

# Transferts d'eau et transport de solutés dans les sols non saturés : solution analytique et développement numérique utilisant la méthode des lignes

**F. GANDOLA**

Université de Griffith  
Faculty of Environmental  
Sciences, Griffith University  
Nathan Qld 4111, Australia  
F.Gandola@mailbox.gu.edu.au

**N.E. ABRIAK**

École des mines de Douai  
941, rue Charles-Bourseul  
BP 838, 59508 Douai Cedex

**G. SANDER**

Université de Loughborough  
Department of Civil  
and Building Engineering  
Loughborough University  
Leicestershire, LE11 3TU  
United Kingdom  
G.Sander@lboro.ac.uk

**G. PICOT**

École des mines de Douai  
941, rue Charles-Bourseul  
BP 838, 59508 Douai Cedex

**R. BRADDOCK  
C. MATTHEWS**

Université de Griffith  
Faculty of Environmental  
Sciences, Griffith University  
Nathan Qld 4111, Australia  
R.Braddock@mailbox.gu.edu.au

## Résumé

Cet article considère les écoulements d'eau verticaux dans les sols décrits par l'équation de Richard. L'équation de transport est utilisée pour décrire le mouvement du soluté. Les solutions numériques des profils de teneur en eau et de concentration en soluté sont obtenues en appliquant la méthode des lignes (*Method of Lines*). Cette technique, facile à programmer sous environnement MATLAB, offre un moyen performant dans la résolution des problèmes de transferts d'eau et de transport de polluants. En choisissant des relations spécifiques de diffusion hydraulique et de dispersion chimique, une solution analytique est proposée pour décrire le mouvement de soluté dans une configuration d'écoulement horizontal (sans gravité). Cette solution analytique permet de vérifier la validité et la précision du code numérique utilisé. D'autres simulations numériques sont réalisées dans une configuration d'écoulement vertical, en utilisant des fonctions hydrauliques et hydrodispersives plus réalistes. D'autres essais de simulation sont présentés pour des sols divers. Les résultats donnent les courbes relatives aux profils de redistribution en eau et en soluté dans les sols, obtenues pour des conditions aux limites de type Dirichlet ou Neumann appliquées en surface. Dans chacun des cas étudiés, le front de soluté apparaît « en retard » par rapport au front d'infiltration d'eau.

**Mots-clés :** teneur en eau, soluté, sol, numérique, analytique, écoulement transitoire.

## Water movement and solute transport in the vadose zone : analytical solution and numerical development using the method of lines technique

## Abstract

This paper considers both the vertical and horizontal movement of water in soil, as described by Richard's equation. The transport equation is used to describe the movement of a solute under unsaturated water conditions. Numerical solutions are obtained for the water content and also for the concentration of the solute, using the Method of Lines technique. This method is easy to implement from the MATLAB

NDLR : Les discussions sur cet article sont acceptées jusqu'au 1<sup>er</sup> avril 2006.

## Introduction

La connaissance et la compréhension des phénomènes de transferts d'eau et de transport de solutés dans les sols sont devenues désormais des étapes cruciales dans la recherche de solutions concernant des problèmes divers. Les applications sont en effet très variées : elles concernent l'évaluation et le contrôle de la pollution générée par l'utilisation de produits chimiques à usage domestique, agricole ou industrielle, la prise de mesure pour une utilisation rationnelle des fertilisants ou bien encore le stockage de déchets divers visant à éviter toute contamination vers les écosystèmes environnants. Plus spécifiquement, l'étude des phénomènes hydrodynamiques et hydrodispersifs des sols partiellement saturés, c'est-à-dire compris entre la surface et la nappe phréatique, devient dans ce cas, un préalable incontournable. Cependant, le sol en présence des différentes phases (air, eau, polluant) est le siège de nombreux phénomènes physiques et chimiques parfois complexes, difficilement contrôlables, chaque phase pouvant interagir entre elles. Aussi, moyennant certaines hypothèses simplificatrices, la modélisation numérique reste, à ce jour, un outil effectif dans la recherche de solutions aux problèmes de transport de polluant dans les sols. Par ailleurs, seul un nombre limité de solutions analytiques a été établi jusqu'à présent (Smiles *et al.*, 1978; Smiles *et al.*, 1981; Bond, 1986; Park, 1996; Flury *et al.*, 1998).

L'étude proposée ici aborde les problèmes de transfert et de transport de soluté dans un milieu poreux de type sol par la voie numérique, en utilisant la méthode dite « méthode des lignes » (*Numerical Method of Lines*). Après avoir décrit cette technique développée sous environnement MATLAB (2000), divers exemples de simulation sont présentés pour différentes conditions initiales et aux limites et pour différentes natures de sol. Par ailleurs, une solution analytique concernant les profils de teneur en eau et de concentration en soluté est proposée pour une configuration d'écoulement horizontal (sans gravité), ceci permettant de valider le code numérique développé pour cette étude.

## Mise en équation du problème

Les problèmes de transfert d'eau et de transport de solutés en milieu non saturé sont, en fait, décrits par le

toolbox and provides an efficient way to solve flow and solute transport problems. Special forms of the soil hydraulic diffusion and chemical diffusion functions are used to provide a closed form analytic solution for the solute profile in a horizontal flow situation. This analytic solution is used to verify the numerical method and estimate the accuracy of the numerical code. Numerical simulations are also carried out for the vertical flow case for more realistic forms of the soil hydraulic functions and for layered systems. The results show the vertical redistribution of the water and solute profiles obtained for two different soils subject to Dirichlet and Neumann conditions at the upper surface. For any tests, the solute front appears to be delayed compared to the water front.

*Key words* : water content, solute, sol, numeric, analytic, transient flow.

couplage de deux équations aux dérivées partielles (EDP). Considérant l'écoulement isotherme, et le fluide incompressible, le mouvement de l'eau est gouverné par l'équation de Richards. Écrite en termes de teneur en eau,  $\theta$  (Bear, 1979), son expression dans le cas d'un écoulement vertical est :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( D \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) - \frac{\partial K}{\partial z}, \quad (1)$$

$D = D(\theta)$ , représentant la fonction de diffusivité hydraulique [ $L^2T^{-1}$ ];

$K = K(\theta)$ , la conductivité hydraulique [ $LT^{-1}$ ];

$z$  la profondeur [L], et  $t$  la variable temps [T].

$D$  peut être exprimé en fonction de la capacité capillaire  $C$ , par la relation  $D = K/C$ , avec  $C = C(h) = d\theta/dh$ ,  $h$  étant la succion.

L'équation de convection-dispersion dans le cas d'un transport dans un milieu poreux homogène et incompressible, en l'absence de puits est donnée par Bear (1979) :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{1}{\theta} \left( \frac{\partial}{\partial z} \left( D_s \theta \frac{\partial c}{\partial z} \right) - q \frac{\partial c}{\partial z} \right) \quad (2)$$

$c$  représentant la concentration en soluté [ $ML^{-3}$ ],

$q$  le flux découlant de la loi de Darcy appliquée aux milieux non saturés [ $LT^{-1}$ ], ( $q = -D\partial\theta/\partial z + K$ ),

$D_s$  représentant le coefficient de dispersion mécanique [ $L^2T^{-1}$ ].

On peut noter, d'une part, que  $q = V\theta$ ,  $V$  représentant la vitesse d'écoulement dans la direction  $z$  et, d'autre part, que le coefficient de dispersion  $D_s$  est une fonction de  $\theta$ , et s'exprime sous la forme :

$$D_s(\theta) = D_m + \alpha V = D_m + \alpha \frac{|q|}{\theta} \quad (3)$$

$\alpha$  (L) représentant le coefficient de dispersivité longitudinale et  $D_m$  le coefficient de diffusion moléculaire.

## Présentation de la méthode des lignes

Le modèle numérique développé ici est basé sur la méthode dite « méthode des lignes ». Cette technique développée en partie par Rothe (1930) a connu un essor important avec de nombreuses applications dans

diverses branches des sciences physiques (Schiesser, 1991). Cependant, aussi surprenant soit-il, les exemples d'application dans le domaine de l'hydrologie restent assez rares (Tocci *et al.*, 1997; Lee *et al.*, 1998, Matthews *et al.*, 1998) voire inexistantes concernant les problèmes de transport de polluant en milieu non saturé.

D'une manière générale, en utilisant la méthode classique des différences finies, une EDP est discrétisée par rapport à l'ensemble de ces variables, ceci résultant en un système d'équations algébriques. Avec la méthode des lignes, l'EDP est résolue en discrétisant les termes relatifs aux dérivées spatiales tout en conservant le ou les termes relatifs aux dérivées temporelles sous leur forme continue. En fait, cette opération permet de réduire l'EDP en un système d'équations différentielles ordinaire (EDO) qui, par conséquent, peut être intégré à partir d'un intégrateur numérique quelconque (Runge Kutta d'ordre 2, 4, etc.). Le choix de l'intégrateur d'EDO sera en fait guidé par la difficulté du problème à modéliser le ou les phénomènes physiques étudiés (front d'humectation abrupt engendrant des gradients élevés). L'intégrateur « ODE15s » sous environnement MATLAB s'avère dans ce cas bien adapté aux calculs numériques présentant des gradients élevés. Il existe différents moyens de discrétiser le domaine spatial pour un problème donné, les plus courants étant basés sur des schémas de type éléments finis ou différences finies. L'utilisation d'un schéma de type différences finies a été retenue pour cette étude.

Les principaux avantages de la méthode des lignes (Schiesser, 1991) résident :

1) dans la représentation mathématique du problème à résoudre qui en fait reste quasi-identique dans son écriture à l'EDP ; la programmation en est, par conséquent, facilitée et accessible à un utilisateur quelconque ;

2) dans l'utilisation d'une matrice de différentiation unique quel que soit le type de conditions aux limites du problème ;

3) dans son automatisation rendue aisée (Lee *et al.*, 1998) sous environnement MATLAB (résolution numérique sous forme matricielle).

La figure 1 rappelle les principales étapes caractérisant la méthode des lignes dans la résolution d'une EDP.

## 4

## Vérification du modèle numérique

Quand elles existent, les solutions analytiques permettent la validation du code numérique utilisé. A partir de la solution analytique proposée par Sander *et al.*, 1988 et Lee *et al.*, 1998 présentent une étude comparative concernant la précision numérique de la méthode des lignes appliquée à la résolution de l'équation de Richard (1). Ils obtiennent d'excellents résultats en utilisant un schéma en différences finies du 4<sup>e</sup> ordre pour la détermination des dérivées spatiales (définissant les termes de la matrice de différentiation). Cet ordre de différentiation est celui retenu dans la résolution numérique des essais présentés dans cet article.

Concernant l'équation de convection dispersion (2), une solution analytique peut être obtenue moyennant certaines hypothèses sur la forme des profils de teneur en eau et de concentration en soluté.

## Solution analytique basée sur un profil de type Brutsaert

L'approche proposée ici est basée sur l'obtention d'un profil de type Brutsaert (1976) pour les profils de teneur en eau et de concentration en soluté, dans une configuration d'écoulement horizontal.

On utilise ici les variables réduites de teneur en eau et concentration définies par les expressions :

$$\bar{\theta} = \frac{\theta - \theta_i}{\theta_s - \theta_i} \quad (4a)$$

$$\bar{c} = \frac{c - c_i}{c_s - c_i} \quad (4b)$$

$\theta_i$  et  $\theta_s$  représentant respectivement la teneur en eau initiale et à saturation,

$c_i$  et  $c_s$ ,  $c_i$  et  $c_s$  la concentration initiale et à saturation. Dans la direction horizontale  $x$ , l'équation (1) décrivant le transfert d'eau dans le sol peut s'exprimer à partir des variables réduites sous la forme :

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D(\bar{\theta}) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \right) \quad (5)$$

De même, l'équation de transport (2) devient :

$$\left( \bar{\theta} + \frac{\theta_i}{\theta_s - \theta_i} \right) \frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( D_s^*(\bar{\theta}) \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right) + D(\bar{\theta}) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \right] \quad (6)$$

En introduisant la variable de Boltzman  $\eta = \frac{x}{\sqrt{t}}$  (Smiles *et al.*, 1978) les équations (5) et (6) deviennent respectivement ;

$$\frac{d}{d\eta} \left( D \frac{d\bar{\theta}}{d\eta} \right) + \frac{\eta}{2} \frac{d\bar{\theta}}{d\eta} = 0 \quad (7)$$

et

$$\frac{d}{d\eta} \left( D_s^* \frac{d\bar{c}}{d\eta} \right) + \frac{\eta}{2} \frac{d\bar{c}}{d\eta} = 0 \quad (8)$$

avec :

$$G = \left( \bar{\theta} + \frac{\theta_i}{\theta_s - \theta_i} \right) \eta + 2D \frac{d\bar{\theta}}{d\eta} = \left( \bar{\theta} + \frac{\theta_i}{\theta_s - \theta_i} \right) \eta - \int_0^{\bar{\theta}} \eta du \quad (9)$$

Ici, une solution des équations (7) et (8) est recherchée avec comme conditions aux limites :  $\bar{\theta} = 1$  à  $\eta = 0$  et  $\bar{\theta} = 0$  à  $\eta \rightarrow \infty$  (Tableau I). Après intégration des équations (7) et (8), la fonction hydraulique de diffusion et le coefficient chimique de dispersion s'expriment sous la forme :

$$D(\bar{\theta}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \eta}{\partial \bar{\theta}} \int_0^{\bar{\theta}} \eta du \quad (10)$$

et :

$$D_s^*(\bar{\theta}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \eta}{\partial \bar{c}} \int_0^{\bar{c}} G du \quad (11)$$

Pour un  $D_s^*$  constant, Smiles *et al.* (1978) proposent une solution analytique de l'équation (8) pour des conditions aux limites telles que celles décrites dans le tableau I et ceci pour toute expression de  $\eta(\bar{\theta})$  satisfaisant l'équation (7). Cependant, dans le cas où  $D_s^*$  est non constant, aucune solution analytique de l'équation (8) n'a été proposée dans la littérature jusqu'à présent.

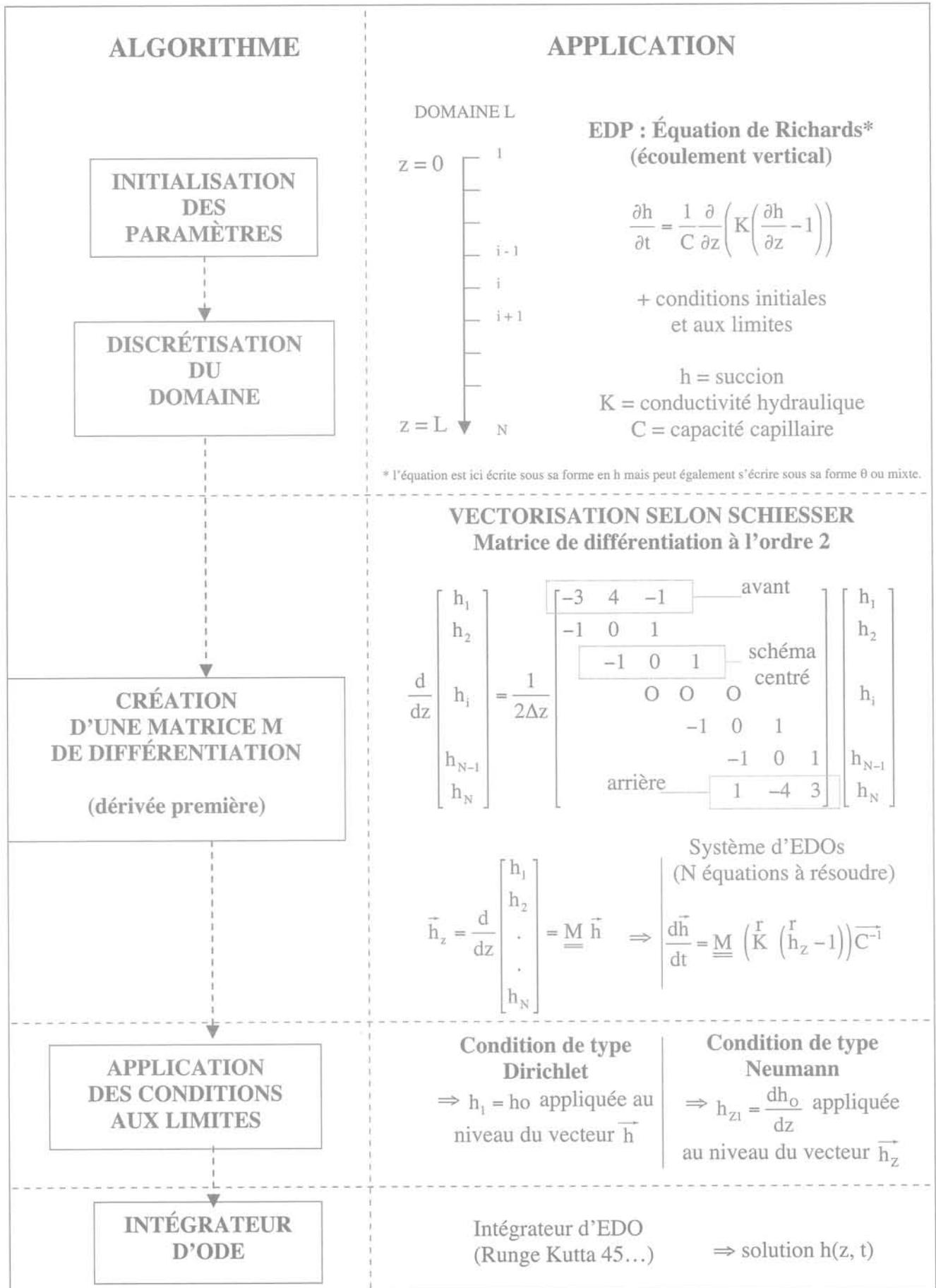


FIG. 1 Méthode des lignes présentée sous forme d'organigramme.  
Schematic of Method of Lines.

**TABEAU I** Conditions initiales et aux limites.  
Initial and boundary conditions.

	Variables	Variables réduites
$t = 0$	$\theta = \theta_i$	$\bar{\theta} = 0$
$x \rightarrow \infty$	$\theta = \theta_s$	$\bar{\theta} = 1$
$x = 0$	$\theta = \theta_s$	$\bar{\theta} = 0$
	$c = c_i$	$\bar{c} = 0$
	$c = c_i$	$\bar{c} = 0$
	$c = c_i$	$\bar{c} = 1$

La solution analytique de l'équation (8) présentée ici est obtenue en appliquant la technique de Brutsaert (1976) et prenant un profil de type Brutsaert (1976) de la forme :

$$\bar{\theta}(x,t) = \bar{\theta}(\eta) = \left(1 - \frac{\eta}{\eta_{wf}}\right)^{\left(\frac{1}{N_w}\right)} \quad (12a)$$

$$\bar{c}(x,t) = \bar{c}(\eta) = \left(1 - \frac{\eta}{\eta_{sf}}\right)^{\left(\frac{1}{N_s}\right)} \quad (12b)$$

représente les positions du front d'humectation (= *water front*) et du front de soluté (= *solute front*),  $N$  un paramètre de calage (avec  $N_w$  et  $N_s$ ).

Si l'équation (12a) décrit parfaitement la réalité en termes de déplacement du front d'humectation, l'équation (12b) ne peut reproduire l'effet de diffusion observé en fin de front du soluté (front diffus) et ne peut s'appliquer que pour un front de profil abrupt. Cependant, le but ici est d'offrir un moyen de valider les solutions issues de modèles numériques. Par ailleurs, on peut noter que l'équation (12) capture d'une manière générale la physique du problème de propagation d'un front de soluté. D'autres expressions pour  $\bar{c}(\eta)$  pourraient être utilisées si nécessaire, dans le but par exemple de caler résultats de simulations numériques et données expérimentales. Physiquement, les seules restrictions sur les paramètres  $N$  et  $\eta$  dans les équations (12a) et (12b) sont :  $N > 1$  et  $\eta \geq \eta_{wf} \geq \eta_{sf}$ . Pour des questions de simplifications algébriques, on choisit ici de prendre  $N_w = N_s$  et  $\eta_{wf} = \eta_{sf} = 1$ .

En utilisant les expressions fournies par (12a) et (12b), les équations (10) et (11) peuvent alors être intégrées directement pour déterminer les fonctions de diffusion  $D$  et dispersion  $D_s^*$  :

$$D(\bar{\theta}) = \frac{N}{2} \bar{\theta}^N \left(1 - \frac{\bar{\theta}^N}{N+1}\right) \quad (13)$$

et :

$$D_s^*(\bar{\theta}) = \frac{\theta_i}{\theta_s - \theta_i} D(\bar{\theta}) - \frac{N^2}{2(N+1)(N+2)} \bar{\theta}^{2N+1} \quad (14)$$

Dans la condition où  $D_s(\bar{\theta}) \geq 0$ , on obtient la restriction suivante :  $\theta_i > \frac{\theta_s}{N+3}$ .

En résumé,  $D$  et  $D_s$  sont obtenus à partir des équations (13) et (14), la solution des équations (5) et (6) est donnée par l'équation (12).

#### 4.2

### Précision du code numérique

Les résultats numériques obtenus par la méthode des lignes sont comparés avec ceux fournis par la

solution analytique en termes de teneur en eau et de concentration (Fig. 2). Les bilans massiques sont également calculés en intégrant les profils des variables  $\bar{\theta}$  et  $\bar{c}$  sur l'ensemble du domaine infiltré (Tableau II).

La valeur du paramètre  $N$  provenant de l'équation de Brutsaert (12) définit en fait la forme du front d'eau ou de la concentration en soluté. Plus  $N$  est grand et plus le front s'avèrera abrupt. A l'inverse, pour un  $N$  petit, le front apparaîtra plus diffus. En d'autres termes, les valeurs des gradients de teneur en eau  $\frac{d\theta}{dz}$  et de

concentration  $\frac{dc}{dz}$  à proximité des fronts respectifs d'eau et de soluté sont d'autant plus importantes que  $N$  est grand. Par conséquent,  $N$  joue un rôle majeur dans la précision des résultats numériques. Pour les différentes valeurs de  $N$  testées ( $N = 2, 3, 4$  et  $5$ ), les résultats de simulation numérique sont en accord avec ceux fournis par la solution analytique (Fig. 2a et 2b). Les écarts restent inférieurs à  $10^{-4}$  pour une valeur de  $N = 2$ , c'est-à-dire dans le cas d'un front diffus. Pour une valeur de  $N$  inférieure à 5, la précision numérique reste acceptable. L'erreur relative concernant les bilans massiques de teneur en eau et de soluté (Tableau II) est négligeable ( $\sim 10^{-4}$ ).

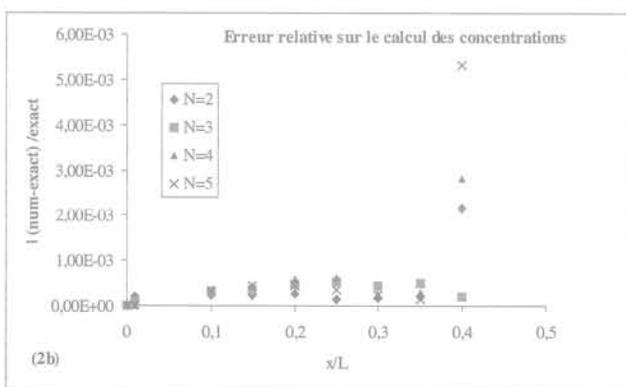
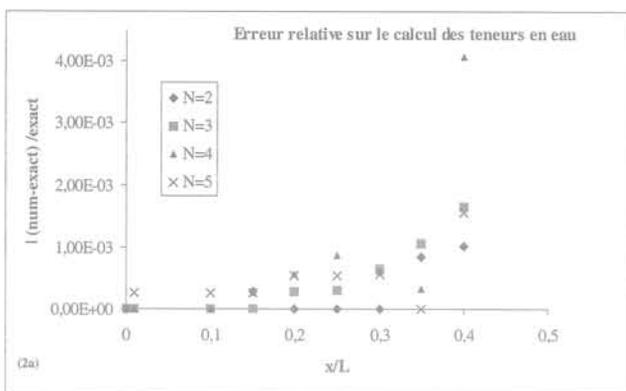


FIG. 9A ET 2B

Comparaison entre valeurs numériques et solutions exactes : teneurs en eau (a), concentrations (b) pour différentes distances  $x$  à l'origine. Conditions de simulation :  $\theta_s = 0,4$  ;  $\theta_i = 0,1$  ;  $L = 5$  ; temps d'infiltration = 5 ; pas d'espace = 0,025.

Comparison between numerical results and exact solution : water content (a) the solute concentration (b) at different distances  $x$  from the origin. Conditions of simulation :  $\theta_s = 0,4$  ;  $\theta_i = 0,1$  ;  $L = 5$  ; infiltration time = 5 ; step size = 0.025.

TABLEAU II

**Erreur sur la conservation de masse. Conditions de simulation :**  $\theta_s = 0,4$ ;  $\theta_r = 0,1$ ;  $L = 5$ ; temps d'infiltration = 5; pas d'espace = 0,025.

Mass balance error. Conditions of simulation :  $\theta_s = 0.4$ ;  $\theta_r = 0.1$ ;  $L = 5$ ; infiltration time = 5; step size = 0.025.

	N = 2	N = 3	N = 4	N = 5
eau	2,06E-04	4,18E-04	5,17E-04	5,05E-04
soluté	4,08E-04	1,87E-04	2,73E-04	6,39E-04

5

## Écoulement vertical et transport de soluté

5.1

### Conditions de simulation

Les solutions numériques sont obtenues à partir de la méthode des lignes pour un écoulement vertical défini par les équations (1) et (2). Deux sols sont testés : une argile (Yolo light Clay : YLC, Fuentes *et al.*, 1992) et un sol à texture grossière (INU) tel que celui utilisé par Inoue *et al.*, 2000. Les expressions des courbes de rétention d'eau des deux sols sont décrites par l'équation de Van Genuchten (1980) :

$$\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \left( 1 + \left( \frac{h}{h_v} \right)^n \right)^{-m} \quad (15)$$

La fonction de conductivité hydraulique de l'argile YLC est décrite par la relation de Brooks et Corey (1964) :

$$\frac{K}{K_s} = \left( \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^\beta \quad (16)$$

$$\text{avec } \beta = \frac{2}{mn} + 2 + p \quad (17)$$

Pour le sol INU, la relation de conductivité hydraulique est décrite par le modèle de Mualem (1976) :

$$K = K_s \bar{\theta}^l \left[ 1 - \left( 1 - \bar{\theta}^m \right)^2 \right] \quad (18)$$

De l'équation (15) à (18),  $K_s$  représente la conductivité hydraulique à saturation,  $h_v$ ,  $\beta$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $p$  et  $l$  sont des paramètres de forme et d'échelle dépendant de la nature du sol. Les valeurs de ces paramètres sont reportés au tableau III (d'après Fuentes *et al.*, 1992).

TABLEAU III

**Valeurs des paramètres hydrauliques des deux sols testés YLC et INU.**

Values of the hydraulic parameters of both soils tested YLC and INU.

	$\theta_s$	$\theta_r$	$-h_v$ (cm)	$m$	$n$	$K_s$ (cm h <sup>-1</sup> )	$l$	$p$
YLC	0,4950	0	19,31	0,0995	2,22	0,0443	-	-
INU	0,31	0,027	7,25	0,502	2,01	162	-1,16	1,907

Trois différents essais de simulation ont été réalisés, avec pour chacun, une condition de drainage libre (gradient nul) et un gradient de concentration nul à la base ( $z = -L$ ). En surface ( $z = 0$ ), des conditions aux limites de type Dirichlet (teneur en eau constante) et Neumann sont appliquées en termes d'humidification du sol. De même, soit la concentration en soluté est maintenue constante, soit une condition de flux est appliquée en surface. La teneur en eau initiale du sol est choisie constante ainsi que la concentration initiale en soluté. Le tableau IV donne un récapitulatif des différentes conditions testées pour ces essais de simulation.

5.2

### Résultats et discussion

Les figures 3a à 3f présentent les profils de teneur en eau et de concentration en soluté à des temps d'infiltration différents pour chacun des deux sols testés et suivant les conditions de simulation décrites dans le tableau IV. Dans chacun des exemples traités, le coefficient de diffusion moléculaire utilisé a pour valeur  $D_m = 1,9 \cdot 10^{-9}$  m<sup>2</sup>/s. La valeur du coefficient de dispersion longitudinal  $\alpha$  vaut 0,221 cm pour le sol INU et 0,02 cm pour le sol YLC. Dans l'article d'Inoue *et al.* (2000), à défaut de donner les profils de teneur en eau et de concentration en soluté, les résultats expérimentaux sont présentés en termes de variations dans le temps de la suction  $h$ , la teneur en eau  $\theta$  et la concentration  $c$  à une profondeur donnée. A titre de vérification, un test de simulation a été réalisé dans les mêmes conditions de simulation. Les courbes expérimentales d'Inoue *et al.* (2000) et numériques de  $h(t)$ ,  $\theta(t)$  et  $c(t)$  fournies à la côte  $z = 23$  cm, sont présentées sur la figure 4. Les résultats de simulation obtenus sont en parfait accord avec ceux fournis par Inoue *et al.*, 2000.

Concernant les tests de simulation présentés dans la figure 3, le transport de soluté dans le sol INU est complètement dominé par les effets de dispersion mécanique, et la contribution des effets de diffusion chimique est négligeable. Ceci se confirme par la valeur du rapport  $\alpha V/D_m$  (vitesse  $V = q/\theta$ ) qui est de l'ordre de 100. Ce résultat n'est pas surprenant, car le sol INU est un sol à texture grossière avec une conductivité hydraulique élevée et, par conséquent, des vitesses d'écoulement  $V$  également élevées. En revanche, dans le cas du sol de type argile YLC, le coefficient de diffusion moléculaire gouverne essentiellement le transport du soluté. Suivant les calculs présentés par Smiles *et al.* (1978),  $D_s$  peut être choisi comme indépendant du terme de vitesse  $V$  dans le sol YLC pour des durées d'infiltration supérieures à 4 secondes. Par ailleurs, les figures 3a à 3f mettent en évidence le retard du front de soluté par rapport au front d'humectation, ceci étant dû à l'effet « piston » du front d'infiltration sur la teneur en eau initiale du sol (Smiles *et al.*, 1978).

6

### Conclusion et perspectives

La solution analytique proposée ici dans le cas d'un écoulement horizontal couplé au problème de transport

TABLEAU IV

Conditions initiales et aux limites des essais de simulation ; domaine  $L = 30$  cm ; pression  $h$  (cm) ; flux  $q_0$  (cm/min) ; concentration  $c$  (mol/l).

Initial and boundary conditions of the numerical simulation ; Domain  $L = 30$  cm ; constant head  $h$  (cm) ; flux  $q_0$  (cm/min) ; concentration  $c$  (mole/l).

Essai	Sol	Conditions initiales $0 \leq z \leq L$	Conditions aux limites	
			$z = 0$	$z = L$
1 (Fig. 3a, b)	INU	$h = -26,8$ $c = 0,02$	$q_0 = 0,155$ $c_0 = 0,1$  $-\theta D_s \frac{\partial c}{\partial z} + qc = q_0 c_0$	$\frac{\partial h}{\partial z} = 0$ $\frac{\partial c}{\partial z} = 0$
2 (Fig. 3c, d)	YLC	$h = -200$ $c = 0,0002$	$h = -10$ $c = 0,001$	$\frac{\partial h}{\partial z} = 0$ $\frac{\partial c}{\partial z} = 0$
3 (Fig. 3e, f)	YLC	$h = -200$ $c = 0,0002$	$q_1 = 7 \times 10^{-4}$ $c = 0,001$	$\frac{\partial h}{\partial z} = 0$ $\frac{\partial c}{\partial z} = 0$

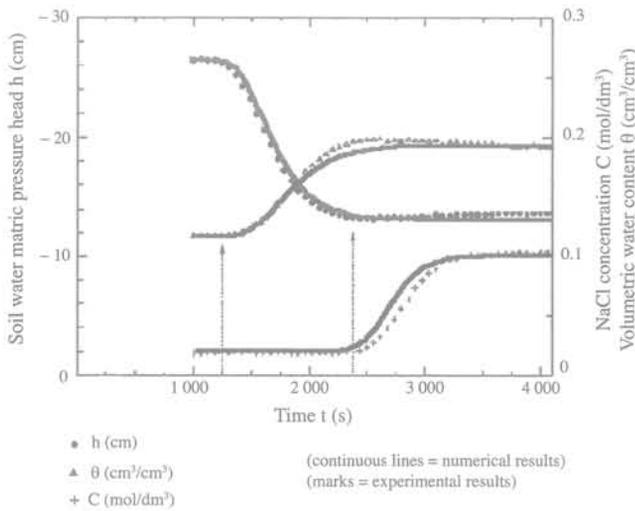
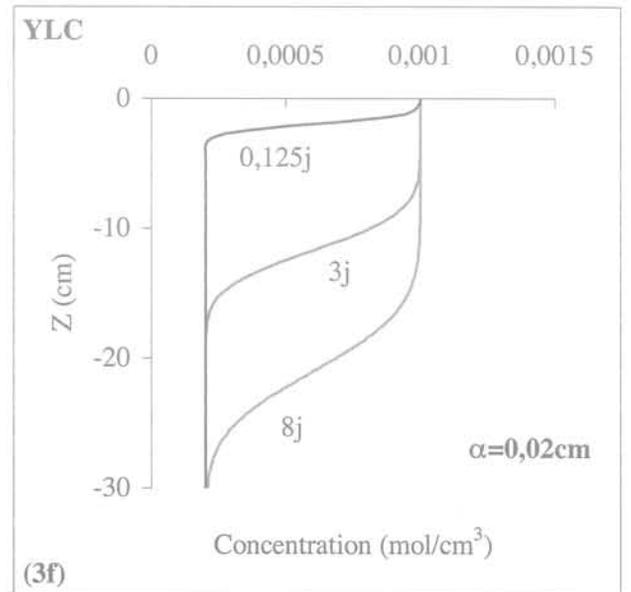
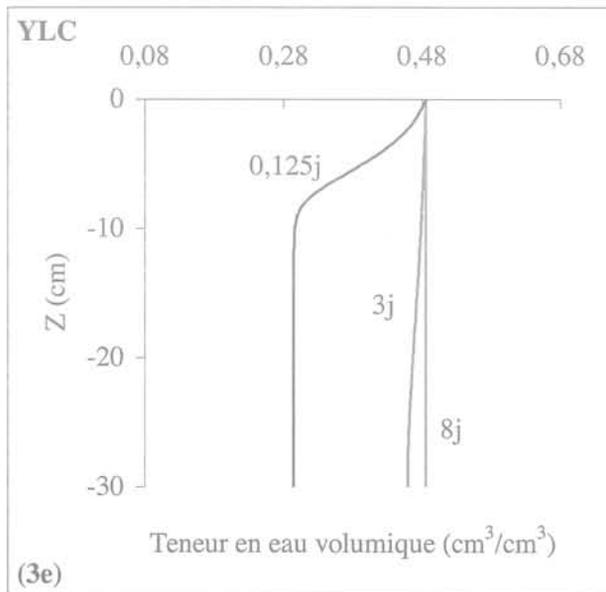
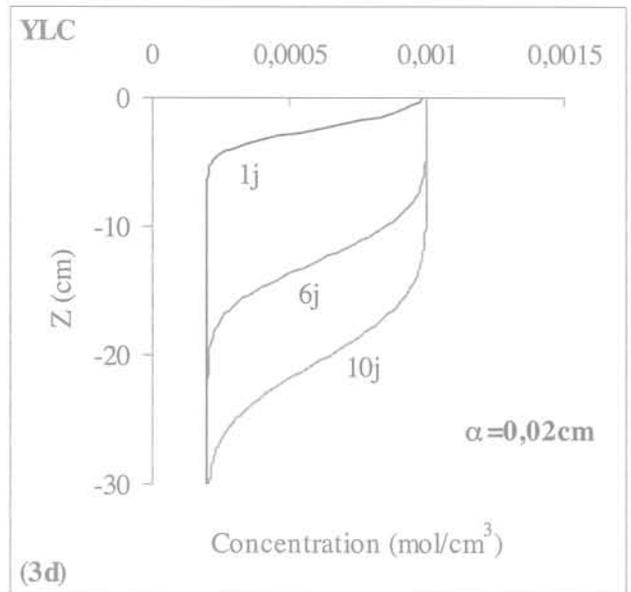
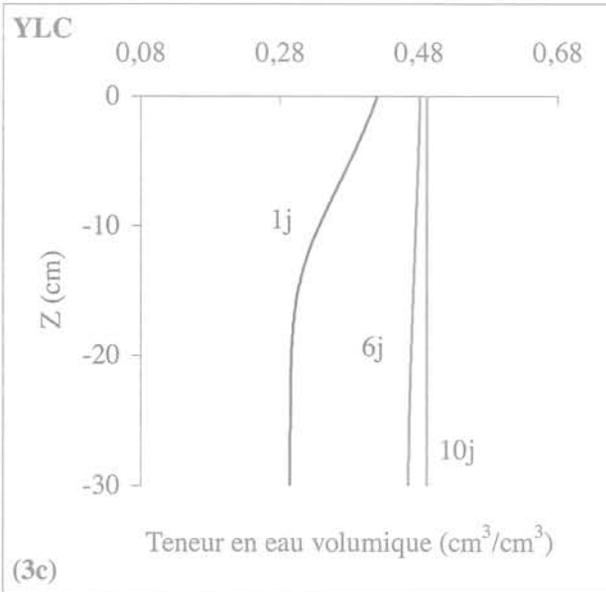
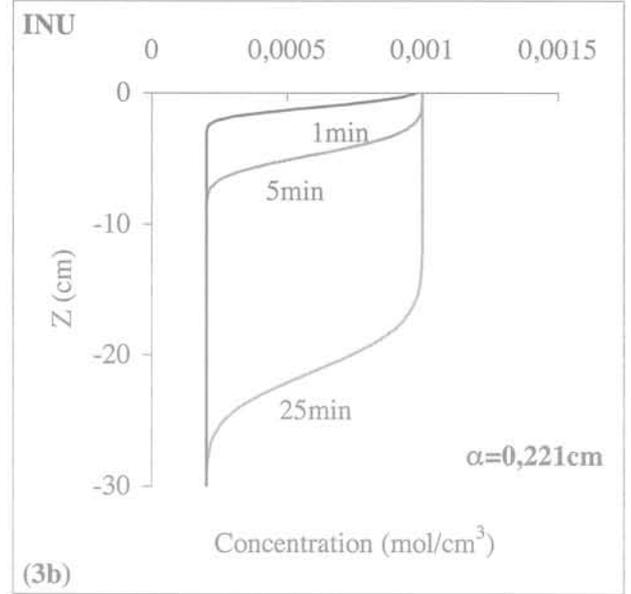
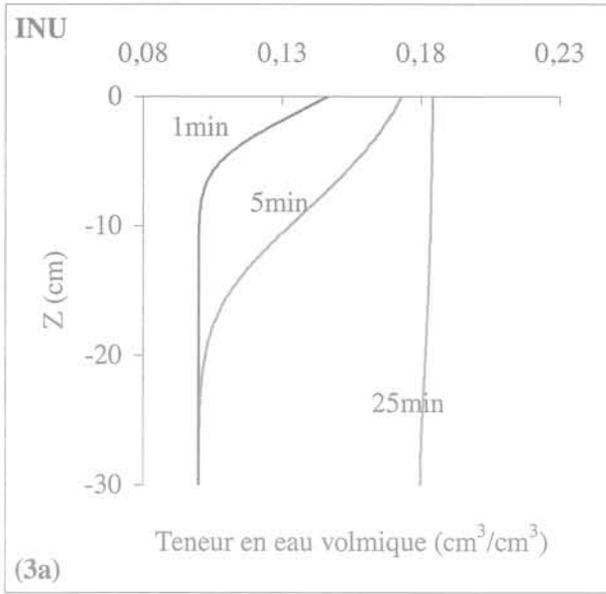


FIG. 4 Comparaison entre résultats de simulation numérique utilisant la méthode des lignes et résultats expérimentaux fournis par Inoue et al., 2000.

Comparison between numerical results using the method of lines and experimental results from Inoue et al., 2000.

de soluté en milieu non saturé offre un moyen efficace de valider les différents modèles numériques disponibles dans la littérature. Dans cette étude, elle a notamment permis de montrer l'efficacité et la robustesse de la méthode des lignes appliquée à la résolution de ces problèmes. Par ailleurs, la méthode de lignes a été également testée en configuration d'écoulement verticale et les résultats de simulation corroborent parfaitement les résultats expérimentaux fournis dans la littérature. Parce que cette technique de résolution numérique présente l'avantage d'être très versatile et très facile à programmer sous environnement MATLAB, il serait intéressant de proposer, à partir de cette technique numérique, des solutions aux problèmes d'écoulements préférentiels (*fingering effects*), par le développement d'un modèle 2D, avec prise en compte des phénomènes d'hystérésis (drainage-humidification) dans les fonctionnelles utilisées et pour des systèmes de sol multicouches.



**FIG. 3** Profils de teneur en eau et de concentration en soluté obtenus à différents temps d'infiltration pour les sols INU (3a, b) et YLC (3c, d, e, f). Pas d'espace = 0,3 cm.  
Water and solute profiles reached at different infiltration times for INU (3a, b) and YLC (3c, d, e, f) soils; step size of 0.3 cm.

- Bear J. – *Hydraulics of groundwater*. McGraw-Hill, New York, p. 225-248.
- Bond W.J. – Velocity-dependent hydrodynamic dispersion during unsteady, unsaturated soil water flow: Experiments. *Water Resour. Res.* 22, 1986, p. 1881-1889.
- Brooks R.H., Corey, C.T. – Hydraulic properties of porous media. *Hydrol. Paper*, Colorado State University, 1964, Fort Collins.
- Brutsaert W. – The concise formulation of diffusive sorption of water in a dry soil. *Water Resour. Res.* 12, 1976, p. 1118-1124.
- Flury M., Wu Q.J., Wu L., Xu L. – Analytical solution for solute transport with depth dependent transformation or sorption coefficient. *Water Resour. Res.* 34, 1998, p. 2931-2937.
- Fuentes C., Haverkamp R., Parlange J.Y. – Parameter constraints on closed-form soilwater relationships. *Journal of Hydrology* 3-4, vol. 97, Feb. 15, 1992, p. 341-346.
- Higham D.J., Higham N.J. – *MATLAB guide*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000, Philadelphia
- Inoue M., Simunek J., Shiozawa S., Hopmans J.W. – Simultaneous estimation of soil hydraulic and solute transport parameters from transient infiltration experiments. *Advances in Water Resources* 23, 2000, p. 677-688.
- Lee H., Braddock R., Sander G. – Automating the Method of Lines for Modeling Moisture Flow in the Unsaturated Zone. *Computational Techniques and Applications CTAC-98*, B.J. Noye, M.D. Teubner, A.W. Gill (eds), World Scientific Publishing Co, 1998, p. 361-368.
- Mualem Y. – A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water Resour. Res.* 12, 1976, p. 513-522.
- Park N. – Closed-form solutions for steady state density dependent flow and transport in a vertical soil column. *Water Resour. Res.* 32 (5), 1996, p. 1317-1322.
- Sander G.C., Parlange, J.Y., Kuhnelt V., Hogarth W.L., Lockington D., O'Kane J. – Exact nonlinear solution for constant flux infiltration. *Journal of Hydrology* 3-4, vol. 97, Feb. 15, 1998, p. 341-346.
- Schiesser W.E. – *The numerical method of lines. Integration of partial differential equations*. Academic Press, 1991, 326 p.
- Smiles D.E., Perroux K.M., Zegelin S.J., Raats P.A.C. – Hydrodynamic dispersion during constant rate absorption of water by soil. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 45, 1981, p. 453-458.
- Smiles D.E., Phillip J.R., Knight J.H., Elrick D.E. – Hydrodynamic dispersion during absorption of water by soil. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 42, 1978, p. 229-234.