

Une approche micro-mécanique de la notion de contrainte effective en mécanique des milieux poreux

L. DORMIEUX

Université Paris-Est
Institut Navier
Cité Descartes
Champs-sur-Marne
77454 Marne-la-Vallée
Cedex 2
dormieux@lmsgc.enpc.fr

Résumé

La présente étude se propose d'aborder la notion de contrainte effective dans le cadre d'une approche micromécanique. A la suite des travaux classiques d'Auriault et Sanchez-Palencia (1977), on revisite brièvement la poroélasticité linéaire. Puis on s'intéresse au cas où la phase solide possède un comportement élastique non linéaire. On établit certains résultats généraux sur le rôle de la pression de pore dans le critère de rupture du milieu poreux. On applique enfin les techniques d'homogénéisation non linéaire pour déterminer la forme mathématique de ce dernier.

Mots-clés : contrainte effective, homogénéisation, non linéaire, rupture.

A micromechanical approach of the effective stress concept in poromechanics

Abstract

The present paper considers the effective stress concept in the framework of a micromechanics reasoning. Following the classical works of Auriault and Sanchez-Palencia (1977), linear poroelasticity is first briefly revisited. Then, the case of a non linear elastic behavior of the solid phase is examined. Some general results concerning the influence of the pore pressure on the strength of a porous medium are presented. The strength criterion is derived in particular cases by means of non linear homogenization techniques.

Key words : effective stress, homogenization, non linear, strength.

NDLR : Les discussions sur cet article sont acceptées jusqu'au 1^{er} août 2008.

Introduction

L'introduction du concept de contrainte effective en mécanique des milieux poreux est due à K. Terzaghi et M. Biot qui l'ont formulé de façon indépendante dès la première moitié du xx^e siècle. Il ne s'agit pas ici de faire l'historique de ce concept. Cependant, il est incontestable que son impact sur l'essor de la géotechnique a été décisif. Sur le plan théorique, il semble que la justification de l'idée de contrainte effective ait d'abord été apportée dans le cadre de la théorie linéaire de la poroélasticité, qui suppose que le comportement de la phase solide est élastique linéaire. Cependant, de nombreux auteurs, notamment à la suite de Terzaghi, ont cherché très tôt à l'utiliser dans le domaine du comportement irréversible de la phase solide et de l'analyse de la résistance des milieux poreux. Par ailleurs, alors qu'il avait été initialement introduit pour des matériaux saturés par une phase fluide unique, le recours à ce concept dans des situations multiphasiques a également été envisagé sous diverses formes (Bishop, 1960 ; Fredlund, 1985 ; Coussy, 1995 ; Schrefler *et al.*, 1997 ; Château et Dormieux, 2002).

La présente étude se propose d'aborder la notion de contrainte effective dans le cadre d'une approche micromécanique. A la suite des travaux classiques d'Auriault et Sanchez-Palencia (1977), on revisite brièvement la poroélasticité linéaire. Puis, on s'intéresse au cas où la phase solide possède un comportement élastique non linéaire. On établit certains résultats généraux sur le rôle de la pression de pore dans le critère de rupture du milieu poreux. On applique enfin les techniques d'homogénéisation non linéaire pour déterminer la forme mathématique de ce dernier.

Le point de vue micromécanique consiste à considérer la particule élémentaire introduite classiquement par la mécanique des milieux continus comme une structure et à déduire le comportement du matériau de la réponse de cette structure lorsqu'elle est soumise à un chargement défini de façon adéquate. Plus précisément, la mise en œuvre du raisonnement d'homogénéisation dans les milieux hétérogènes à microstructure aléatoire repose sur la notion de volume élémentaire représentatif (v.e.r.). Ce dernier incorpore de façon statistique l'ensemble des informations relatives à la géométrie de la microstructure et aux propriétés mécaniques des constituants. A cet effet, sa taille doit être grande devant celles des hétérogénéités (dimensions caractéristiques des pores et des grains).

Le v.e.r. sur lequel on travaille dans la suite est un volume Ω . Il est subdivisé en un sous-domaine solide et un espace poreux. Le vecteur position dans Ω à l'échelle microscopique est noté \underline{z} . Les efforts intérieurs dans le v.e.r. et les déformations qu'il subit sont décrits :

- à l'échelle microscopique, par un champ de contrainte $\sigma(\underline{z})$ et un champ de déformation $\varepsilon(\underline{z})$;
- à l'échelle macroscopique, par un tenseur de contrainte Σ et un tenseur de déformation \mathbf{E} .

La configuration de référence du v.e.r. correspond à l'état naturel en l'absence de contrainte macroscopique et de pression de fluide dans l'espace poreux. Ω_0^s et Ω_0^p représentent les configurations de référence de la phase solide et de l'espace poreux. $\Omega_0 = \Omega_0^s \cup \Omega_0^p$ représente ainsi la configuration de référence du v.e.r. et $|\Omega_0^s|$ désigne le volume correspondant.

Sous l'action d'un chargement mécanique, le sous-domaine solide et l'espace poreux subissent une transformation géométrique au terme de laquelle ils occupent respectivement les volumes Ω^s et Ω^p . I^{sf} désigne la position actuelle de l'interface solide/pores. Dans toute la suite, on fait l'hypothèse de transformations infinitésimales.

Sans restreindre la généralité, il est commode de supposer que la frontière extérieure du v.e.r. appartient à la phase solide. Pour rendre compte de la connexité de l'espace poreux, il suffit de supposer que la pression de pore qui règne dans Ω^p est uniforme.

Pour la suite, il est commode d'introduire le rapport $\phi = |\Omega^p|/|\Omega_0^p|$ qui fournit une valeur normalisée du volume actuel de l'espace poreux. Dans la configuration de référence, $\phi = \phi_0$, n'est autre que la porosité initiale ϕ_0 . Cependant, les variations de ϕ sous l'action d'un chargement mécanique ne sont pas égales à celles de la porosité.

Étant donné un champ $a(\underline{z})$ défini sur Ω , \bar{a} , \bar{a}^s et \bar{a}^p désignent les valeurs moyennes au sens intégral usuel du champ a respectivement sur Ω , Ω^s et Ω^p . On note $\mathbf{1}$ et \mathbf{I} les tenseurs identités du second et du quatrième ordre. On introduit également $\mathbf{J} = 1/3 \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$ et $\mathbf{K} = \mathbf{I} - \mathbf{J}$.

2

Poroélasticité linéaire

Dans cette section, le comportement du solide est élastique linéaire. Les propriétés du solide, supposées homogènes, sont caractérisées par le tenseur des modules d'élasticité \mathbf{C}^s , ou par le tenseur de souplesse $\mathbf{S}^s = \mathbf{C}^{s-1}$. Pour certaines illustrations, on se placera dans le cadre de l'isotropie, dans lequel \mathbf{C}^s s'écrit :

$$\mathbf{C}^s = 3k^s \mathbf{J} + 2\mu^s \mathbf{K} \quad (1)$$

où k^s est le module de compression ; μ^s , le module de cisaillement.

2.1

Définition du chargement

Il existe classiquement deux approches possibles pour définir le chargement mécanique subi par la phase solide Ω^s du v.e.r. (Zaoui, 2002). Lorsque l'on adopte les conditions aux limites dites « uniformes en contraintes », le chargement macroscopique est caractérisé par le tenseur de contraintes macroscopique Σ et la pression macroscopique P :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\underline{z}} \sigma &= 0 & (\Omega^s) \\ \sigma &= \mathbf{C}^s : \varepsilon & (\Omega^s) \\ \sigma \cdot \underline{n} &= \Sigma \cdot \underline{n} & (\partial\Omega) \\ \sigma \cdot \underline{n} &= -P \underline{n} & (I^{sf}) \end{aligned} \quad (2)$$

La seconde possibilité consiste à utiliser des conditions aux limites uniformes en déformation, pour lesquelles les paramètres de chargement sont à présent le tenseur de déformation macroscopique \mathbf{E} et la pression macroscopique P :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}_z \sigma &= 0 & (\Omega^s) \\
 \sigma &= \mathbb{C}^s : \varepsilon & (\Omega^s) \\
 \underline{\xi} &= \mathbf{E} \cdot \underline{z} & (\partial\Omega) \\
 \sigma \cdot \underline{n} &= -P \underline{n} & (I^{sf})
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

Dans les équations (2) et (3), le système matériel coïncide avec la phase solide. Cependant, il est commode d'étendre la définition du problème micromécanique à la totalité du volume élémentaire (solide et espace poreux saturé). Il suffit d'introduire un matériau fictif dans l'espace poreux, dont le comportement est de type élastique linéaire avec précontrainte :

$$\sigma = \mathbb{C}^p : \varepsilon - P \mathbf{1} \quad \text{avec} \quad |\mathbb{C}^p| \ll |\mathbb{C}^s| \tag{4}$$

La condition $|\mathbb{C}^p| \ll |\mathbb{C}^s|$ revient en fait à $\sigma \approx -P \mathbf{1}$ dans Ω^p et rend compte de la condition de continuité à l'interface fluide-solide I^{sf} dans les équations (2) et (3). L'intérêt de ce point de vue réside dans le fait qu'il permet de formuler le comportement local d'une façon unifiée pour la totalité du v.e.r. :

$$(\forall \underline{z} \in \Omega) \quad \sigma(\underline{z}) = \mathbb{C}(\underline{z}) : \varepsilon(\underline{z}) + \sigma_o(\underline{z}) \tag{5}$$

avec :

$$\mathbb{C}(\underline{z}) = \begin{cases} \mathbb{C}^p & (\Omega^p) \\ \mathbb{C}^s & (\Omega^s) \end{cases} \quad \sigma_o(\underline{z}) = \begin{cases} -P \mathbf{1} & (\Omega^p) \\ 0 & (\Omega^s) \end{cases} \tag{6}$$

Ainsi, dans le cadre des conditions aux limites en contraintes, le problème mécanique (2) peut être étendu à la totalité du v.e.r. Ω sous la forme :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}_z \sigma &= 0 & (\Omega) \\
 \sigma &= \mathbb{C}(\underline{z}) : \varepsilon + \sigma_o(\underline{z}) & (\Omega) \\
 \sigma \cdot \underline{n} &= \Sigma \cdot \underline{n} & (\partial\Omega)
 \end{aligned}
 \tag{7}$$

Avec les conditions aux limites uniformes en déformation, l'équation (3) est maintenant remplacée par :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}_z \sigma &= 0 & (\Omega) \\
 \sigma &= \mathbb{C}(\underline{z}) : \varepsilon + \sigma_o(\underline{z}) & (\Omega) \\
 \underline{\xi} &= \mathbf{E} \cdot \underline{z} & (\partial\Omega)
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

2.2

Conditions drainées

Pour commencer, on traite brièvement les cas de chargement définis respectivement par ($\Sigma \neq 0, P = 0$) et par ($\mathbf{E} \neq 0, P = 0$). Cela revient à poser $\sigma_o = 0$ dans (7) et (8) :

$$\sigma = \mathbb{C}(\underline{z}) : \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon = \mathbb{S}(\underline{z}) : \sigma \quad \text{avec} \quad \mathbb{S}(\underline{z}) = \mathbb{C}(\underline{z})^{-1} \tag{9}$$

Aussi bien dans l'équation (7) que dans l'équation (8), la réponse dépend linéairement du paramètre de chargement, c'est-à-dire de Σ ou de \mathbf{E} . Cette remarque conduit au concept important de tenseur de « localisation ».

Plus précisément, considérons d'abord les conditions uniformes en contrainte (problème (7)). Le champ de contrainte $\sigma(\underline{z})$ dans le v.e.r. est proportionnel au paramètre de chargement Σ . Il existe donc un tenseur du quatrième ordre, dit « tenseur de localisation de la contrainte », noté ici $\mathbb{B}(\underline{z})$ (Fig. 1) :

$$(\forall \underline{z} \in \Omega) \quad \sigma(\underline{z}) = \mathbb{B}(\underline{z}) : \Sigma \tag{10}$$

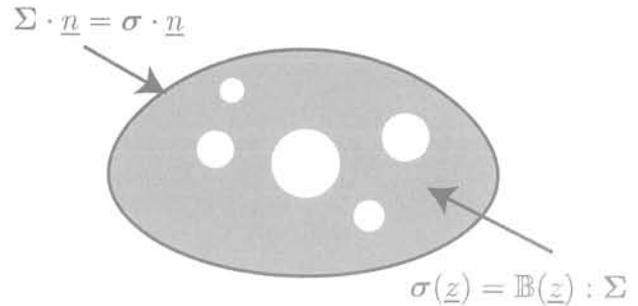


FIG. 1 Le tenseur \mathbb{B} de localisation de la contrainte.

On note que la règle de moyenne sur les contraintes $\Sigma = \bar{\sigma}$ qui résulte des conditions aux limites choisies implique que $\mathbb{B} = \mathbf{I}$. En vertu de la condition $|\mathbb{C}^p| \ll |\mathbb{C}^s|$, l'état de contrainte dans l'espace poreux est $\sigma \approx 0$. Ceci revient à écrire que $|\mathbb{B}| \approx 0$ dans Ω^p et implique que :

$$\mathbf{I} = \bar{\mathbb{B}} = (1 - \varphi_o) \bar{\mathbb{B}}^s + \varphi_o \bar{\mathbb{B}}^p \approx (1 - \varphi_o) \bar{\mathbb{B}}^s \tag{11}$$

La déformation macroscopique \mathbf{E} étant définie comme la moyenne $\bar{\varepsilon}$, la combinaison des équations (9) et (10) fournit :

$$\mathbf{E} = \mathbb{S}^{hom} : \Sigma \tag{12}$$

avec :

$$\mathbb{S}^{hom} = \bar{\mathbb{S}} : \bar{\mathbb{B}} \tag{13}$$

L'équation (12) montre que le comportement macroscopique est linéaire élastique et \mathbb{S}^{hom} s'interprète comme le tenseur de souplesse homogénéisé. Les tenseurs de souplesse \mathbb{S}^s du solide et \mathbb{S}^p de l'espace poreux (rappelons le caractère fictif de ce dernier) étant uniformes, \mathbb{S}^{hom} s'écrit :

$$\mathbb{S}^{hom} = (1 - \varphi_o) \mathbb{S}^s : \bar{\mathbb{B}}^s + \varphi_o \mathbb{S}^p : \bar{\mathbb{B}}^p \tag{14}$$

soit, en se souvenant de la relation (11) :

$$\mathbb{S}^{hom} = \mathbb{S}^s + \varphi_o \mathbb{S}^p : \bar{\mathbb{B}}^p \tag{15}$$

La souplesse macroscopique apparaît comme la somme des contributions respectives du solide et de l'espace poreux. Bien que $\bar{\mathbb{B}}^p \approx 0$, le second terme de (15) ne disparaît pas car $|\mathbb{S}^p| \gg |\mathbb{S}^s|$.

De façon similaire, dans le cadre des conditions uniformes en déformation (8), le champ de déformation microscopique ε dépend linéairement de \mathbf{E} . Cette propriété est prise en compte par l'intermédiaire du tenseur de localisation de la déformation $\mathbb{A}(\underline{z})$ (Fig. 2) :

$$(\forall \underline{z} \in \Omega) \quad \varepsilon(\underline{z}) = \mathbb{A}(\underline{z}) : \mathbf{E} \tag{16}$$

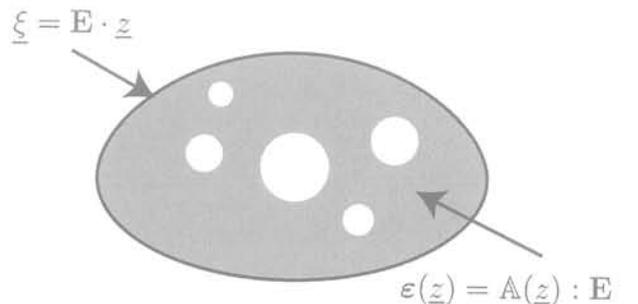


FIG. 2 Le tenseur \mathbb{A} de localisation de la déformation.

La règle de moyenne $\mathbf{E} = \bar{\varepsilon}$ qui résulte de ce type de conditions aux limites implique que $\bar{\mathbb{A}} = \mathbf{I}$:

$$\mathbf{I} = (1 - \varphi_o) \bar{\mathbb{A}}^s + \varphi_o \bar{\mathbb{A}}^p \tag{17}$$

On définit alors la contrainte macroscopique comme la moyenne du champ de contrainte microscopique : $\Sigma = \bar{\sigma}$. En vertu des équations (9) et (16), il résulte que :

$$\Sigma = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} \quad \text{avec} \quad \mathbb{C}^{hom} = \overline{\mathbb{C} : \mathbb{A}} \quad (18)$$

\mathbb{C}^{hom} s'interprète comme le tenseur des modules d'élasticité en condition drainée. En utilisant l'équation (17) et en se souvenant du fait que $|\mathbb{C}^p| \rightarrow 0$, il peut être mis sous la forme :

$$\mathbb{C}^{hom} = (1 - \varphi_o) \mathbb{C}^s : \overline{\mathbb{A}^s} = \mathbb{C}^s : (\mathbb{I} - \varphi_o \overline{\mathbb{A}^p}) \quad (19)$$

Le terme $\varphi_o \overline{\mathbb{A}^p}$ dans l'expression (19) de \mathbb{C}^{hom} rend compte de la réduction de raideur imputable à l'espace poreux.

D'une part, les conditions aux limites uniformes en contrainte conduisent au tenseur de souplesse homogénéisé \mathbb{S}^{hom} . D'autre part, le tenseur des modules d'élasticité macroscopique \mathbb{C}^{hom} a été obtenu dans le cadre des conditions aux limites uniformes en déformation. La cohérence de ces deux différentes techniques réside dans le fait que les conditions aux limites correspondantes induisent des réponses identiques à l'échelle locale, à l'exception du voisinage de la frontière $\partial\Omega$, sur une épaisseur de l'ordre de la taille des hétérogénéités. Cela revient à dire que $\mathbb{S}^{hom} = \mathbb{C}^{hom-1}$, pourvu que la taille du v.e.r. soit grande devant celles des hétérogénéités. Plus précisément, Hill et Mandel ont prouvé que :

$$\mathbb{S}^{hom} : \mathbb{C}^{hom} = \mathbb{I} + \mathcal{O}\left(\frac{d}{\ell}\right)^3 \quad (20)$$

où d et ℓ désignent respectivement la taille des hétérogénéités et celle du v.e.r.

2.3

Le couplage poroélastique linéaire

Le problème (7), défini par Σ et P , dépend linéairement de ces deux paramètres de chargement. Il est donc possible d'étudier la réponse au chargement $\mathcal{L}_1 = (\Sigma, P)$ en le scindant en deux composantes, respectivement $\mathcal{L}_1 = (\Sigma + P\mathbf{1}, 0)$ et $\mathcal{L}_2 = (-P\mathbf{1}, P)$.

Dans le chargement \mathcal{L}_1 , la contrainte macroscopique appliquée à la frontière $\partial\Omega$ est $\Sigma + P\mathbf{1}$ et il n'y a pas de pression dans l'espace poreux. La réponse à un tel chargement a été déterminée au paragraphe 2.2. Les champs de contrainte et de déformation microscopiques s'écrivent :

$$\begin{aligned} (\forall \underline{z} \in \Omega) \quad \sigma_1 &= \mathbb{B} : (\Sigma + P\mathbf{1}) \\ \varepsilon_1 &= \mathbb{S}(\underline{z}) : \mathbb{B} : (\Sigma + P\mathbf{1}) \end{aligned} \quad (21)$$

Dans le chargement \mathcal{L}_2 , une même pression P est appliquée sur la frontière $\partial\Omega$ et sur l'interface fluide-solide Γ^f . Ainsi, le domaine solide Ω^s est soumis à une pression uniforme sur l'intégralité de sa frontière. Puisque le solide est supposé homogène, les champs microscopiques de contrainte et de déformation dans Ω^s sont uniformes et peuvent être étendus avec les mêmes valeurs à l'espace poreux :

$$(\forall \underline{z} \in \Omega) \quad \sigma_2 = -P\mathbf{1} \quad ; \quad \varepsilon_2 = -PS^s : \mathbf{1} \quad (22)$$

En vertu de la linéarité, la réponse au chargement $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$ est :

$$\begin{aligned} (\forall \underline{z} \in \Omega) \quad \sigma &= \mathbb{B} : (\Sigma + P\mathbf{1}) - P\mathbf{1} \quad ; \\ \varepsilon &= \mathbb{S} : \mathbb{B} : (\Sigma + P\mathbf{1}) - PS^s : \mathbf{1} \end{aligned} \quad (23)$$

Compte tenu de la relation (13), la déformation macroscopique $\mathbf{E} = \bar{\varepsilon}$ se met sous la forme :

$$\mathbf{E} = \mathbb{S}^{hom} : (\Sigma + P\mathbf{1}) - PS^s : \mathbf{1} \quad (24)$$

ou encore

$$\mathbf{E} = \mathbb{S}^{hom} : (\Sigma + P\mathbf{1}) \Leftrightarrow \Sigma = \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} - \mathbf{B}P \quad (25)$$

avec :

$$\mathbf{B} = \mathbf{1} - \mathbb{C}^{hom} : \mathbb{S}^s : \mathbf{1} \quad (26)$$

La relation (25) montre que le tenseur $\Sigma + P\mathbf{1}$ contrôle la déformation macroscopique induite par \mathcal{L} et porte à ce titre le nom de « contrainte effective ». Cette relation constitue la première équation d'état du comportement poroélastique. La forme isotrope de (26) mérite d'être notée. Elle fait intervenir le module de compression homogénéisé k^{hom} et le module de compression k^s du solide (voir (1)) :

$$\mathbf{B} = b\mathbf{1} \quad \text{avec} \quad b = 1 - \frac{k^{hom}}{k^s} \quad (27)$$

On note que la contrainte effective de Biot $\Sigma + P\mathbf{1}$ tend vers celle de Terzaghi, c'est-à-dire $\Sigma + P\mathbf{1}$, dans la limite $k^{hom}/k^s \rightarrow 0$.

La seconde équation d'état concerne les variations du volume des pores, décrites par celles du volume normalisé ϕ . Le point de départ consiste à observer que :

$$\phi - \phi_o = \phi_o \mathbf{1} : \bar{\varepsilon}^p \quad (28)$$

On tire alors de la relation (23) que :

$$\phi_o \mathbf{1} : \bar{\varepsilon}^p = \phi_o \mathbf{1} : \overline{\mathbb{S} : \mathbb{B}^p} : (\Sigma + P\mathbf{1}) - \phi_o P\mathbf{1} : \mathbb{S}^s : \mathbf{1} \quad (29)$$

$\phi_o \mathbf{1} : \overline{\mathbb{S} : \mathbb{B}^p}$ peut être éliminé à l'aide de la relation (15).

En introduisant (25) et (26) dans (29), on obtient finalement :

$$\phi - \phi_o = \mathbf{B} : \mathbf{E} + \frac{P}{N} \quad (30)$$

où :

$$\frac{1}{N} = (\mathbf{B} - \phi_o \mathbf{1}) : \mathbb{S}^s : \mathbf{1} \quad (31)$$

À l'aide de la formule (27), on montre la forme isotrope de l'équation (31) :

$$\frac{1}{N} = \frac{b - \phi_o}{k^s} \quad (32)$$

Les équations (25) et (30) constituent la base de la théorie poroélastique linéaire de Biot. Il est remarquable que les coefficients poroélastiques \mathbf{B} et N de (26) et (31) puissent être déterminés à partir des propriétés élastiques du solide et de celles du matériau poreux drainé, regroupées dans le tenseur \mathbb{C}^{hom} .

2.4

Approche énergétique

On raisonne ci-après dans le cadre des conditions aux limites uniformes en déformation. La puissance mécanique \dot{W} fournie à la phase solide Ω^s sous l'action du taux de chargement $(\dot{\underline{\varepsilon}}, \dot{p})$ comporte deux contributions :

– la puissance de la pression de pore agissant sur l'interface $\Gamma^f = \partial\Omega^f \cap \partial\Omega^s$;

– la puissance des forces surfaciques $\sigma \underline{n}$ agissant sur la frontière $\partial\Omega \cap \partial\Omega^s$ dans la vitesse $\dot{\mathbf{E}} \cdot \underline{z}$ qui est prescrite à cette interface :

$$\dot{W} = \int_{\partial\Omega} \underline{z} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \underline{n}) dS + \int_{I^s} -P \underline{n} \cdot \dot{\underline{\xi}} dS \quad (33)$$

où \underline{n} désigne le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega^s = \partial\Omega \cup I^s$, orienté vers l'extérieur du solide Ω^s .

En invoquant l'équation de l'équilibre $\text{div}_z \boldsymbol{\sigma} = 0$, la première intégrale du membre de droite devient :

$$\dot{E}_{ij} \int_{\partial\Omega} z_j \sigma_{ik} n_k dS = \dot{E}_{ij} \int_{\Omega} \sigma_{ij} dV_z = \overline{\sigma}_{ij} \dot{E}_{ij} |\Omega_o| \quad (34)$$

Par ailleurs, le flux de la vitesse $\dot{\underline{\xi}}$ à travers l'interface fluide-solide dans la deuxième intégrale n'est autre que le taux de variation du volume des pores :

$$\int_{I^s} -\underline{n} \cdot \dot{\underline{\xi}} dS = |\Omega_o| \dot{\phi} \quad (35)$$

Combinant les relations (34) et (35) dans (33), la puissance fournie au domaine solide Ω^s est :

$$\dot{W} = |\Omega_o| \left(\Sigma_{ij} \dot{E}_{ij} + P \dot{\phi} \right) = |\Omega_o| \left(\Sigma : \dot{\mathbf{E}} + P \dot{\phi} \right) \quad (36)$$

On introduit les densités volumiques d'énergie élastique $\Psi(\mathbf{E}, P)$ et d'énergie potentielle $\Psi^*(\mathbf{E}, P)$ relatives à la phase solide du v.e.r. Elles sont toutes deux fonctions de \mathbf{E} et P :

$$\Psi(\mathbf{E}, P) = \frac{1}{2|\Omega_o|} \int_{\Omega^s} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}^s : \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad ; \quad (37)$$

$$\Psi^* = \Psi - P(\phi - \phi_o)$$

En l'absence de mécanismes dissipatifs, le travail fourni au solide est stocké sous forme d'énergie élastique : $\dot{W} = |\Omega_o| \dot{\Psi}$. Il en résulte que :

$$\dot{\Psi}^* = \Sigma : \dot{\mathbf{E}} - (\phi - \phi_o) \dot{P} \Rightarrow \begin{cases} \Sigma = \frac{\partial \Psi^*}{\partial \mathbf{E}} \\ \phi - \phi_o = -\frac{\partial \Psi^*}{\partial P} \end{cases} \quad (38)$$

Les relations (38) font apparaître que l'énergie potentielle Ψ^* est un potentiel thermodynamique pour le choix des variables d'état \mathbf{E} et P . En vertu de la linéarité des équations d'état macroscopiques (25) et (30), Ψ^* est une fonction quadratique de ses arguments \mathbf{E} et P :

$$\Psi^* = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} - \frac{P^2}{2N} - P \mathbf{B} : \mathbf{E} \quad (39)$$

La combinaison de (37) et de (39) conduit à l'expression suivante de Ψ :

$$\Psi = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} + \frac{P^2}{2N} \quad (40)$$

2.5

Niveau de déformation moyen dans la phase solide

En vue d'applications ultérieures, il est intéressant d'évaluer le niveau de déformation local dans la phase solide en fonction du chargement macroscopique, défini par \mathbf{E} et P , ou par Σ et P .

Considérons pour commencer la déformation moyenne $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^s$, obtenue à partir de la moyenne de l'équation d'état locale $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{S}^s : \boldsymbol{\sigma}$ dans le solide :

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^s = \mathbb{S}^s : \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (41)$$

La règle de moyenne des contraintes donne par ailleurs :

$$\Sigma = (1 - \phi_o) \bar{\boldsymbol{\sigma}}^s - \phi_o P \mathbf{1} \quad (42)$$

En combinant (41) avec (42), on obtient une expression de la déformation moyenne en fonction de la contrainte macroscopique et de la pression de pore :

$$(1 - \phi_o) \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^s = \mathbb{S}^s : (\Sigma + P \phi_o \mathbf{1}) \quad (43)$$

Il convient d'observer que $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^s$ est contrôlée par la contrainte effective $\Sigma + P \phi_o \mathbf{1}$. Si on décompose la déformation microscopique et sa moyenne dans la phase solide selon leurs composantes sphérique et déviatorique, on obtient :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_d + \frac{1}{3} \varepsilon_v \mathbf{1} \quad ; \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^s = \bar{\varepsilon}_d^s + \frac{1}{3} \bar{\varepsilon}_v^s \mathbf{1} \quad (44)$$

avec $\varepsilon_v = \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon}$. Dans le cas d'un comportement isotrope de la phase solide, la relation (43) donne :

$$(1 - \phi_o) \bar{\varepsilon}_v^s = \frac{1}{3k^s} \text{tr} (\Sigma + P \phi_o \mathbf{1}) \quad (45)$$

$$(1 - \phi_o) \bar{\varepsilon}_d^s = \frac{1}{2\mu^s} \Sigma_d$$

où $\Sigma_d = \mathbb{K} : \Sigma$ est le déviateur de la contrainte macroscopique.

La formule (45) exprime que la moyenne de la déformation déviatorique $\bar{\varepsilon}_d^s$ n'est affectée que par Σ_d . Ce résultat peut être illustré sur l'exemple d'une sphère creuse soumise à une contrainte de confinement uniforme sur sa frontière extérieure. La déformation déviatorique induite par ce chargement dans la phase solide est une composante essentielle du mécanisme de déformation de la sphère. Cependant, par raison de symétrie, la moyenne $\bar{\varepsilon}_d^s$ est nécessairement nulle. Cette remarque suggère qu'une telle quantité ne fournit pas une estimation adéquate du niveau de déformation déviatorique dans la phase solide. Pour faire face à cette difficulté, on considère la grandeur scalaire ε_{dr} dite déformation déviatorique équivalente :

$$\varepsilon_d = \sqrt{\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_d : \boldsymbol{\varepsilon}_d} \quad (46)$$

On se limite ci-après au cas où la phase solide est isotrope (voir (1)). Dans ce cas, la moyenne quadratique $\bar{\varepsilon}_d^s$ est reliée à la composante déviatorique de l'énergie élastique dans la phase solide. On dispose ainsi d'une mesure énergétique de la déformation déviatorique dans le solide. Celle-ci est exempte des limitations de $\bar{\varepsilon}_d^s$. On va voir qu'elle peut être évaluée à partir de la dérivée de l'énergie potentielle de la phase solide par rapport au module de cisaillement μ^s de cette dernière (Kreher, 1990). Rappelons que l'énergie potentielle de la phase solide s'écrit (voir (37)) :

$$|\Omega_o| \Psi^* = \frac{1}{2} \int_{\Omega^s} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}^s : \boldsymbol{\varepsilon} dV - P \int_{\Omega^f} \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (47)$$

On note que Ψ^* dépend de μ^s explicitement à travers le tenseur \mathbb{C}^s et implicitement à travers le champ de déformation microscopique $\boldsymbol{\varepsilon}$. Observant que $\partial \mathbb{C}^s / \partial \mu^s = 2\mathbb{K}$ (cf (1)), il est facile de voir que :

$$|\Omega_o| \frac{\partial \Psi^*}{\partial \mu^s} = \int_{\Omega^s} \boldsymbol{\varepsilon}_d : \boldsymbol{\varepsilon}_d dV + \int_{\Omega^s} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mu^s} : \mathbb{C}^s : \boldsymbol{\varepsilon} dV + \quad (48)$$

$$\int_{\Omega^f} -P \mathbf{1} : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mu^s} dV$$

ou encore :

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial \mu^s} = 2(1 - \phi_o) \bar{\varepsilon}_d^{2s} + \sigma : \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mu^s} \quad (49)$$

Le lemme de Hill (voir annexe) peut être appliqué au couple $\sigma' = \sigma$ et $\varepsilon^* = \partial \varepsilon / \partial \mu^s$. En effet, le déplacement associé à $\partial \varepsilon / \partial \mu^s$ est $\xi^* = \partial \xi / \partial \mu^s$ et ce dernier vérifie des conditions aux limites uniformes en déformation ($\mathbf{E}^* = 0$), de sorte que le second terme du membre de droite disparaît. Avec (39), on obtient donc :

$$2(1 - \phi_o) \bar{\varepsilon}_d^{2s} = \frac{\partial}{\partial \mu^s} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} - \frac{P^2}{2N} - P \mathbf{B} : \mathbf{E} \right) \quad (50)$$

Il est possible de simplifier encore cette expression dans le cas isotrope. Avec l'aide de (27) et (32), les dérivées de \mathbf{B} et de $1/N$ s'écrivent :

$$\frac{\partial}{\partial \mu^s} (\mathbf{B}) = -\frac{1}{k^s} \frac{\partial k^{hom}}{\partial \mu^s} \mathbf{1} ; \quad \frac{\partial}{\partial \mu^s} \left(\frac{1}{N} \right) = -\frac{1}{k^{s2}} \frac{\partial k^{hom}}{\partial \mu^s} \quad (51)$$

En introduisant (51) dans (50), on obtient finalement :

$$2(1 - \phi_o) \bar{\varepsilon}_d^{2s} = \frac{1}{2} \frac{\partial k^{hom}}{\partial \mu^s} (\text{tr } \mathbf{E} + \frac{P}{k^s})^2 + \frac{\partial \mu^{hom}}{\partial \mu^s} \mathbf{E}_d : \mathbf{E}_d \quad (52)$$

De façon équivalente, l'équation d'état (25) peut être utilisée pour obtenir une expression de $\bar{\varepsilon}_d^{2s}$ en fonction de la contrainte macroscopique et de la pression de pore. En utilisant la relation de Biot (27) relative au coefficient b , on décompose (25) selon ses parties sphérique et déviatorique :

$$\Sigma_m + P = k^{hom} (\text{tr } \mathbf{E} + \frac{P}{k^s}) ; \quad \Sigma_d = 2\mu^{hom} \mathbf{E}_d \quad (53)$$

où la contrainte moyenne Σ_m et les contraintes et déformations déviatoriques équivalentes sont définies par :

$$\Sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr} (\Sigma) ; \quad \Sigma_d = \sqrt{\frac{1}{2} \Sigma_d : \Sigma_d} ; \quad \mathbf{E}_d = \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{E}_d : \mathbf{E}_d} \quad (54)$$

En reportant (53) dans (52), il vient :

$$4(1 - \phi_o) \bar{\varepsilon}_d^{2s} = -\frac{\partial}{\partial \mu^s} \left(\frac{1}{k^{hom}} \right) (\Sigma_m + P)^2 - \frac{\partial}{\partial \mu^s} \left(\frac{1}{\mu^{hom}} \right) \Sigma_d^2 \quad (55)$$

Tandis que la moyenne tensorielle de la déformation déviatorique $\bar{\varepsilon}_d^{2s}$ est indépendante de la pression de pore (voir (45)), il apparaît que la moyenne quadratique scalaire $\bar{\varepsilon}_d^{2s}$ dépend de la pression de pore à travers la contrainte effective de Terzaghi $\Sigma + P\mathbf{1}$.

La même démarche peut être appliquée à la détermination de la moyenne quadratique $\bar{\varepsilon}_v^{2s}$. En particulier, on montre que l'équation homologue de (50) est :

$$\frac{1}{2} (1 - \phi_o) \bar{\varepsilon}_v^{2s} = \frac{\partial}{\partial k^s} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^{hom} : \mathbf{E} - \frac{P^2}{2N} - P \mathbf{B} : \mathbf{E} \right) \quad (56)$$

3

Poroélasticité non linéaire

3.1

La méthode sécante

On s'intéresse à présent à la situation où le comportement de la phase solide est élastique non linéaire. Il est caractérisé par un potentiel $\psi^s(\varepsilon)$ à l'aide duquel l'équation d'état du solide s'écrit :

$$\sigma = \frac{\partial \psi^s}{\partial \varepsilon} \quad (57)$$

$\psi^s(\varepsilon)$ représente physiquement la densité d'énergie libre du solide.

On suppose de plus que (57) peut se mettre sous la forme :

$$\sigma = \mathbb{C}^s(\varepsilon) : \varepsilon \quad (58)$$

$\mathbb{C}^s(\varepsilon)$ est appelé tenseur d'élasticité sécant.

Par exemple, si $\psi^s(\varepsilon)$ dépend de ε à travers la déformation volumique $\varepsilon_v = \text{tr } \varepsilon$ et l'invariant déviatorique ε_d introduit en (46), $\psi^s = \psi^s(\varepsilon_v, \varepsilon_d)$, (57) devient :

$$\sigma = \frac{\partial \psi^s}{\partial \varepsilon_v} \mathbf{1} + \frac{1}{2\varepsilon_d} \frac{\partial \psi^s}{\partial \varepsilon_d} \varepsilon_d \quad (59)$$

On observe que (59) est bien de la forme (58) avec :

$$\mathbb{C}^s(\varepsilon) = 3k^s(\varepsilon_v, \varepsilon_d) \mathbb{J} + 2\mu^s(\varepsilon_v, \varepsilon_d) \mathbb{K} \quad \text{avec}$$

$$\begin{cases} k^s = \frac{1}{\varepsilon_v} \frac{\partial \psi^s}{\partial \varepsilon_v} \\ \mu^s = \frac{1}{4\varepsilon_d} \frac{\partial \psi^s}{\partial \varepsilon_d} \end{cases} \quad (60)$$

Réciproquement, il est utile d'observer que deux fonctions $k^s(\varepsilon_v, \varepsilon_d)$ et $\mu^s(\varepsilon_v, \varepsilon_d)$ définissent un comportement élastique non linéaire à la condition que :

$$\varepsilon_v \frac{\partial k^s}{\partial \varepsilon_d} = 4\varepsilon_d \frac{\partial \mu^s}{\partial \varepsilon_v} \quad (61)$$

On raisonne par exemple avec des conditions aux limites uniformes en déformation. Le chargement est donc défini par le tenseur de déformation macroscopique \mathbf{E} et la pression de pore P . Les champs microscopiques de contrainte, de déformation et de déplacement σ, ε, ξ dans le v.e.r. sont solutions du problème suivant :

$$\begin{aligned} \text{div } \sigma &= 0 & (\Omega) & (a) \\ \sigma(\underline{z}) &= \mathbb{C}(\underline{z}) : \varepsilon(\underline{z}) + \sigma_o(\underline{z}) & (\Omega) & (b) \\ \varepsilon &= \frac{1}{2} (\text{grad } \underline{\xi} + \text{grad } \underline{\xi}) & (\Omega) & (c) \\ \underline{\xi}(\underline{z}) &= \mathbf{E} \cdot \underline{z} & (\partial\Omega) & (d) \end{aligned} \quad (62)$$

où :

$$\begin{cases} \underline{z} \in \Omega^s : \mathbb{C}(\underline{z}) = \mathbb{C}^s(\varepsilon(\underline{z})) \\ \underline{z} \in \Omega^p : \mathbb{C}(\underline{z}) = \mathbb{C}^p \end{cases} \quad (63)$$

$$\sigma_o(\underline{z}) = \begin{cases} 0 & (\Omega^s) \\ -P\mathbf{1} & (\Omega^p) \end{cases}$$

(62) est formellement identique à (8), à l'exception du fait que (6) est maintenant remplacé par (63). Rappelons que $\mathbb{C}^p \rightarrow 0$.

Il y a cependant une différence essentielle entre le problème linéaire (8) et le problème non linéaire (62) : constant dans le premier cas, le tenseur d'élasticité local $\mathbb{C}^s(\varepsilon(\underline{z}))$ dépend en revanche de la position dans la phase solide et du niveau de chargement dans le cas non linéaire. Malheureusement, les schémas d'homogénéisation utilisés classiquement pour les milieux désordonnés ne sont pas capables de faire face à ce type d'hétérogénéité. Il est donc nécessaire de simplifier le problème.

L'idée consiste à introduire un niveau de déformation dit « effectif » destiné à prendre en compte la non linéarité de façon approchée (Suquet, 1997). Notée ε^{ef} , de nature tensorielle ou scalaire, il est naturel de s'attendre à ce que cette déformation effective soit une moyenne bien choisie du champ de déformation microscopique dans le solide. Elle est donc *a priori* fonction du chargement macroscopique (Σ , P) ou (Σ , P). La simplification réside dans le fait de remplacer l'élasticité hétérogène $\mathbb{C}^s(\varepsilon(z))$ par une estimation uniforme :

$$(\forall \underline{z} \in \Omega^s) \quad \mathbb{C}^s(\varepsilon(\underline{z})) \approx \mathbb{C}^s(\varepsilon^{ef}) \quad (64)$$

Dans le cadre de (64), on est formellement ramené au cadre linéaire. On retrouve donc les équations d'état (25) et (30), à ceci près que les coefficients poroélastiques sont fonctions de ε^{ef} :

$$\mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^{hom}(\varepsilon^{ef}) ; \mathbf{B} = \mathbf{B}(\varepsilon^{ef}) ; N = N(\varepsilon^{ef}) \quad (65)$$

Il convient alors de déterminer la dépendance de la déformation effective retenue en fonction des paramètres de chargement, par exemple (Σ , P). ε^{ef} se présente comme la solution d'un problème non linéaire de la forme suivante :

$$\varepsilon^{ef} = \mathcal{E}(\Sigma, P, \mathbb{C}^s(\varepsilon^{ef})) \quad (66)$$

dont la résolution conduit à la valeur de ε^{ef} en fonction de Σ et P : $\varepsilon^{ef} = \varepsilon^{ef}(\Sigma, P)$. Introduisant cette détermination de ε^{ef} dans (65), on obtient la généralisation non linéaire de (25)-(30) :

$$\Sigma = \mathbb{C}^{hom}(\Sigma, P) : \mathbf{E} - \mathbf{B}(\Sigma, P)P \quad (67)$$

$$\phi - \phi_0 = \mathbf{B}(\Sigma, P) : \mathbf{E} + \frac{P}{N(\Sigma, P)}$$

dans lesquelles l'expression de $\mathbf{B}(\Sigma, P)$ en fonction de $\mathbb{C}^{hom}(\Sigma, P)$ ainsi que celle de $N(\Sigma, P)$ en fonction de $\mathbf{B}(\Sigma, P)$ sont formellement identiques à celles du cas linéaire :

$$\mathbf{B}(\Sigma, P) = \mathbf{1} : (\mathbb{I} - \mathbb{C}^s(\Sigma, P))^{-1} : \mathbb{C}^{hom}(\Sigma, P) \\ \frac{1}{N(\Sigma, P)} = \mathbf{1} : \mathbb{C}^s(\Sigma, P)^{-1} : (-\phi_0 \mathbf{1} + \mathbf{B}(\Sigma, P)) \quad (68)$$

3.2

Application au cas isotrope

Comme dans (60), on se place dans le cas isotrope, dans l'hypothèse où ψ^s est une fonction de ε_v et ε_d . Dans l'esprit du concept de déformation effective, on adopte l'approximation (64) $\mathbb{C}^s(\varepsilon) \approx \mathbb{C}^s(\varepsilon^{ef})$. On développe ici un modèle isotrope où la déformation effective est caractérisée par deux invariants scalaires :

$$\varepsilon^{ef} = (\varepsilon_v^{ef}, \varepsilon_d^{ef}) ; \varepsilon_v^{ef} = \text{tr} \bar{\varepsilon}^s ; \varepsilon_d^{ef} = \sqrt{\varepsilon_2^s} \quad (69)$$

L'estimation approchée de l'élasticité du solide s'écrit donc :

$$\mathbb{C}^s(\varepsilon^{ef}) = 3k^s(\varepsilon_v^{ef}, \varepsilon_d^{ef})\mathbb{J} + 2\mu^s(\varepsilon_v^{ef}, \varepsilon_d^{ef})\mathbb{K} \quad (70)$$

Les quantités ε_v^{ef} et ε_d^{ef} sont données en fonction de la contrainte macroscopique Σ et de la pression de pore P par (45) et (55). Plus précisément, ε_v^{ef} dépend de $\Sigma + P\phi_0\mathbf{1}$, tandis que ε_d^{ef} est une fonction de $\Sigma + P\mathbf{1}$. En vertu de (65), l'élasticité macroscopique \mathbb{C}^{hom} de même que

\mathbf{B} et N , va dépendre à la fois de $\Sigma + P\phi_0\mathbf{1}$ et de $\Sigma + P\mathbf{1}$. Ainsi, dans le cas général, la non-linéarité macroscopique ne saurait être contrôlée par un tenseur de contrainte effective (Dormieux *et al.*, 2002). Cependant, deux exceptions méritent d'être mentionnées :

- k^s et μ^s ne dépendent pas de ε_d . Dans ce cas, (61) montre que μ^s est nécessairement constant. D'après (45), ε_v^{ef} est déterminée à partir de la solution de :

$$(1 - \phi_0)\varepsilon_v^{ef} = \frac{1}{3k^s} \text{tr}(\Sigma + P\phi_0\mathbf{1}) \quad (a) \\ k^s = k^s(\varepsilon_v^{ef}) \quad (b) \quad (71)$$

ε_v^{ef} apparaît comme une fonction de $\Sigma_m + P\phi_0$ qui contrôle donc la non-linéarité à l'échelle macroscopique (voir (65)) ;

- k^s et μ^s ne dépendent pas de ε_v . Dans ce cas, la relation (61) montre que k^s est nécessairement constant. En vertu de (55), ε_d^{ef} est solution de :

$$4(1 - \phi_0)\varepsilon_d^{ef2} = -\frac{\partial}{\partial \mu^s} \left(\frac{1}{k^{hom}} \right) (\Sigma_m + P)^2 - \frac{\partial}{\partial \mu^s} \left(\frac{1}{\mu^{hom}} \right) \Sigma_d^2 \quad (a) \\ k^{hom} = K(k^s, \mu^s) ; \mu^{hom} = M(k^s, \mu^s) \quad (b) \quad (72) \\ \mu^s = \mu^s(\varepsilon_d^{ef}) \quad (c)$$

Cette fois, la déformation ε_v^{ef} est fonction de $\Sigma_m + P$ et de Σ_d et c'est la contrainte effective de Terzaghi $\Sigma + P\mathbf{1}$ qui contrôle la non-linéarité du comportement à l'échelle macroscopique.

4

Résistance d'un matériau poreux

On suppose dans cette section que la résistance de la phase solide à l'échelle microscopique est caractérisée par un critère de la forme $f^s(\sigma) \leq 0$. Le domaine G^s des états de contraintes microscopiques compatibles avec les capacités de résistance du solide en question est défini par :

$$\sigma \in G^s \Leftrightarrow f^s(\sigma) \leq 0 \quad (72)$$

4.1

Rôle de la pression de pore sur la résistance macroscopique

On s'intéresse pour commencer à l'influence de la pression de pore P sur la résistance macroscopique. Un état de contrainte et de pression (Σ , P) est dit admissible (du point de vue de la résistance) s'il est possible de trouver un champ de contrainte $\sigma(\underline{z})$ défini sur la phase solide du v.e.r. et prolongé dans l'espace poreux qui soit compatible avec la résistance du solide au sens de (73), égal à $-P\mathbf{1}$ dans Ω^p et en équilibre avec Σ au sens de la règle de moyenne sur les contraintes $\Sigma = \bar{\sigma}$. A la suite de de Buhan et Dormieux (1996), on introduit l'ensemble $G^{hom}(P)$ des états de contrainte Σ admissibles lorsque la pression de pore est fixée à la valeur P :

$$\Sigma \in G^{hom}(P) \Leftrightarrow \begin{aligned} & \text{div } \sigma = 0 \\ & \Sigma = \bar{\sigma} \\ & (\forall \underline{z} \in \Omega^p) \sigma = -P\mathbf{1} \\ & (\forall \underline{z} \in \Omega^s) f^s(\sigma) \leq 0 \end{aligned} \quad (74)$$

En particulier, $G^{\text{hom}}(0)$ est le domaine obtenu en l'absence de pression ($P = 0$).

Considérons un état de contrainte macroscopique $\Sigma \in G^{\text{hom}}(P)$ et un champ de contrainte microscopique σ vérifiant (74). Introduisons $\bar{\sigma} = \sigma + P\mathbf{1}$. On obtient :

$$\Sigma \in G^{\text{hom}}(P) \Leftrightarrow \exists \bar{\sigma} \begin{cases} \text{div } \bar{\sigma} = 0 \\ \Sigma + P\mathbf{1} = \bar{\sigma} \\ (\forall \underline{z} \in \Omega^p) \bar{\sigma} = 0 \\ (\forall \underline{z} \in \Omega^s) \bar{\sigma} \in G^s + P\mathbf{1} \end{cases} \quad (75)$$

où $G^s + P\mathbf{1}$ est l'image de G^s dans la translation $a \rightarrow a + P\mathbf{1}$.

4.2

Solide de von Mises ou de Tresca

On fait d'abord l'hypothèse que la résistance de la phase solide n'est pas affectée par la contrainte moyenne. En d'autres termes, G^s est invariant dans les translations parallèlement à $\mathbf{1}$: $G^s + P\mathbf{1} = G^s$. Comme en (44), on scinde la contrainte microscopique selon ses composantes sphérique et déviatorique :

$$\sigma = \sigma_d + \sigma_m \mathbf{1} \quad ; \quad \sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr } \sigma \quad ; \quad \text{tr } \sigma_d = 0 \quad (76)$$

σ_m est la contrainte moyenne et σ_d la partie déviatorique du tenseur de contrainte. Dans la suite, on utilise également la contrainte déviatorique équivalente $\sigma_d = \sqrt{\sigma_d : \sigma_d / 2}$.

Lorsque $\Sigma \in G^{\text{hom}}(P)$ les propriétés du champ $\bar{\sigma}$ de (75) assurent que $\Sigma + P\mathbf{1} \in G^{\text{hom}}(0)$:

$$G^{\text{hom}}(0) = G^{\text{hom}}(P) + P\mathbf{1} \quad (77)$$

ou encore :

$$\Sigma \in G^{\text{hom}}(P) \Leftrightarrow \Sigma + P\mathbf{1} \in G^{\text{hom}}(0) \quad (78)$$

En d'autres termes, le critère de résistance macroscopique du milieu poreux saturé en présence de pression de pore peut être formulé en fonction de la contrainte effective de Terzaghi. Comme le montre (77), la détermination de $G^{\text{hom}}(P)$ pour une valeur quelconque de P revient à celle de $G^{\text{hom}}(0)$: $G^{\text{hom}}(P)$ est obtenu à partir de $G^{\text{hom}}(0)$ par une simple translation dans l'espace des contraintes (Fig. 3).

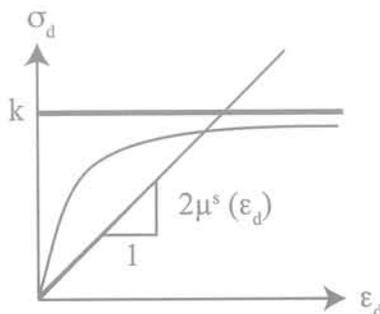


FIG. 3 Comportement non linéaire vérifiant la condition (80).

On expose à présent une méthode pour la détermination du critère de résistance macroscopique dans le cas où le critère de résistance de la phase solide est celui de von Mises et s'écrit donc :

$$f^s(\sigma_d) = \frac{1}{2} \sigma_d : \sigma_d - k^2 = \sigma_d^2 - k^2 \quad (79)$$

Compte tenu du raisonnement précédent, il serait suffisant de se placer directement dans le cas d'un espace poreux non pressurisé ($P = 0$). Cependant, on propose ci-après une approche directe de $G^{\text{hom}}(P)$ dont on vérifie qu'elle est bien en accord avec (77).

Le point de départ consiste à rechercher un matériau non linéaire, caractérisé par un tenseur d'élasticité sécant $\mathbb{C}^s(\epsilon)$, tel que la condition $f^s(\sigma) = 0$ soit vérifiée asymptotiquement à l'échelle microscopique, pour une valeur suffisamment large de la déformation déviatorique locale ϵ_d :

$$f^s(\lim_{\epsilon_d \rightarrow \infty} \sigma) = 0 \quad (80)$$

La valeur de P étant fixée, on considère des trajets radiaux dans l'espace des déformations macroscopiques, de la forme : $\lambda \rightarrow \lambda \bar{\mathbf{E}}$, la direction de $\bar{\mathbf{E}}$ étant arbitraire. On s'attend à ce que de grandes déformations microscopiques soient induites localement pour des valeurs suffisamment élevées du paramètre $\lambda^{(1)}$. Dans ces conditions, l'état de contrainte macroscopique correspondant $\Sigma = \bar{\sigma}$ est situé sur la frontière de $G^{\text{hom}}(P)$:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Sigma \in \partial G^{\text{hom}}(P) \quad (81)$$

En d'autres termes, la frontière $\partial G^{\text{hom}}(P)$ est le lieu des extrémités des trajets de contraintes correspondant à des trajets de déformations radiaux. En revanche, pour les faibles valeurs de λ , l'état de contrainte macroscopique reste à l'intérieur de $G^{\text{hom}}(P)$.

On cherche à définir le comportement non linéaire de la phase solide par un potentiel $\psi^s(\epsilon_v, \epsilon_d)$ de la forme :

$$\psi^s(\epsilon_v, \epsilon_d) = \frac{1}{2} k^s \epsilon_v^2 + \mathcal{F}(\epsilon_d) \quad (82)$$

où k^s est une constante. A partir de (82), la relation (59) conduit à :

$$\sigma = k^s \epsilon_v \mathbf{1} + 2\mu^s(\epsilon_d) \epsilon_d \quad \text{avec} \quad 2\mu^s(\epsilon_d) = \frac{1}{2\epsilon_d} \mathcal{F}'(\epsilon_d) \quad (83)$$

La condition (80) est satisfaite si $\mathcal{F}'(\epsilon_d) \approx 2k$ pour des déformations déviatoriques suffisamment grandes. Cela conduit à choisir $\mathcal{F}(\epsilon_d) \approx 2k \epsilon_d$ dans cette gamme de déformation. En d'autres termes, le module de cisaillement sécant $\mu^s(\epsilon_d)$ est une fonction décroissante de ϵ_d , équivalente à $k/(2\epsilon_d)$ pour les larges valeurs de ϵ_d (Fig. 4). Asymptotiquement, on observe que $\mu^s \rightarrow 0$ tandis que k^s reste constant. Cela implique que $\mu^s/k^s \leq 1$, ce qui revient à dire que la phase solide se comporte formellement comme un matériau incompressible.

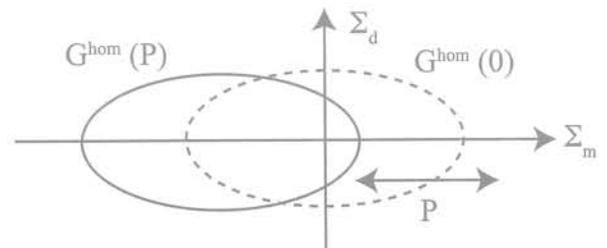


FIG. 4 États de contrainte macroscopiques admissibles pour $P = 0$ et $P \neq 0$ (solide de von Mises).

On étudie maintenant la réponse du v.e.r. d'un milieu poreux dont la phase solide possède un tel com-

⁽¹⁾ Il est bon de noter qu'une déformation peut être grande par rapport à une déformation de référence, tout en demeurant dans le domaine des déformations infinitésimales.

portement. Il s'agit, comme on l'a vu à la section 3, d'un problème d'homogénéisation non linéaire, susceptible d'être appréhendé par une méthode sécante dans le cadre du concept de déformation effective. En vertu du fait que k^s et μ^s ne dépendent pas de ε_v , on est amené à résoudre l'équation (72). Sur le plan pratique, cela requiert de savoir décrire la dépendance de k^{hom} et de μ^{hom} en fonction de μ^s . On utilise à cet effet la borne supérieure de Hashin-Shtrikman comme estimation des modules macroscopiques. En vertu de la remarque sur l'incompressibilité de la phase solide, ces derniers s'écrivent (voir par exemple Dormieux 2005) :

$$k^{hom} = \frac{4(1-\phi_o)}{3\phi_o} \mu^s(\varepsilon_d^{ef}) \quad ; \quad \mu^{hom} = \frac{1-\phi_o}{1+2\phi_o/3} \mu^s(\varepsilon_d^{ef}) \quad (84)$$

L'invariant déviatorique effectif ε_d^{ef} est déduit de (72a) :

$$\left(2(1-\phi_o)\varepsilon_d^{ef} \mu^s(\varepsilon_d^{ef})\right)^2 = \frac{3\phi_o}{4} (\Sigma_m + P)^2 + (1 + \frac{2}{3}\phi_o)\Sigma_d^2 \quad (85)$$

En utilisant le fait que $\mu^s(\varepsilon_d) \approx k/(2\varepsilon_d)$ dans le domaine des grandes déformations, on obtient que l'état de contrainte macroscopique asymptotique est situé sur une ellipse du plan (Σ_m, Σ_d) :

$$\frac{3\phi_o}{4(1-\phi_o)^2} (\Sigma_m + P)^2 + \frac{1+2\phi_o/3}{(1-\phi_o)^2} \Sigma_d^2 = k^2 \quad (86)$$

On retrouve au passage le fait que la résistance macroscopique est contrôlée par la contrainte effective de Terzaghi $\Sigma + P1$.

4.3

Solide de Drucker-Prager

La conclusion qui vient d'être tirée dans le contexte des matériaux de von Mises n'est plus valable lorsque le critère de la phase solide est sensible à la contrainte moyenne. A titre d'illustration, on fait l'hypothèse que le domaine G^s des contraintes admissibles pour la phase solide est un cône. Son sommet est situé sur la droite $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ de l'espace des contraintes principales et représente un état de traction isotrope $h1$. Par référence à la valeur de la résistance en traction isotrope h , G^s sera noté G_h^s . L'ensemble des états de contrainte macroscopiques admissibles en l'absence de pression est noté $G_h^{hom}(0)$.

Par exemple, le matériau de Drucker-Prager (Fig. 5) dont le critère s'écrit :

$$f^s(\sigma) = \alpha \left(\frac{1}{3} \text{tr} \sigma - h \right) + \sqrt{\frac{1}{2} \sigma_d : \sigma_d} = \alpha(\sigma_m - h) + \sigma_d \leq 0 \quad (87)$$

appartient manifestement à cette classe de matériaux.

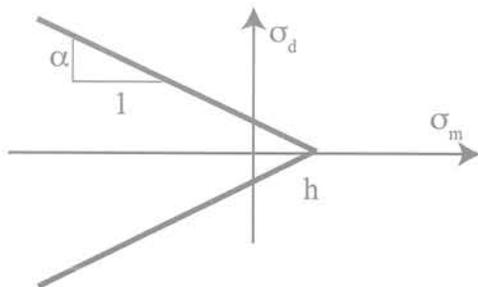


FIG. 5 Critère de Drucker-Prager : états de contrainte microscopiques admissibles.

Il est utile d'observer que les ensembles G_h^s et $G_{h'}^s$, associés à deux valeurs différentes h et h' de la résistance en traction isotrope peuvent être déduits l'un de l'autre par une translation, ou encore par une homothétie⁽²⁾ :

$$(a) \quad G_{h'}^s = \frac{h'}{h} G_h^s \quad ; \quad (b) \quad G_{h'}^s = G_h^s + (h' - h)1 \quad (88)$$

En vertu de (88a) et de la définition de G^{hom} donnée en (74) (avec $P = 0$), on en déduit que $G_h^{hom}(0)$ dépend linéairement de h :

$$G_{h'}^{hom}(0) = \frac{h'}{h} G_h^{hom}(0) \quad (89)$$

Par ailleurs, il est facile de voir à partir de (88b) que (Fig. 6) :

$$G_h^s + P1 = G_{h+P}^s \quad (90)$$

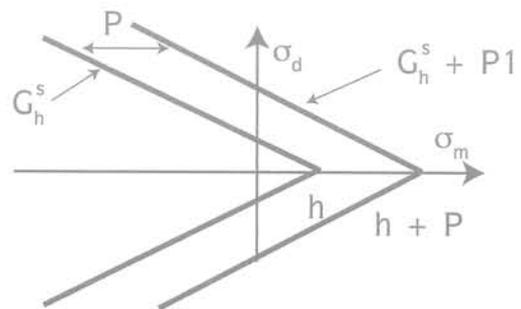


FIG. 6 G_h^s et $G_h^s + P1 = G_{h+P}^s$, dans le cas du critère de Drucker-Prager.

L'utilisation de ce résultat dans (75) montre que :

$$\Sigma \in G_h^{hom}(P) \Leftrightarrow \Sigma + P1 \in G_{h+P}^{hom}(0) \quad (91)$$

La combinaison de (89) et de (91) permet finalement d'affirmer que :

$$G_h^{hom}(P) + P1 = (1 + \frac{P}{h}) G_h^{hom}(0) \quad (92)$$

ou encore :

$$\Sigma \in G_h^{hom}(P) \Leftrightarrow \frac{\Sigma + P1}{1 + P/h} \in G_h^{hom}(0) \quad (93)$$

Cela signifie que la résistance macroscopique est contrôlée par la contrainte effective suivante :

$$\Sigma'' = \frac{\Sigma + P1}{1 + P/h} \quad (94)$$

A la différence du concept traditionnel de contrainte effective, on note que Σ'' ne dépend pas linéairement de la pression de pore P . D'un point de vue géométrique, la relation (92) exprime que $G_h^{hom}(P)$ peut être déterminé à partir de $G_h^{hom}(0)$ par l'application de deux transformations consécutives. En premier lieu, l'homothétie de rapport $1 + P/h$ est appliquée à $G_h^{hom}(0)$ suivie de la translation $\Sigma \rightarrow \Sigma - P1$ (Fig. 7).

⁽²⁾ λG^s désigne l'image de G^s par l'homothétie dont le centre est situé à l'origine, et dont le rapport est égal à λ : $z \rightarrow \lambda z$.

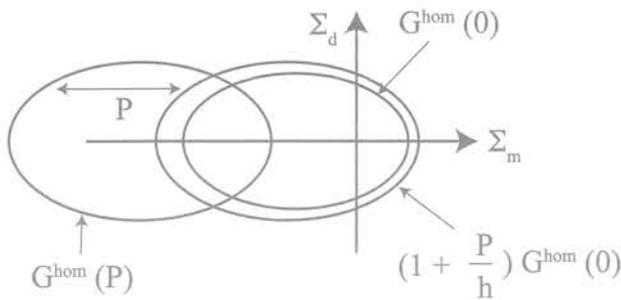


FIG. 7 Solide de Drucker-Prager : états de contrainte macroscopiques admissibles en présence et en l'absence de pression de pore.

On considère, à titre d'exemple, le cas particulier où la phase solide est un matériau de Drucker-Prager (87). Puisque l'existence d'une contrainte effective macroscopique a pu être établie, il est suffisant de déterminer la résistance macroscopique en l'absence de pression de pore ($P = 0$), ce qui revient à identifier le domaine $G_h^{hom}(0)$. $G_h^{hom}(P)$ sera alors déduit de (93). On utilise à cet effet la technique mise en œuvre précédemment dans le cas du matériau de von Mises. On recherche donc un matériau isotrope non linéaire dont l'équation d'état est de la forme (58) et vérifiant la condition (80) :

$$\mu^s(\varepsilon_v, \varepsilon_d) \approx \frac{\alpha}{2\varepsilon_d} (h - k^s \varepsilon_v) \quad (95)$$

dans le domaine des grandes déformations déviatoriques. A la différence du module de cisaillement identifié dans le cas du matériau de von Mises ($\mu^s(\varepsilon_d) \approx k/(2\varepsilon_d)$), le module de cisaillement sécant μ^s dans (95) dépend à la fois de ε_v et de ε_d . Cette propriété est destinée à traduire le fait que la résistance au cisaillement, représentée par $2\mu^s \varepsilon_d$, augmente avec la pression de confinement locale qui n'est autre que $-k^s \varepsilon_v$. En ce qui concerne le module de compression k^s , le choix le plus simple consiste à le considérer comme une constante. On remarque qu'une telle définition ne permet pas de satisfaire la condition (61) assurant l'existence d'un potentiel. Notons que ce dernier n'est cependant pas nécessaire pour mettre en œuvre le raisonnement. Le niveau de déformation effectif est ici caractérisé par les deux scalaires ε_v^{ef} et ε_d^{ef} . Avec les relations (45) et (55), compte tenu de la condition $P = 0$, le système qui permet de déterminer ces quantités en fonction de l'état de contrainte macroscopique est le suivant :

$$\begin{aligned} (1 - \phi_o) \varepsilon_v^{ef} &= \frac{\Sigma_m}{k^s} & (a) \\ 4(1 - \phi_o) \varepsilon_d^{ef2} &= -\frac{\partial}{\partial \mu^s} \left(\frac{1}{k^{hom}} \right) \Sigma_m^2 - \frac{\partial}{\partial \mu^s} \left(\frac{1}{\mu^{hom}} \right) \Sigma_d^2 & (b) \\ k^{hom} &= \frac{4(1 - \phi_o)}{3\phi_o} \mu^s \quad ; \quad \mu^{hom} = \frac{1 - \phi_o}{1 + 2\phi_o/3} \mu^s & (c) \\ \mu^s &= \frac{\alpha}{2\varepsilon_d^{ef}} (h - k^s \varepsilon_v^{ef}) & (d) \end{aligned} \quad (96)$$

Comme dans le cas du solide de von Mises, on a utilisé dans (96c) le fait que μ^s/k^s tend vers 0 pour les grandes déformations déviatoriques. En combinant (96b) et (96c), il vient tout d'abord :

$$\left(2(1 - \phi_o) \varepsilon_d^{ef} \mu^s(\varepsilon_d^{ef}) \right)^2 = \frac{3\phi_o}{4} \Sigma_m^2 + \left(1 + \frac{2}{3} \phi_o \right) \Sigma_d^2 \quad (97)$$

Il reste à introduire (96a) et (96d) dans le membre de gauche de (97) :

$$\begin{aligned} \alpha^2 h^2 (1 - \phi_o)^2 &= \left(\frac{3\phi_o}{4} - \alpha^2 \right) \Sigma_m^2 + \\ &\left(1 + \frac{2}{3} \phi_o \right) \Sigma_d^2 + 2\alpha^2 h (1 - \phi_o) \Sigma_m \end{aligned} \quad (98)$$

La relation (98) caractérise le domaine $G_h^{hom}(0)$. Ensuite, $G_h^{hom}(P)$ est obtenu en remplaçant l'état de contrainte macroscopique Σ par la contrainte effective (94). Avec les notations :

$$\Sigma_m'' = \frac{\Sigma_m + P}{1 + P/h} \quad ; \quad \Sigma_d'' = \frac{\Sigma_d}{1 + P/h} \quad (99)$$

l'équation de la frontière elliptique de $G_h^{hom}(P)$ dans l'espace des contraintes (Σ_m'', Σ_d'') s'écrit :

$$\begin{aligned} \alpha^2 h^2 (1 - \phi_o)^2 &= \left(\frac{3\phi_o}{4} - \alpha^2 \right) \Sigma_m''^2 + \\ &\left(1 + \frac{2}{3} \phi_o \right) \Sigma_d''^2 + 2\alpha^2 h (1 - \phi_o) \Sigma_m'' \end{aligned} \quad (100)$$

Notons que l'on retrouve (86) comme la limite de (100) quand $h \rightarrow \infty$ et $\alpha \rightarrow 0$ avec $\alpha h = k$.

Supposons à nouveau que $P = 0$. D'après l'équation (98), la forme de $G_h^{hom}(0)$ est effectivement elliptique et la résistance en compression isotrope est bornée à la condition que $3\phi_o/4 > \alpha^2$. En revanche, pour de plus faibles valeurs de la porosité, en l'occurrence pour $3\phi_o/4 < \alpha^2$, il convient d'observer que la relation (98) prédit que la résistance en compression isotrope est infinie. En d'autres termes, pour de telles porosités, tout état de contrainte de la forme $\Sigma_m \mathbf{1}$ avec $\Sigma_m < 0$ est admissible, de sorte que $G_h^{hom}(0)$ n'est pas un domaine fermé. Cette conclusion est en contradiction avec le résultat du modèle unidimensionnel de la sphère creuse sous pression (Dormieux *et al.*, 2006). On montre en effet que la contrainte de confinement qui peut être appliquée à la sphère creuse est bornée, quelle que soit sa porosité (pourvu que $\alpha < \sqrt{3}/2$). Plus précisément, la valeur exacte Σ^+ de la contrainte de confinement maximale peut être obtenue par les techniques classiques du calcul à la rupture et vaut (Barthélémy et Dormieux, 2003) :

$$\Sigma^+ = h \left(\phi_o^{\frac{2\alpha/\sqrt{3}}{1-2\alpha/\sqrt{3}}} - 1 \right) \quad (101)$$

Cette limitation du résultat du processus d'homogénéisation non linéaire est imputable au manque de précision dans la mise en œuvre du concept de déformation effective. Le recours à une estimation uniforme du niveau de déformation sur l'intégralité de la phase solide devient trop simpliste pour les basses valeurs de la porosité. Cette difficulté peut cependant être surmontée en subdivisant le domaine solide en sous-domaines, en introduisant autant de déformations effectives que de sous-domaines.

Une alternative à la méthode d'homogénéisation non linéaire conduisant aux critères de rupture (98) et (100) consiste à mettre en œuvre une technique d'homogénéisation périodique. La confrontation des deux méthodes permet également d'apprécier les performances quantitatives des expressions analytiques très simples fournies par la méthode sécante dans le cadre du concept de déformation effective.

On considère ici une cellule de base cubique, comportant une sphère creuse au centre, entourée de la phase solide. On a vu qu'il n'est pas restrictif de supposer la pression de fluide nulle. Le milieu périodique est obtenu par répétition dans l'espace de ce motif

de base. On détermine la charge limite de ce dernier lorsqu'il est soumis à un trajet radial dans l'espace des contraintes. Dans la pratique, on se limite ici à des états triaxiaux de révolution dans les axes de la cellule et l'on fait varier le rapport Σ_d/Σ_m .

La figure 8 présente une comparaison entre le critère de rupture (98) (courbe en trait continu) et les résultats numériques obtenus par un calcul en éléments finis (cercles), pour les valeurs $\alpha = 0,21$ et $\phi_0 = 0,15$. Les segments inclinés de part et d'autre de l'axe vertical correspondent aux trajets de compression et de traction uniaxiales. Sur ce diagramme, on note les deux trajets rectilignes radiaux qui correspondent à des états de compression et de traction simples. On observe un excellent accord pour des niveaux de contrainte moyenne égaux ou inférieurs à celui de l'état de compression simple. En revanche, le résultat du schéma d'homogénéisation non linéaire surestime significativement la résistance pour les états de contrainte en compression faiblement déviatoriques. On retrouve les limites de cette démarche qui viennent d'être commentées à propos de la résistance en compression isotrope.

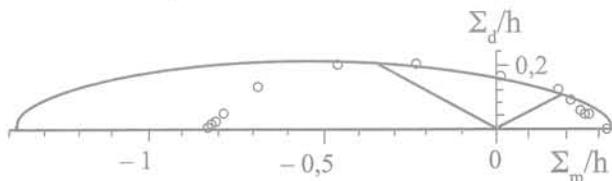


FIG. 7 Critère de rupture macroscopique pour une phase solide de type Drucker-Prager: approche périodique et estimation par homogénéisation non linéaire.

5

Conclusion

Parallèlement à l'approche expérimentale, la démarche micromécanique constitue une stratégie efficace pour tester l'existence d'une contrainte effective dans un cadre rhéologique donné. Bien qu'elle soit couramment admise pour les sols et largement validée par de nombreux essais de laboratoire, la contrainte effective de Terzaghi n'a pas de portée générale. D'une façon bien connue en Mécanique des Roches, la contrainte effective proposée par Biot dans le cadre de la poroélasticité linéaire doit lui être préférée. La question de l'existence d'une contrainte effective dans les situations de comportement non linéaire, élastique ou non, est plus ouverte. S'agissant du critère de rupture, la contrainte de Terzaghi est attachée à l'absence d'effet du confinement sur la résistance de la phase solide du milieu poreux. Le recours à une contrainte effective plus complexe, variant de façon non linéaire en fonction de la pression, s'impose en revanche lorsque la phase solide du milieu poreux possède une sensibilité au confinement de type Drucker-Prager.

Il est à noter qu'un écart vis-à-vis de la contrainte de Terzaghi peut également résulter d'interactions non purement mécaniques entre les constituants de

la phase solide à l'échelle microscopique. C'est le cas notamment dans les argiles de la classe des smectites (Dormieux *et al.*, 2005).

Signalons pour finir quelques résultats relatifs aux matériaux élastiques linéaires endommagés par microfissuration. On suppose que le réseau de fissures est saturé et connecté, de sorte qu'il y règne une pression uniforme. Dans le domaine des évolutions réversibles, on montre que la refermeture progressive des fissures se traduit par un comportement poroélastique non linéaire. Les équations d'état s'écrivent de façon commode en vitesse, en faisant appel à des coefficients de poroélasticité tangents :

$$\dot{\Sigma} = C_{tan}^{hom}(\Sigma + P1) : \dot{E} - B_{tan}(\Sigma + P1)\dot{P} \quad (102)$$

$$\dot{\phi} = B_{tan}(\Sigma + P1) : \dot{E} + \frac{\dot{P}}{N_{tan}(\Sigma + P1)}$$

De surcroît, ces derniers dépendent de la contrainte effective de Terzaghi (Dormieux et Kondo, 2005). Sous réserve de l'homogénéité de la phase solide, ils sont reliés par les relations homologues de (26) et (31).

Enfin, signalons que le modèle micromécanique de l'évolution de l'endommagement par microfissuration proposé récemment (Dormieux *et al.*, 2006a) conduit à un critère de propagation également contrôlé par la contrainte effective de Terzaghi.

5.1

Annexe : le lemme de Hill

On considère un champ de contrainte σ' à divergence nulle et un champ de déformation géométriquement compatible ε^* définis sur le v.e.r. Ω . On envisage deux situations distinctes

– le champ de contrainte σ' , de moyenne $\Sigma' = \overline{\sigma'}$, vérifie des conditions aux limites uniformes en contrainte :

$$(\forall z \in \partial\Omega) \sigma'(z) \cdot n(z) = \Sigma' \cdot n(z)$$

– le champ de déformation ε^* , de moyenne $E = \overline{\varepsilon^*}$, est cinématiquement admissible avec un champ de déplacement ξ^* vérifiant des conditions aux limites uniformes en déformations

$$(\forall z \in \partial\Omega) \xi^*(z) = E^* \cdot z$$

Dans les deux cas, on démontre la règle de moyenne suivante :

$$\overline{\sigma' : \varepsilon^*} = \overline{\sigma'} : \overline{\varepsilon^*} \quad (103)$$

Ce résultat constitue le lemme de Hill. Il garantit la cohérence du changement d'échelle sur le plan énergétique.

REMERCIEMENTS

L'auteur tient à remercier Samir Maghous pour de fructueuses discussions sur la thématique abordée dans cet article ainsi que pour sa participation aux estimations numériques présentées à la section 4.3.

- Auriault J.L., Sanchez-Palencia E. – Étude du comportement macroscopique d'un milieu poreux saturé déformable. *Journal de Mécanique*, 16, 1977, p. 575-603.
- Barthélémy J.F., Dormieux L. – Détermination du critère de rupture macroscopique d'un milieu poreux par homogénéisation non linéaire. *C.R. Mécanique*, 331, 2003, p. 77-84.
- Bishop A.W. – The principle of effective stress. *Norwegian Geotechnical Institute Publication*, 32, 1960, p. 1-5.
- Buhan (de) P., Dormieux L. – On the validity of the effective stress concept for assessing the strength of saturated porous materials : a homogenization approach. *J. Mech. Phys. Solids*, 44, 1996, p. 1649-1667.
- Chateau X., Dormieux L. – Micromechanics of saturated and unsaturated porous media. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, 26, 2002, p. 831-844.
- Coussy O. – *Mechanics of porous continua*. Wiley, 1995.
- Dormieux L. – Poroelasticity and strength of fully or partially saturated porous materials. *Applied micromechanics of porous materials* (L. Dormieux and F.-J. Ulm, ed.). CISM Courses and Lectures n° 480, Springer, 2005.
- Dormieux L., Kondo D. – Poroelasticity and damage theory for saturated cracked media. *Applied micromechanics of porous materials* (L. Dormieux and F.J. Ulm, ed.). CISM Courses and Lectures n° 480, Springer, 2005.
- Dormieux L., Kondo D., Ulm F.J. – A micro-mechanical analysis of damage propagation in fluid-saturated cracked media. *C.R. Mécanique* 334, 2006, p. 440-446.
- Dormieux L., Kondo D., F.J. Ulm. *Microporomechanics*. Wiley, 2006.
- Dormieux L., Lemarchand E., Sanahuja J. – Comportement macroscopique de matériaux à microstructure en feuillets. *Microstructure et Propriétés des matériaux*. Presses de l'ENPC, 2005.
- Dormieux L., Molinari A., Kondo D. – Micromechanical approach to the behavior of poroelastic materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 50, 2002, p. 2203-2231.
- Fredlund D.G. – Soil mechanics principles that embrace unsaturated soils. *Proc. of the 11th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, vol. 2, 1985, p. 465-472.
- Kreher W. – Residual stresses and stored elastic energy of composites and polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*, 38, 1990, p. 115-128.
- Schrefler B., Simoni L., Li X., Zienkiewicz O.C. – Mechanics of partially saturated porous media. *Numerical methods and constitutive modelling in geomechanics* (C.S. Desai and Giuda, ed.). CISM Courses and Lectures n° 311, Springer, 1997.
- Suquet P. – Effective behavior of non linear composites. *Continuum micromechanics* (P. Suquet, ed.). CISM Courses and Lectures n° 377, Springer, 1997.
- Zaoui A. – Continuum micromechanics : survey. *J. Eng. Mech.*, 128 (8), 2002, p. 808-816.