que le spot lumineux du laser soit dirigé vers le centre de gravité du chevêtre.

#### 2.1.4

4

3

1

0

0

5

Force (MN)

#### Dispositif et séquences de chargement

Le premier type d'essai, qui visait à simuler exclusivement l'interaction superstructure-sol-pieu inertielle, a été mis en place par Bonab (2003). Cet essai dit « inertiel » repose sur la génération d'impact en tête du pieu par un générateur d'impact, constitué d'une bobine électromagnétique qui accélère une bille (Fig. 2). Le choc est géré depuis la salle de commande de la centrifugeuse. Le dispositif permet d'appliquer aussi bien un choc qu'une séquence de chocs d'amplitude constante ou non. L'essai inertiel mis en place est schématisé sur la figure 3.



FIG. 2 Schéma du générateur d'impact en tête du pieu. Inertial loading device.

15

10

Temps (ms)

(a)

20

La force d'impact est enregistrée par un capteur de force vissé sur le chevêtre, un matériau de contact est collé sur la face du capteur qui reçoit le choc, pour le protéger et pour prolonger la durée de l'impact.

L'enregistrement temporel, ainsi que le contenu fréquentiel, de la force appliquée sur le chevêtre lors de l'essai inertiel sont donnés sur la figure 4. Considérant que la fréquence propre du système pieu-sol constaté est de l'ordre de 3,6 Hz prototype (Chenaf, 2007), soit une période propre de 0,27 s, la mesure de la force montre que l'impact appliqué est très court et peut être considéré comme un Dirac de force.

Les essais sismiques, qui ont permis de simuler l'interaction sol-pieu cinématique et la combinaison des deux interactions, étaient les premiers essais réalisés avec le Simulateur de Séisme (SdS) dont s'est doté le LCPC. Le SdS est une table vibrante embarquée dans la nacelle de la centrifugeuse. Ainsi, au cours de la rotation de la centrifugeuse, le modèle est soumis simultanément à un champ de macrogravité engendré par l'accélération centrifuge, selon la verticale du modèle, et à une accélération sismique horizontale par rapport au modèle. Ce dispositif développé par l'entreprise Actidyn Système a déjà été largement présenté (Derkx *et al.,* 2006a et 2006b). Ses principales caractéristiques sont rappelées dans le tableau III.

Le SdS est un dispositif électro-hydraulique qui permet de commander des séismes sinus d'une durée maximale d'une seconde dans la bande 20-200 Hz pour la pleine charge ou des séismes large bande tels que



FIG. 4 Enregistrement temporel (a) et fréquentiel (b) de l'impact en tête du pieu. (a) Time record of the horizontal force applied at the pile cap for the inertial tests (b) FFT of this force.

# TABLEAU III Performance du simulateur de séisme du LCPC. LCPC earthquake simulator performance.

	Modèle	Prototype (réel)
Masse utile	400 kg	dimension prototype dans le conteneur 32 × 24 × 22 m au 1/40 64 × 28 × 44 m au 1/80
Champ de gravité centrifuge	10 à 80 g	1 g
Déplacement maximal	5 mm	20 cm à 1/40 40 cm à 1/80
Vitesse maximale	1 m/s	1 m/s
Accélération maximale	20 g à 1/40 40 g au 1/80	0,5 g
Bande de fréquence en sinus	20-200 Hz	0,5-5 Hz au 1/40 0,25-2,5 Hz au 1/80
Durée maximale du séisme sinus	1 s	40 s au 1/40 80 s au 1/80
Mouvements parasites	accélération en bout de table < 10 % du séisme	

des enregistrements de séismes réels ou des séismes synthétiques.

Lors des essais de réception, il a été démontré que cette machine disposait de la puissance nécessaire pour réaliser le programme spécifié, en revanche les mouvements appliqués à la masse d'essai présentaient trop de mouvements parasites (en lacet et en basculement). Cependant, des améliorations réalisées en janvier 2007 ont permis d'obtenir un respect parfaitement conforme aux spécifications en sinus et en séisme réel pour une masse légèrement réduite et à 40 g. Il reste encore à vérifier l'amélioration complète des spécifications.

La figure 5 présente le SdS du LCPC disposé dans la nacelle de la centrifugeuse ainsi qu'un schéma descriptif de sa mécanique.

Comme il est indiqué sur la figure 6, le signal sismique choisi pour les essais présentés par la suite correspond à une fonction harmonique de type sinusoïdale. Ces principales caractéristiques sont données sur cette figure à l'échelle du prototype. Dans le tableau IV, ces caractéristiques sont données avec leur équivalence à l'échelle du modèle.

Lors des essais sismiques, en plus de l'instrumentation spécifique au pieu et au chevêtre (cf. § 2.1.2 et 2.1.3), des accéléromètres ont été disposés dans le sol en différentes profondeurs en cours de pluviation. Ces capteurs ont permis le suivi de l'évolution du déplacement du sol en cours d'essai. Ainsi que son évolution





FIG. 5 Photo du simulateur de séisme du LCPC disposé dans la centrifugeuse. Earthequake simulator at LCPC seen embarqued in the centrifuge basket. The front counterweight is withdraw.

#### TABLEAU IV Caractéristiques modèle et prototype du signal sismique simulé.

Model and prototype characteristics of simulated seismic signal.

	Modèle (1/40)	Prototype
Amplitude [g]	18	0,45
Amplitude [m/s²]	176,5	4,4
Durée [s]	0,3	12
Nbre d'alternance [.]	30	30

d'un essai sismique à un autre, puisque trois configurations d'essai sismique ont été mises en place : un essai sismique sur un massif de sol visait la caractérisation du déplacement du sol en « champ libre », c'est-à-dire sans l'effet de la présence du pieu, la seconde configuration visait à simuler l'interaction cinématique, le pieu dans ce cas n'a pas été équipé du chevêtre en tête, la dernière a pris en compte tout le système chevêtrepieu et sol où il s'agissait de simuler les deux effets combinés. La figure 7 schématise cette dernière configuration.







#### 2.2

# Mesures acquises lors des essais inertiels et sismiques

## Accélération – Déplacement du chevêtre

L'accélération du chevêtre ainsi que le déplacement correspondant, mesuré par le capteur laser, sont donnés sur la figure 8. Ces deux enregistrements correspondent à un mouvement oscillatoire amorti, qui s'atténue après 2 s. La figure 9 représente le déplacement et l'accélération mesurés en tête du pieu lors d'un essai sismique, réalisé avec un pieu équipé du chevêtre. Le mouvement est harmonique forcé (non-amorti). Il correspond au signal sismique d'entrée en fréquence et en nombre d'alternance (Fig. 6). Les mesures de déplacement et d'accélération en tête du pieu permettent d'une part de vérifier la réponse instantanée du pieu à la sollicitation, et d'autre part sont utilisées comme conditions aux limites lors de l'établissement des boucles p-y (Chenaf, 2007), p étant la réaction du sol et y le déplacement du pieu.



REVUE FRANÇAISE DE GÉOTECHNIQUE Nº 125 4º trimestre 2008



#### Accélération de la colonne de sol

Les essais sismiques réalisés dans cette étude sont particuliers, la notion de déformation dans le champ proche du pieu et dans le champ lointain n'est pas applicable. Le massif de sol a été reconstitué dans un conteneur rigide dont la base est solidaire du simulateur de séisme.

Afin de caractériser la réponse de la colonne de sol dans ces conditions, les accélérations maximales du sol issues de l'essai sur le massif de sol en champ libre ont été comparées à celles déduites des essais sur pieu équipé ou non équipé du chevêtre. Cette comparaison est représentée sur la figure 10. Les accélérations comparées sont les accélérations horizontales mesurées dans le sol à environ 5 diamètres du pieu. Notons que les accélérations du massif de sable dans le cas des chocs en tête n'ont pas été mesurées.

La figure 10 montre que la courbe d'accélération du sol en « champ libre » est comparable à celle de l'essai sur pieu non-équipé du chevêtre. Le mouvement du sol n'est donc pas affecté par la présence du pieu. On en déduit que le pieu subit un effet cinématique pur dû a un mouvement d'entraînement par le sol.

La courbe de l'essai sur pieu équipé du chevêtre a la même allure que les deux courbes précédentes jusqu'à 7 m. L'écart en surface entre les courbes est quasi-constant. Au-delà de 9 m de profondeur, les courbes sont confondues. L'écart d'amplitude en surface est dû à l'effet inertiel du chevêtre ; en pied du pieu, cet effet disparaît.

#### Moments fléchissants

L'étalonnage du pieu instrumenté par essais statiques en flexion permet de convertir directement les informations des paires de jauges en moment à chaque niveau. Il est donc possible de tracer les profils des moments fléchissants en fonction de la profondeur et au cours du temps. Les figures 11, 12 et 13 présentent ces profils pour les trois configurations d'essai. Pour la lisibilité des figures, sont présentés des profils à différents instants formant une séquence du mouvement. La flèche dessinée sur le graphe indique le sens du mouvement. En s'appuyant sur l'évolution temporelle de ces profils, il est possible de tracer l'enveloppe des moments maximaux à chaque profondeur au cours du temps pour chaque configuration ainsi que la zone au-delà de laquelle les moments peuvent être considérés comme nuls.

Dans le cas de l'essai inertiel (Fig. 11), le moment maximum est estimé à 1 100 kN.m et se situe à une profondeur égale à 1,8 m par rapport à la surface libre du sol. Ce moment dépend bien sûr de l'amplitude de la force appliquée. Les moments sont négligeables audelà de 6 m.

Sur la figure 12, les moments obtenus de l'essai d'interaction cinématique pure croissent de la surface jusqu'à 6,6 m et décroissent par la suite jusqu'en pied du pieu. Le moment maximum est égal à 223 kN.m.

Les moments fléchissants représentés sur la figure 13, obtenus en simulant les deux interactions combinées, sont significatifs sur toute la hauteur du pieu, leur maximum se situe à 3,6 m et est égal à 720 kN.m. Ce qui est très supérieur au cas précédent alors que l'input sismique est le même.









Les courbes enveloppes des profils des moments maximaux positifs pour les trois configurations sont comparées sur la figure 14. Cette comparaison permet de déduire que :

 l'effet inertiel est prédominant au cours du tremblement de terre pour le pieu équipé d'un chevêtre en tête. Les moments de fortes amplitudes se manifestent dans la zone proche de la tête du pieu;

 le mouvement du sol engendre des déformations du pieu plus importantes dans les couches intermédiaires (situées entre 6 et 10 m) en l'absence du chevêtre ;

 les essais sous séisme sur pieu équipé ou non équipé du chevêtre montrent l'apparition et la prédominance de l'effet cinématique en pied du pieu (les courbes sont quasiment confondues à partir de 8 m).

Des difficultés expérimentales ont empêché l'aboutissement à des niveaux de déformations de même grandeur pour les essais de chocs et les essais sismiques. Les comparaisons en termes de moments ou de déplacements maximaux sont limitées, il serait donc utile de reproduire ces mêmes essais à un même niveau de déformation maximale – soit en tête, soit plus bas dans le corps du pieu – pour mieux établir leur



contribution dans l'interaction combinée au cours d'un séisme. Compte tenu de la première utilisation du SdS, les essais sismiques sont particuliers à cause de la rigidité du conteneur utilisé. L'effet de réflexion des ondes générées par le tremblement de terre simulé n'a pas été étudié, il donc important de reproduire les essais sismiques en reproduisant le mouvement en champ libre en libérant les parois du conteneur.

### 3

# Modélisation numérique de l'interaction sol-pieu

Le modèle qui sous-tend le plus souvent les règlements de calcul – que ce soit dans le règlement national (Fascicule 62, 1993) ou les règlements internationaux (API, 1993 ; DNV, 1992 ; PHRI, 1980) – est le modèle du coefficient de réaction qui se traduit par les courbes p-y. Ces courbes expriment la réaction p du sol au déplacement y du pieu, elles sont établies expérimentalement à partir des moments fléchissants mesurés par les jauges de déformations collées sur les pieux testés.

L'analyse de l'interaction sol-pieu sous forme de courbes p-y peut servir de base au calage de paramètres d'interaction dans un modèle numérique.

Le Laboratoire central des ponts et chaussées a développé le logiciel PILATE-LCPC (PIeux sous charges LATErales) sur cette base (Romagny, 1985 ; Frank, 1999). PILATE-LCPC permet à partir des courbes p-y statiques expérimentales de calculer l'évolution des moments fléchissants, des efforts tranchants, des déplacements et des réactions du sol le long du pieu à partir des courbes p-y statiques expérimentales. Le calcul est basé sur une résolution analytique avec un processus de linéarisation des courbes p-y.

Le code développé ici vise à calculer l'évolution des moments, des efforts tranchants, des déplacements et des réactions du sol le long du pieu en exploitant des courbes p-y expérimentales, à travers un modèle aux éléments finis 1D du pieu. Les interactions sol-pieu sont discrétisées par des éléments d'interface discrets de type Winkler dont les caractéristiques sont extraites des courbes p-y expérimentales. Ce modèle permet en plus d'ajuster des paramètres d'interaction à partir de résultats expérimentaux. Le développement de ce code a d'abord permis de traiter le cas du chargement statique ensuite le cas dynamique.

## Code de calcul

L'équilibre statique d'un pieu de rigidité à la flexion  $E_{p}I_{p}$  soumis à une charge statique F en tête a pour expression :

$$P_{sol}(y,z) + E_{p}I_{p}\frac{\partial^{4}y}{\partial z^{4}} = F$$
(1)

P<sub>sol</sub> est la réaction du sol relative à la profondeur z, y est le déplacement latéral du pieu dans la direction de la charge F. La masse du chevêtre et le poids du pieu sont négligés.

Pour passer du modèle continu défini par l'équation (1) à un modèle discret, le pieu est discrétisé par des éléments finis barre à deux degrés de liberté : une



translation et une rotation à chaque nœud. La réaction continue du sol est discrétisée par le modèle mécanique de Winkler. Ce modèle néglige la continuité du sol, le sol est assimilé à un ensemble de ressorts indépendants sur lesquels s'appuie le pieu au cours de son déplacement. La modélisation numérique de l'interaction sol-pieu, par le biais de ce concept, se traduit par la description de cette interaction par une loi de comportement qui relie le déplacement y du pieu à la réaction p du sol. Cette modélisation est décrite par les courbes p-y (Fig. 15).

Dans ce cas, la réaction ponctuelle du sol a pour expression :

$$p_i(y,z) = k_i y_i \tag{2}$$

où p<sub>i</sub> est la réaction du sol agissant sur le nœud i ; k<sub>p</sub> le coefficient de réaction latérale affecté à ce nœud i et y<sub>p</sub> le déplacement latéral du pieu correspondant.

Le coefficient k est une grandeur d'interaction solpieu. Il qualifie la raideur du sol vis-à-vis du déplacement latéral du pieu. Compte tenu de la non-linéarité du comportement du sol, il est souvent dépendant du déplacement y du pieu, ce n'est donc pas un paramètre intrinsèque du sol.

A partir de ces hypothèses, un algorithme basé sur une résolution en déplacement a été développé pour résoudre l'équation (1). Chenaf (2007) décrit l'élaboration de cet outil de calcul en détails ainsi que la combinaison de deux algorithmes : discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis et linéarisation par la méthode de Newton-Raphson. Un processus de chargement incrémental est introduit pour assurer la convergence de l'algorithme (Mestat, 1988).

La validation du modèle statique, développé sous MATLAB, a été effectuée selon deux approches :

 la comparaison des résultats avec ceux d'une résolution analytique ;

 – la comparaison avec des résultats de PILATE-LCPC fondés sur les mêmes résultats expérimentaux.

#### 3.2

## Validation du modèle statique par une solution analytique

Frank (1999) a présenté une solution analytique, dans le cas d'un sol homogène et élastique de module  $E_{s'}$  le pieu étant soumis à un chargement latéral statique. La solution en déplacement de l'équation (1) est donnée par la relation (3). Le moment fléchissant, qui correspond à la deuxième dérivée du déplacement, est donné par l'équation (4) :

$$y(z) = e^{z/l_o} [a_1 \cos \frac{z}{l_o} + a_2 \sin \frac{z}{l_o}] + e^{-z/l_o} [a_3 \cos \frac{z}{l_o} + a_4 \sin \frac{z}{l_o}]$$
(3)  
$$\frac{M}{E_p I_p} = y''(z) = \frac{2e^{z/l_o}}{l_o^2} [-a_1 \sin \frac{z}{l_o} + a_2 \cos \frac{z}{l_o}] + \frac{2e^{-z/l_o}}{l_o^2}$$
$$[a_3 \sin \frac{z}{l_o} - a_4 \cos \frac{z}{l_o}]$$
(4)

Les termes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$  sont des constantes d'intégration qui peuvent être déterminées à partir des conditions aux limites.  $l_a$  est la longueur de transfert du pieu donnée en fonction du module de sol  $E_s$ , du module du pieu  $E_p$  et de l'inertie de sa section par rapport à son axe transversal  $I_p$ :

$$l_o = \sqrt[4]{\frac{4E_p I_p}{E_s}}$$
(5)

Le module de réaction E correspond au coefficient de réaction k(y, z) pour un diamètre B donné du pieu :

$$E_{s} = k(y,z) B \tag{6}$$

Pour l'application numérique, on a pris une des valeurs du module de réaction proposées par Poulos (1971) (Tableau V). Ces valeurs moyennes ont été déterminées à partir d'essais sur des pieux réels enfouis dans du sable (Broms, 1964).

Les figures 16 et 17 représentent les résultats analytiques obtenus par le calcul du déplacement et du profil de moments fléchissants à partir des équations (3) et (4), comparés à ceux obtenus par le modèle numérique (Chenaf, 2007). Ces deux figures montrent que les résultats des deux calculs sont comparables. L'écart qui apparaît au niveau du moment maximum (à 1,8 m de profondeur) n'excède pas 10 %. Notons que l'estimation de la propagation de l'erreur de la mesure de moments – estimée à 3,7 % – engendre une incertitude de 0,5 % sur le calcul du déplacement du pieu y et une incertitude de 15,5 % sur la réaction du sol p à cette profondeur (Chenaf, 2007). Rappelons à cet effet que ce sont les courbes p-y qui sont assujetties au processus d'ajustement par le code que nous avons établi, d'où la justification d'un tel écart avec les mesures.

Validation du modèle par comparaison avec des résultats expérimentaux et avec un calcul avec le logiciel PILATE-LCPC

Des mesures issues d'essai de chargement statique monotone (Rosquoët, 2004) ont été utilisées pour effectuer cette validation. Elles ont permis d'ajuster sur ces courbes p-y expérimentales les caractéristiques des ressorts de « Winkler ». Les courbes p-y de surface ont été ajustées par des fonctions de la forme p = Ay<sup>B</sup> (PHRI, 1980 ; Mezazigh, 1995). Les courbes des couches profondes ne présentant pas de fortes non-linéarités, la relation p-y a été ajustée par des droites. Un exemple de chaque mode d'ajustement est donné sur les figu-

TABLEAU V	Valeur n différent Means va as functio	ar moyenne du module d'Young $E_s$ pour rentes densités de sable. Is values of the soil young modulus $E_s$ of sand action of its density.		
Densité du	i sable	Intervalle de la valeur Es (kg/m²)		
Lâch Moye Dens	e n e	91 400-210 920 210 920-421 840 421 840-984 300		





res 18 et 19 : les lignes marquées correspondent aux courbes expérimentales et les lignes continues correspondent aux courbes ajustées.

Ces mêmes courbes expérimentales ont été introduites dans le logiciel PILATE-LCPC pour calculer le moment, l'effort tranchant, le déplacement du pieu et la réaction du sol.

La figure 20 représente les courbes expérimentales, les courbes obtenues par PILATE-LCPC, confrontées aux courbes obtenues par notre code. Ces courbes montrent une meilleure concordance entre les résultats expérimentaux et la simulation effectuée avec notre code EF 1D qu'avec le logiciel PILATE-LCPC. Rosquoët (2004) admet d'ailleurs que PILATE-LCPC sous-estime légèrement les résultats, il a remarqué que ce phénomène est amplifié avec l'accroissement de la charge F appliquée en tête du pieu. Il a montré néanmoins que la différence reste inférieure à 10 %.

Notons qu'en plus du gain de précisions que procure notre code, il présente l'avantage de la flexibilité d'application de la charge extérieure et du choix du nombre d'appuis. PILATE-LCPC ne permet de l'appliquer qu'en tête et le nombre de points de calcul dans le sol est limité à 20.





Comparison of numerical model to analytical solution : bending moment profile.



A partir de ces deux comparaisons, on a considéré le code EF 1D comme validé pour la modélisation de l'interaction dans le domaine non linéaire sous charge statique et on a pu entreprendre la modélisation dans le domaine dynamique.

Modélisation numérique de l'interaction inertielle et cinématique

L'algorithme statique validé a été adapté au calcul et à l'analyse de l'interaction non linéaire sous charge dynamique appliquée en tête. L'équilibre dynamique en flexion unidimensionnelle du modèle continu du pieu s'écrit dans ce cas :

$$\mu_{\rm p} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c_{\rm p} \frac{\partial y}{\partial t} + p_{\rm sol}(y, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, z, t) + E_{\rm p} I_{\rm p} \frac{\partial^4 y}{\partial z^4} = F(z, t) (7)$$

où F(z, t) est la force extérieure appliquée en tête ;

 $p_{sol}(y,\frac{\partial y}{\partial t},\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},z,t)$  , la force de réaction transversale du







sol ;  $E_p I_p \frac{\partial^4 y}{\partial z^4}$ , la force d'équilibre de la densité de chargement dans la direction de la translation due au moment de flexion du pieu ;  $c_p \frac{\partial y}{\partial t}$ , la force d'amortissement interne du pieu et  $\mu_p \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ , la force d'inertie de translation du pieu qui comprend la masse du chevêtre.

La réaction p du sol est décomposée en trois forces : une force élastique dans le ressort, équivalente à la réaction statique développée dans le paragraphe précédent, une force d'amortissement développée dans un amortisseur et une force d'inertie développée dans une masse. Ce modèle, attribué à chaque appui de Winkler, est schématisé sur la figure 21.

L'algorithme temporel HHT (Hilbert-Hugues-Taylor, 1977) a été implémenté dans le code statique pour la résolution de l'équilibre dynamique du système superstructure-sol-pieu. Deux cas de chargements dynamiques ont été traités : le choc en tête et le séisme. L'algorithme est adapté au chargement impulsionnel en tête par l'introduction d'une condition de vitesse initiale non-nulle calculée à partir de la quantité de mouvement cédée au chevêtre par l'impact. Le chargement sismique est introduit par le biais d'une force d'inertie relative aux mouvements du sol qui entoure le pieu en chaque appui de Winkler.

Ce code a été utilisé pour ajuster des modèles d'interface fondés sur le schéma de la figure 21 qui se composent d'un élément de réaction élastique statique, d'un élément d'amortissement et d'un élément de masse.

Les éléments d'interaction élastiques ont été fondés sur des lois d'interaction de la littérature pour modéliser un ressort non linéaire (PHRI, 1980 ; API, 1993 ; Carter, 1984). La force d'amortissement a été estimée par une loi classique de calcul de propagation d'onde dans un milieu continu et homogène (Gazetas et Dobry,





1984). Le paramètre de masse a été pris équivalent à la masse d'un cylindre de sol déplacé dont le diamètre est proportionnel à celui du pieu.

Les courbes présentées sur les figures 22 et 23 montrent un exemple d'ajustement fondé sur une loi puissance ( $p = Ay^B$ ) pour la partie élastique de l'élément d'interaction. Les courbes calculées sont comparables aux courbes mesurées. Les fréquences de résonance et les amortissements sont identiques tant sur le déplacement du chevêtre que sur la courbe de moment. Un écart apparaît cependant entre les courbes temporelles au-delà de 3 s, signe d'un raidissement du modèle numérique en fonction du temps.

Trois lois décrivant la raideur ont été implémentées et leurs paramètres ajustés sur les mesures. Ces trois lois ne montrent pas de performance relative, elles ont cependant permis d'ajuster des paramètres en appliguant des coefficients d'ajustement sur les paramètres initiaux déduits des mesures. Dans le cas du chargement sismique, une loi linéaire a été implémentée et ajustée.

Ces lois d'interaction ajustées n'ont été testées que pour une série d'essais. En revanche, la stabilité et la convergence du code ont été vérifiées et validées.

# Conclusion

Par une approche tant expérimentale que numérique, on a pu entreprendre l'étude détaillée de deux formes d'interaction qui régissent l'interaction entre le sol et un pieu de fondation lors d'un séisme : l'interaction inertielle et l'interaction cinématique.

La modélisation physique à échelle réduite en centrifugeuse a permis une observation expérimentale indépendante de ces deux interactions qui se superposent normalement lors d'un séisme. L'interaction inertielle seule a été mise en évidence par des essais de chocs appliqués en tête du pieu à l'aide d'un impacteur électromagnétique. L'interaction cinématique a été isolée en réalisant un essai sismique avec le nouveau simulateur de séisme du LCPC en supprimant le chevêtre massif en tête du pieu. Enfin, un essai sous séisme mais avec le chevêtre remis en tête du pieu a permis d'observer les deux interactions combinées. ce fait, le champ d'accélération dans le conteneur n'était pas conforme à ce qu'il peut être dans un demi-espace infini. De plus, on peut penser que les ondes générées dans le sol par les interactions ont pu se réfléchir sur les parois rigides (principalement dans la direction longitudinale de l'ébranlement sismigue). Cela a eu donc des conséquences en termes d'amplitudes des efforts et des déplacements le long du pieu, on peut aussi penser que cela n'invalide pas la relation entre les déplacements et les réactions du sol sur le pieu qui peuvent être déduites des profils de moment dans le pieu. Il est bien sûr nécessaire de reprendre l'ensemble des essais sismiques - avec et sans chevêtre - en utilisant un conteneur à parois déformables de manière à se rapprocher des profils d'accélération de champ libre. Cela permettra de vérifier les relations entre le déplacement du pieu et la réaction du sol (p-y) et rendre plus réaliste la répartition des efforts en profondeur.

Il convient de rappeler ici que le conteneur d'essai

pour les essais sismigues était un conteneur rigide. De

Pour exploiter ces données expérimentales, un code de calcul par éléments finis 1D a été développé sur la base du modèle de la poutre de Winkler sur appuis discrets non linéaires. Il a d'abord été validé dans le domaine statique et s'avère plus précis et plus souple - dans le cas testé - que l'outil disponible fondé sur une solution analytique. Étendu au domaine dynamique pour un calcul de réponse dans le domaine temporel, il constitue un banc de développement de modèles d'interface par ajustement de paramètres sur des données expérimentales. L'application de cet outil aux données issues des trois séries d'expérimentation présentées a permis la mise au point d'une première famille de modèles d'interface simples traduisant bien les trois configurations d'essais. Ceci ne constitue pas une validation de ces éléments d'interface : il convient de réaliser de nouvelles séries d'essais en modifiant différents paramètres (par exemple : diverses configurations d'essai sismiques - fonctions harmoniques et non harmoniques - et divers chevêtres en tête dans le cas du chargement impulsionnel) pour vérifier que les modèles présentent une certaine robustesse. Au cours de cette démarche, il est probable que de nouvelles familles de modèles d'interface, peut-être un peu plus sophistiqués, s'avéreront nécessaires.

- API (American Petroleum Institute) Designing and constructing fixed offshore platforms. RP2A-LRFD. Section G, 1993 p. 64-77.
- Baguelin F., Frank R., Guegan Y. Calcul sur ordinateur des pieux sollicités horizontalement ou subissant des poussées parasites. Bulletin des laboratoires des ponts et chaussées, 84, 1976, p. 113-120.
- Barghouti A.F. Pile response to seismic waves. PhD dissertation, University of Wisconsin, Madison, 1984.
- Bonab H.M. Modélisation physique et numérique d'un pieu isolé dans du sable soumis à un impact latéral en tête. Thèse de doctorat, université de Caen, 2003 228 p.
- Boulanger R.W., Currus C.J, Kuter B.L., Wilson D.W., Abghari A. – Seismic soilpile-structure interaction experiments and analyses. *Journal of Geotechnical* and Geoenvironmental Engineering, vol. 125, n° 9, 1999, p. 750-759.
- Broms B.B. Lateral resistance piles on cohesionless solls. American society of civil engineering journal, SM3, 1964, p. 123-156.
- Carter D.P. A non-linear soil model for predicting lateral pile response. Rep n° 359, Civil Engineering Dept., University of Auckland, New Zealand, 1984.
- Chakraborty S. Dynamic lateral loading testing of deep foundation groups. Phd thesis, University of Auburn, 2000, 286 p.
- Chenaf N. Interaction inertielle et interaction cinématique sol-pieu. Thèse de Doctorat, École centrale de Nantes-Université de Nantes, 2007, 330 p.
- Derkx F., Thorel L., Chazelas J.-L., Escoffier S., Rault G., Buttigieg S. – Dynamic tests and simulation of earthquake in the LCPC's centrifuge. 6th International Conference on Physical Modelling in Geotechnics, 4-6 August. Hong-Kong, 2006a, p. 181-186.
- Derkx F., Thorel L., Chazelas J.-L., Perdriat J., Escoffier S., Rault G., Buttigieg S., Cottineau L.-M. – Simulation de séismes sous macro-gravité. *Revue Essais industriels*, n° 39, 2006b, p. 12-21.
- DNV (Det Norske Veritas) Rules for the design construction and inspection of offshore structures. Appendix F : Foundations, 1992, 5 p.
- Dobry R., O'Rourke M.J. Discussion on 'Seismic response of end-bearing piles' by Flores-Berrones R. and Whitman R.V. Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE, n° 109, 1983.
- El Naggar M.H., Bentley K.J. Dynamic analysis of laterally loaded piles and dynamic p-y curves. *Canadian Geotechnical Journal*, vol. 37, n° 6, 2000, p. 1166-1182.
- El Naggar M.H. Interpretation of lateral STATNAMIC load test results. *Geotechnical testing journal*, vol. 21, 1998, p. 169-179.
- El Naggar H., Novak M. Non-linear analysis for dynamic lateral pile response. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, vol. 11, 1996, p. 233-244.

- Fascicule n° 62, Titre V Règles techniques de conception et calcul des fondations des ouvrages de génie civil. Cahier des clauses techniques générales applicables aux marchés publics de travaux. Ministère de l'Équipement, du Logement et des Transports, 1993, 182 p.
- Flores-Berrones R., Whitman R.V. Seismic response of end-bearing piles. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, vol. 108, n° 4, 1982, p. 554-569.
- Frank R. Calcul des fondations superficielles et profondes. Éditions Technique de l'Ingénieur et Presse des Ponts et Chaussées, 1999, 141 p.
- Gazetas G. Seismic response of end-bearing single piles. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, vol. 3, n° 2, 1984, p. 82-93.
- Gazetas G., Dobry R. Horizontal response of piles in layered soils. *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, vol. 110, 1984, p. 20-40.
- Grundhoff T., Latotzke J., Laue J. Investigations of vertical piles under horizontal impact. *Centrifuge 98*, 1998, p. 569-574.
- Hilbert H.M., Hughes T.J.R., Taylor R.L. – Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics Journal*, vol. 5, 1977, p. 283-292.
- Kaynia A.M., Kausel E. Dynamic behaviour of pile groups. 2nd International Conference on Numerical Methods in offshore Piling, Austin, Texas, 1982.Maheshwari B., Truman K.Z., El Naggar
- Maheshwari B., Truman K.Z., El Naggar M.H., Gould P.L. – Three-dimensional finite element nonlinear dynamic analysis of pile groups for lateral transient seismic excitations. *Canadian Geotechnical Journal*, vol. 41, 2004a, p. 118-133.
- Mahshwari B.K., Truman K.Z., El Naggar M.H., Gould P.L. – Three-dimensional nonlinear analysis for seismic soil-pilestructure interaction. *Soil Dynamics and Earthkaque Engineering Journal*, vol. 24, 2004b, p. 343-356.
- Makris N., Gazetas G. Dynamic pile-soilpile interaction. Part II : Lateral and seismic response. *Earthquake Engineering Structural Dynamics*, vol. 21, n° 2, 1992, p. 145-162.
- Margson E. Pile bending during earthquake. Lecture, 6 March 1975, ASCE-UC/ Berley Seminar on Design Construction and Performance of Deep Foundations, 1975.
- Matlock H., Foo S.H., Bryant L.L. Simulation of lateral pile behaviour. 6th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Montréal, vol. 2, 1978, p. 275-279.
- Mestat P. Les méthodes de résolution en comportement non linéaire. Théorie et application. *Rapport FAER 1.05.10.7*, *Laboratoire Central des Ponts et Chaussées* (littérature grise GEOGO1310), 1988.
- Meymond P.J. Shaking table scale model tests of nonlinear soil-pile-structure interaction in soft clay. Ph.D. Thesis. University of California, Berkley, 1998.

- Mezazigh S. Étude expérimentale de pieux chargés latéralement : proximité d'un talus et effet de groupe. Thèse de doctorat, université de Nantes, 1995, 266 p.
- Mylonakis G., Nikolaou A., Gazetas G. Soil-Pile-Bridge seismic interaction: Kinematic and inertial effects Part I: Soft soil. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 26, 1997, p. 337-359.
- Nikolaou S., Mylonakis G., Gazetas G., Tazoh T. – Kinematic pile bending during earthquakes: analysis and field measurements. *Géotechnique*, vol. 51, n° 5, 2001, p. 425-440.
- Nogami T. Soil pile interaction model for earthquake response analysis of offshore pile foundations. 2nd international conference on recent advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics, vol. 3. St Louis, 1991.
- Novak M., Aboul-Ella F. Impedance functions of piles in layered media. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, vol. 104, n° EM6, 1978.
- Novak M. Dynamic stiffness and damping of piles. Canadian Geotechnical Journal, vol. 11, 1974, p. 574-598.
- PHRI (Port and Harbour Research Institute) – Technical standards for port and harbour facilities in Japan. Bureau of ports and harbours. Ports and Harbour Research Institute. Ministry of Transport, 1980, 317 p.
- Poulos H. Behaviour of laterally loaded piles: 1-single pile. *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, vol. 101, n° SM5, 1971, p. 733-751.
- Remaud D. Pieux sous charges latérales : étude expérimentale de l'effet de groupe. Thèse de doctorat, université de Nantes, 1999, 328 p.
- Romagny J.-C. Programme de calcul d'un pieu isolé soumis à des efforts de flexion en tête et à des poussées latérales de sol (Notice d'utilisation). LCPC Paris, 1<sup>re</sup> version J.-L. Brangratz, R. Frank, M. Kutniak, 1985, 69 p.
- Rosquoët F. Pieux sous charge latérale cyclique. Thèse de doctorat, École centrale de Nantes-Université de Nantes, 2004, 305 p.
- Shahrour I., Benzenati I., Ousta R. Comportement des pieux sous chargement latéral dynamique : analyse bibliographique. Projet national Renforcement des sols par micropieux. Rapport interne N° FO/93/04, 1994.
- Souloumiac R. Méthode simplifiée de calcul des pieux en zones sismiques. Annales de l'institut technique du bâtiment et des travaux publics, n° 441, 1986, p. 61-87.
- Tokimatsu K., Suzuki H., Sato M. Effects of inertial and kinematic interaction on seismic behaviour of pile with embedded foundation. Soil Dynamics and Earthkaque Engineering, vol. 25, 2005, p. 753-762.
- Wilson S.W. Soil-pile-structure Interaction in liquefying sand and soft clay. Ph.D. Thesis. University of California, Davis, 1998, 173 p.