un modèle de matériau microfissuré

par
M. Lino
Maître de conférence de Mécanique à l'E. N. P. C.
Ingénieur au Département Grands Ouvrages
Coyne et Bellier - Paris

Introduction

Les matériaux minéraux présentent, du point de vue de leur comportement mécanique un ensemble de caractéristiques communes : dissymétrie du comportement en traction et en compression, déformation irréversible avec augmentation de volume, dépendance du domaine de reversibilité par rapport à la contrainte moyenne, rupture par séparation perpendiculairement à la direction d'extension maximale.

Un modèle simple de matériau microfissuré isotrope permet de rendre compte de ces caractères communs à partir de l'hypothèse que la source principale d'irréversibilité est la propagation et le développement de la microfissuration dans la masse du matériau.

Le modèle, faisant appel aux méthodes de la Mécanique Linéaire de la Rupture, fournit un outil de compréhension du comportement, sous charge mécanique de courte durée, des matériaux minéraux isotropes tels que les bétons et mortiers, les matrices rocheuses, les argiles raides surconsolidées ou le graphite.

Dans le premier chapitre, on décrit le modèle proposé et on discute la validité des hypothèses faites.

Le deuxième est consacré à l'application de la Mécanique Linéaire de la Rupture au modèle et à l'établissement des principales équations.

On étudie, au troisième chapitre, le domaine de reversibilité du modèle dans le plan des contraintes principales extrêmes. Deux modes fondamentaux d'apparition de la première irréversibilité sont mis en évidence.

L'étude de la stabilité de la propagation, qui fait l'objet du quatrième chapitre, permet de comprendre la dissymétrie du comportement en traction et en compression. Enfin, au cinquième chapitre, le comportement du modèle dans les essais mécaniques classiques (uniaxial, biaxial et triaxial) est comparé aux comportements observés expérimentalement du point de vue des déformations, des domaines de reversibilité et des modes de rupture.

On conclut par une synthèse des traits caractéristiques du comportement mécanique des matériaux microfissurés.

1 Description du modèle

Historiquement, le premier modèle de matériau microfissuré est celui de Griffith [6, 7] qui considère une matrice élastique plane affaiblie par des défauts elliptiques. Ce modèle prévoit une résistance à la compression huit fois supérieure à la résistance à la traction, mais ne rend pas compte de façon satisfaisante de l'augmentation de la résistance avec la contrainte hydrostatique de confinement.

McClintock et Walsh [4] ont modifié le modèle de Griffith en prenant en compte l'effet de forces tangentielles de frottement sur les lèvres des fissures.

Supposant que les fissures se ferment sous l'effet d'une compression, même faible, ces chercheurs ont trouvé le domaine de rupture biaxial représenté par la figure 1 : ce domaine est en meilleur accord avec les résultats publiés sur la rupture des roches, que le modèle original de Griffith.

Le présent modèle, qui prend en compte un type de défauts différent de ceux de McClintock et Walsh, peut être considéré comme un développement des idées introduites par ces deux auteurs, à la lumière des apports récents de la Mécanique Linéaire de la Rupture.

1.1 Types de défauts pris en compte et hypothèses simplificatrices

Le matériau microfissuré, homogène et isotrope est modélisé par une matrice linéairement élastique tridimensionnelle affaiblie par des défauts qui sont des fissures planes, de forme circulaire et de diamètre 2 a (fig. 2-A).

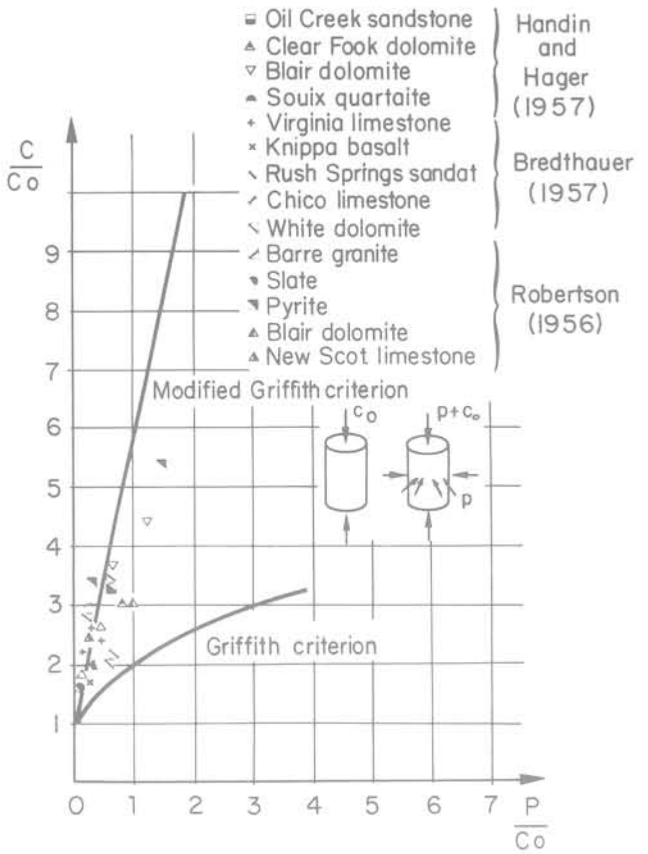


Fig. 1 Influence du frottement sur les lèvres de la fissure (d'après McClintock et Walsh, 1962)

Hypothèse 1 : Les défauts sont supposés uniformément répartis dans le volume et d'orientation quelconque. Dans un volume donné de matériau, on peut trouver une densité uniforme de défauts d'orientation choisie à l'avance. Cette hypothèse garantie *l'homogénéité* et l'*isotropie* du modèle.

Hypothèse 2 : Ces défauts sont supposés suffisamment éloignés les uns des autres, pour qu'on puisse négliger les perturbations du champ des contraintes au voisinage d'un défaut dues à la présence des autres défauts. L'étude de l'apparition des premières irréversibilités dans le matériau est ainsi ramenée à l'étude de l'équilibre limite d'un défaut unique dans un champ de contrainte tridimensionnel, homogène à l'infini, c'est-à-dire à une distance du défaut de l'ordre de quelques diamètres de celui-ci.

Hypothèse 3 : Les fissures qui atteignent les premières l'équilibre limite et se propagent sont telles que leur plan soit parallèle à la direction de la contrainte intermédiaire σ_2. Les premières propagations ont donc lieu dans le plan des contraintes principales extrêmes σ_1 et σ_3, et indépendamment de la valeur de σ_2.

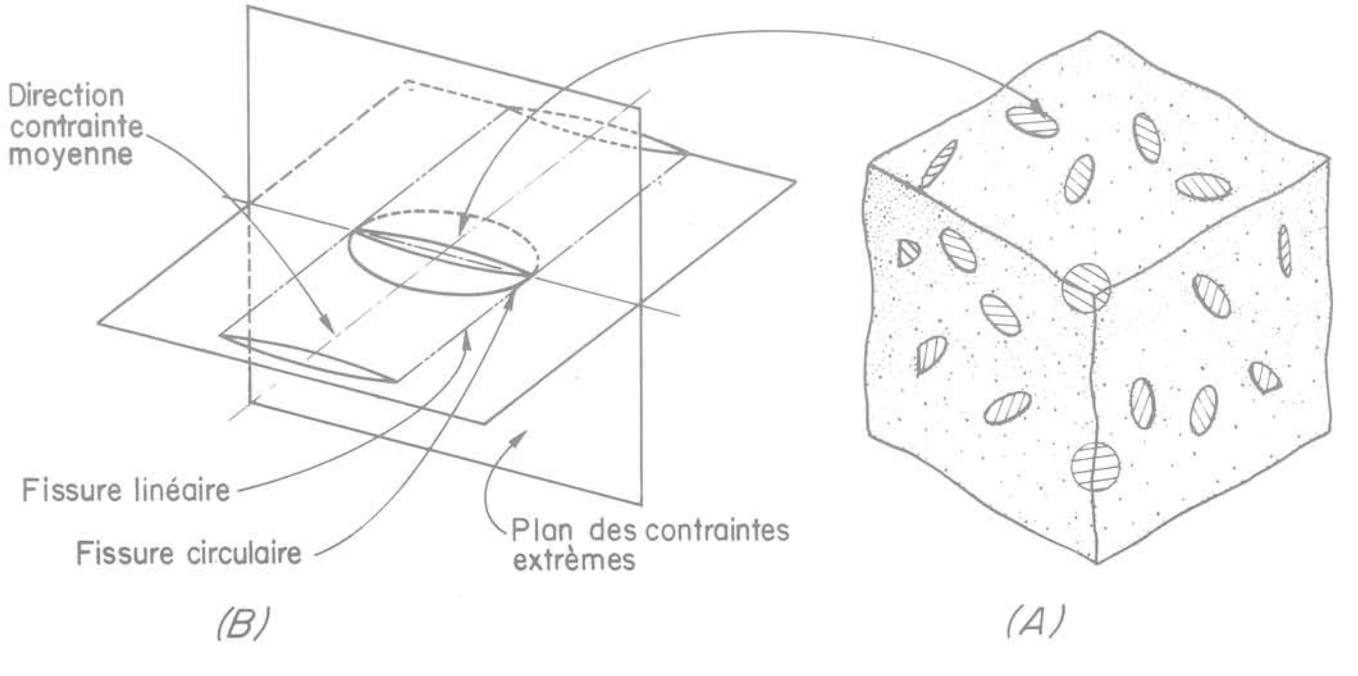
Cette hypothèse est raisonnable puisqu'on sait que les critères macroscopiques de rupture pour les matériaux minéraux dépendent assez peu de cette contrainte intermédiaire; c'est ce qui justifie la notion très utilisée de critère de la courbe intrinsèque de Mohr-Caquot.

Hypothèse 4 : La fissure plane, dans le champ de contrainte tridimensionnel, se comporte à l'équilibre limite comme une fissure linéaire en Déformation Plane dans le plan des contraintes principales extrêmes σ_1 et σ_3 (fig. 2-B).

Cette hypothèse permet de se ramener à l'étude d'une fissure linéaire dans un plan, ce qui simplifie considérablement les calculs et ne modifie pas qualitativement les phénomènes.

Les hypothèses faites sont certes une schématisation grossière de la réalité, mais le bon accord entre les prédictions du modèle et les données expérimentales disponibles justifie l'intérêt de cette modélisation qui prend en compte le phénomène principal d'irréversibilité, à savoir la propagation de la microfissuration.

Fig. 2 Défaut circulaire et fissure linéaire associée



1.2 Interaction des lèvres des fissures

On suppose que le contact entre les deux lèvres d'une fissure satisfait aux lois du *frottement solide de Coulomb.*

En notant σ_n et σ_t les composantes normales et tangentielles des actions de contact en un point de l'interface, on a :
$\sigma_n \leqslant 0$ (contact unilatéral) avec
soit $\sigma_n = 0$ et $\sigma_t = 0$
soit $\sigma_n < 0$ et $|\sigma_t| \leqslant -\text{tg}\,\varnothing \cdot \sigma_n$

où $\text{tg}\,\varnothing = f$ est le coefficient de frottement entre les deux lèvres de la fissure.

1.3 Critère de propagation des défauts

On suppose que la condition de propagation d'une fissure est le critère énergétique de Griffith [6, 7]

(1) $$G \geqslant G_c$$

où G est le taux de restitution d'énergie du système défini par

$$G = -\frac{\partial}{\partial a}(\Omega + \mathcal{V})$$

où Ω est l'énergie élastique du système, $\mathcal{V}$ l'énergie potentielle des sollicitations extérieures et a la longueur de la fissure et où G_c est une grandeur caractéristique du matériau constituant la matrice et caractérisant la résistance à la propagation des fissures. Pour les matériaux de type fragile
$G_c = 2\gamma$

où γ désigne l'énergie spécifique de surface du matériau.

Le modèle proposé procède donc du même esprit que celui de McClintock et Walsh, mais il permet une discussion plus approfondie du comportement des matériaux microfissurés en particulier, grâce à l'utilisation de la Mécanique Linéaire de la Rupture :

— caractère tridimentionnel du modèle, qui permet de préciser les critères macroscopiques d'irréversibilité à prendre en compte;

— discussion de la stabilité de la propagation des défauts;

— étude des déformations irréversibles avant rupture et mode de rupture.

2 Calcul du taux de restitution d'énergie G

2.1 Rappel de Mécanique de la Rupture [3, 13]

Le champ de contrainte en fond de fissure est entièrement caractérisé par deux coefficients K_I et K_{II} appelés facteurs d'intensité de contrainte : ces deux coefficients mesurent l'intensité de la singularité en $r^{-\frac{1}{2}}$ du champ de contrainte en fond de fissure.

K_I et K_{II} caractérisent également l'intensité des discontinuités du déplacement sur les lèvres de la fissure, qui sont de la forme :

(2) $$[u_2] = u_2(r, \pi) - u_2(r, -\pi) = \frac{4(1-\nu)}{\mu} K_I \sqrt{r} \text{ (mode I)} \quad \text{(fig. 3-A)}$$

$$[u_1] = u_1(r, \pi) - u_1(r, -\pi) = \frac{4(1-\nu)}{\mu} K_{II} \sqrt{r} \text{ (mode II)}$$

où ν désigne le coefficient de Poisson, et μ le module de cisaillement.

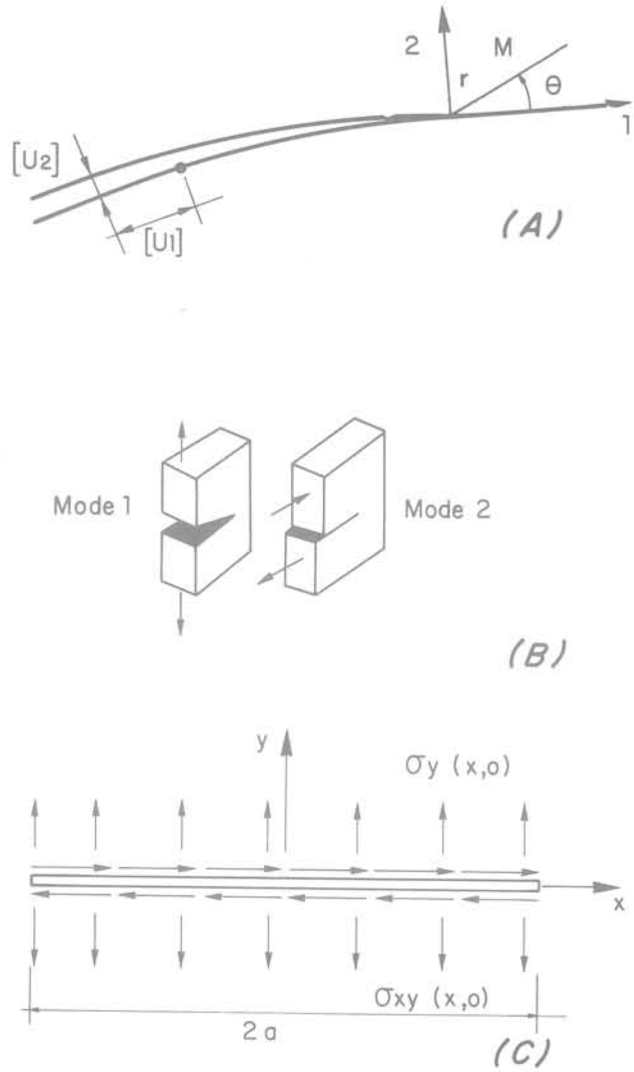


Fig. 3 Rappel de mécanique de la rupture

Ainsi le mode I est le mode d'ouverture normale aux lèvres de la fissure et le mode II est le mode de glissement tangentiel (fig. 3-B). Cette distinction joue un rôle important dans la suite de l'exposé.

La formule d'Irwin s'écrit :

$$G = \frac{1-\nu^2}{E}(K_I^2 + K_{II}^2) \tag{3}$$

où E désigne le module d'Young.

Elle relie le taux de restitution d'énergie G au champ de contrainte en fond de fissure. Ce résultat est obtenu pour une fissure se propageant en ligne droite, en déformation plane.

En général, en mode mixte (I et II) les fissures ne se propagent pas en ligne droite, et G n'est plus alors donné rigoureusement par la formule d'Irwin.

Le critère de Griffith peut donc s'écrire, pour le modèle étudié

$$K_I^2 + K_{II}^2 \geqslant K_c^2 \quad \text{avec} \quad K_c^2 = \frac{E}{1-\nu^2} G_c$$

où E est le module d'Young.

D'où il résulte en mode pur que

$K_{I_c} = K_c \quad (K_{II} = 0)$

$K_{II_c} = K_c \quad (K_I = 0).$

En pratique, K_{Ic} et K_{IIc} sont en général différents, mais le critère de rupture $K_I^2 + K_{II}^2 \geq \frac{E}{1-\nu^2} G_c$ peut être considéré comme une approximation satisfaisante compte tenu d'une part de l'absence de théorie bien établie de la propagation en mode mixte et des autres approximations faites dans le modèle étudié. Sur ce point, on pourra se reporter à la synthèse de D. Broek [3].

2.2 Fissure dans un milieu infini

2.2.1 Calcul de K_I et K_{II} : Soit une fissure de longueur 2a dans un milieu plan infini (en déformation plane ou en contrainte plane) (fig. 3-C).
Les deux lèvres de la fissure étant soumises à un système de forces autoéquilibrées $\sigma_y(x, 0)$ et $\sigma_{xy}(x, 0)$ donné, on a le résultat suivant :

$$K_I = \sqrt{\frac{1}{\pi a}} \int_{-a}^{+a} \sigma_y(x, 0) \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\, dx \tag{4}$$

$$K_{II} = \sqrt{\frac{1}{\pi a}} \int_{-a}^{+a} \sigma_{xy}(x, 0) \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\, dx$$

2.2.2 Fissure dans un champ de contrainte homogène (fig. 4).

Soient σ_1 et σ_3 les contraintes principales. On calcule tout d'abord le vecteur contrainte $\vec{T} = \sigma_n \vec{n}_\beta + \sigma_t \vec{t}_\beta$ sur la facette normale $\vec{n}_\beta$ en l'absence de fissure :

$$\vec{n}_\beta \left| \begin{array}{l} -\sin\beta \\ \cos\beta \end{array} \right. \qquad \vec{t}_\beta \left| \begin{array}{l} -\cos\beta \\ -\sin\beta \end{array} \right.$$

Par définition

$$\sigma_n = (\bar{\sigma}\cdot\vec{n}_\beta)\vec{n}_\beta = \sigma_1 \sin^2\beta + \sigma_3 \cos^2\beta$$

et $\quad \sigma_t = (\bar{\sigma}\cdot\vec{n}_\beta)\vec{t}_\beta = (\sigma_1 - \sigma_3)\sin\beta\cos\beta$

où $\bar{\sigma}$ désigne le tenseur des contraintes au point considéré.

On peut encore écrire :

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\cos 2\beta \tag{5}$$

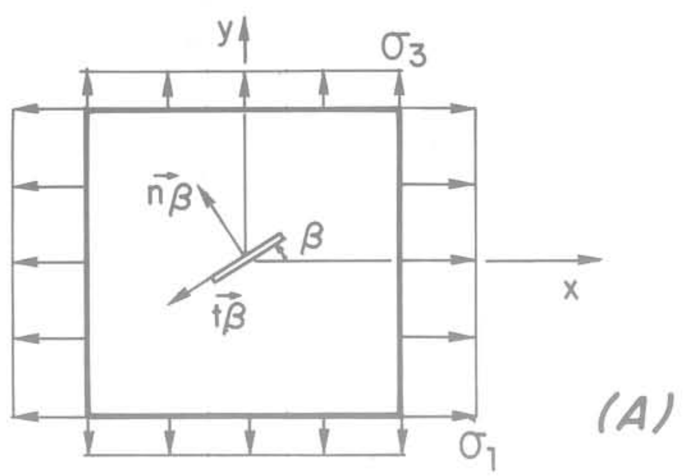
$$\sigma_t = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\sin 2\beta.$$

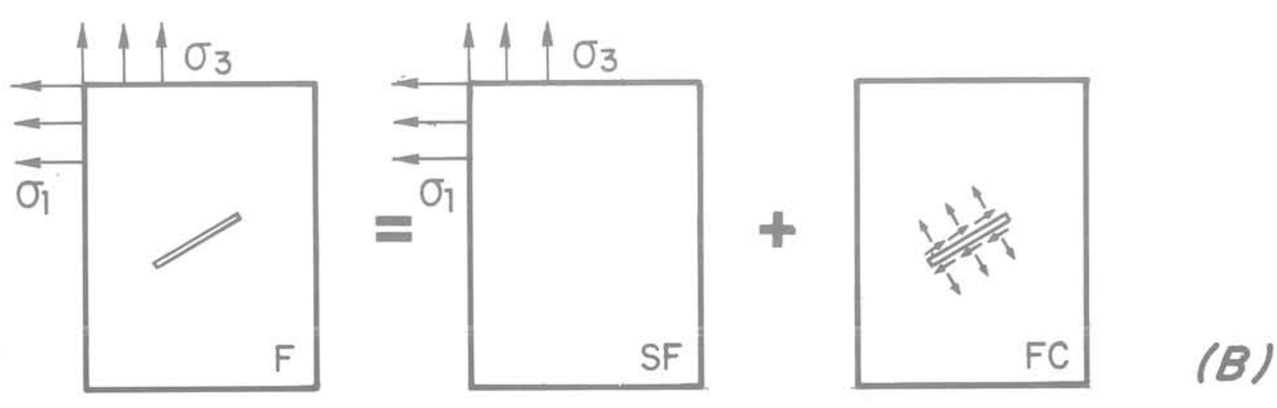
Principe de superposition : Dans l'hypothèse de l'élasticité linéaire, le principe de superposition des champs de contrainte s'applique. L'état de contrainte qui s'établit dans le milieu fissuré sous l'action du champ homogène à l'infini σ_1 et σ_3 est égal à la somme du champ solution dans le milieu sans fissure et du champ solution du problème avec champ nul à l'infini et dans lequel on soumet les lèvres de la fissure à une répartition normale uniforme σ_n et une répartition tangentielle uniforme σ_t. σ_n et σ_t désignent les deux composantes du vecteur contrainte sur la facette correspondant à la fissure en l'absence de fissure (fig. 4).

En effet, les actions de bord agissant sur F sont bien la somme de celles agissant sur SF et FC et les actions de volume sont nulles dans les deux cas.

On en déduit les valeurs de K_I et K_{II} en utilisant la formule (4)

Fig. 4 Fissure dans un champ de contraintes homogène





$$K_I = 0 \quad \text{si} \quad \sigma_n < 0$$

(compression sur les lèvres de la fissure)

(6) $$K_I = \sqrt{\pi a}\,\sigma_n \quad \text{si} \quad \sigma_n > 0$$

(traction sur les lèvres de la fissure)

$$K_{II} = \sqrt{\pi a}\,\sigma_n.$$

2.3 Prise en compte du frottement

On se place dans le cas où les lèvres de la fissure sont en compression ($\sigma_n < 0$) et on note σ_{tf} les actions tangentielles de contact à l'interface.

Pour calculer K_{II}, il suffit de rajouter à l'état F la répartition tangentielle σ_{tf}. On a donc :

$$K_{II frot} = \sqrt{\pi a}\,\sigma_t + \sqrt{\frac{1}{\pi a}} \int_{-a}^{+a} \sigma_{tf}(x, 0) \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,dx.$$

Vu que les forces de frottement s'opposent au glissement pour tout x, $\sigma_t(x, 0)$ et $\sigma_{tf}(x, 0)$ sont opposés.

On se place dans le cas où σ_t est positif, alors σ_{tf} est négatif et

$$0 \leqslant K_{II frot} < \sqrt{\pi a}\,\sigma_t.$$

La première inégalité provient du fait que les forces tangentielles de frottement sont des forces passives et ne peuvent pas donner lieu à une singularité propre, elles peuvent seulement faire diminuer l'intensité de la singularité existante.

On fait l'hypothèse que sur toute la longueur de la fissure, le frottement limite est atteint, on a alors

$K_{II frot} = \sqrt{\pi a}(\sigma_t + \mathrm{tg}\,\varnothing\,\sigma_n)$(cas où $\sigma_t > 0$).

Justification de cette hypothèse

Dans les essais de matériau, le trajet de charge est souvent le suivant : [1]

- réalisation d'un état de contrainte sphérique ($K_{II} = 0$);
- déviation à partir de cet état.

C'est en particulier le cas dans les essais classiques de compression sous pression de confinement et dans les essais de striction. Si λ est un paramètre décrivant le chargement $|K_{II}|$ est une fonction croissante de λ; il en est de même pour la discontinuité de déplacement tangentiel qui est proportionnel à K_{II} d'après (2).

On peut donc admettre qu'il y a glissement continu pendant le chargement et donc que

$$\sigma_{tf} = \mathrm{tg}\,\varnothing \cdot \sigma_n.$$

En résumé :

(7) $$K_{II} = \sqrt{\pi a}\,\sigma_t \quad \text{si} \quad \sigma_n = 0 \text{ (cas } \sigma_t > 0)$$

$$K_{II} = \sqrt{\pi a}(\sigma_t + \mathrm{tg}\,\varnothing\,\sigma_n) \quad \text{si} \quad \sigma_n < 0.$$

3 Domaine de reversibilité

On se propose dans ce chapitre de déterminer le domaine de reversibilité du modèle *dans le plan des contraintes extrêmes* (σ_1, σ_3).

3.1 $\sigma_1 \geqslant \sigma_3 \geqslant 0$ Double traction

Pour tout angle β d'inclinaison de la fissure par rapport à la direction de σ_1, σ_n est positif, il n'y a donc pas de forces tangentielles de frottement. On a donc

$$K_I = \sqrt{\pi a}\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\beta\right)$$

et $$K_{II} = \sqrt{\pi a}\,\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\beta.$$

Le critère de propagation est de la forme $K_I^2 + K_{II}^2 = K_c^2$. L'angle β correspond à la première propagation, rend donc maximum l'expression $K_I^2 + K_{II}^2$.

$$K_I^2 + K_{II}^2 = \frac{\pi a}{4}\left[(\sigma_1 + \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - 2(\sigma_1^2 - \sigma_3^2) \cos 2\beta\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}(K_I^2 + K_{II}^2) = \pi a (\sigma_1^2 - \sigma_3^2) \sin 2\beta.$$

Le taux de restitution G est donc extremum pour :

$\beta = 0 \quad K_I = \sqrt{\pi a}\,\sigma_3$ qui est un minimum

ou $\beta = \dfrac{\pi}{2} \quad K_I = \sqrt{\pi a}\,\sigma_1$ qui est un maximum.

La première rupture a donc lieu pour les fissures verticales $\left(\beta = \dfrac{\pi}{2}\right)$ perpendiculairement à la plus grande contrainte de traction.

En double traction, le domaine de réversibilité est donc limité par la condition

$$\sigma_1 \leqslant \frac{K_c}{\sqrt{\pi a}}.$$

La contrainte maximale admissible en traction S_t vaut :

$$S_t = \frac{K_c}{\sqrt{\pi a}}.$$

3.2 $\sigma_3 \leqslant \sigma_1 \leqslant 0$ Double compression

On a dans ce cas $K_I = 0$ puisque pour tout β, σ_n est négatif (compression)

$$K_{II} = \sqrt{\pi a}\,\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\beta + \mathrm{tg}\,\varnothing\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\beta\right).$$

Le maximum de K_{II} et donc de $K_I^2 + K_{II}^2$ est atteint pour

$$\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varnothing}{2}.$$

On a alors :

$$K_{II} = \frac{\sqrt{\pi a}}{2}\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\cos \varnothing} + \mathrm{tg}\,\varnothing(\sigma_1 + \sigma_3)\right).$$

L'équilibre limite est donné par

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2 \cos \varnothing} + \mathrm{tg}\,\varnothing\,\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{K_{I_c}}{\sqrt{\pi a}}.$$

Dans la zone de compression, le domaine de réversibilité est donc limité par une demi-droite de pente

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_1} = \frac{1 + \sin \varnothing}{1 - \sin \varnothing}.$$

Pour $\sigma_1 = 0$, on obtient la contrainte maximale admissible en compression simple S_c.

On a le résultat suivant :

$$\frac{S_c}{S_t} = 2\sqrt{\frac{1 + \sin \varnothing}{1 - \sin \varnothing}}.$$

3.3 $\sigma_1 \geqslant 0 \geqslant 0_2$ Traction - Compression

Deux cas sont à considérer ici, suivant que la facette de la fissure est ou non comprimée.

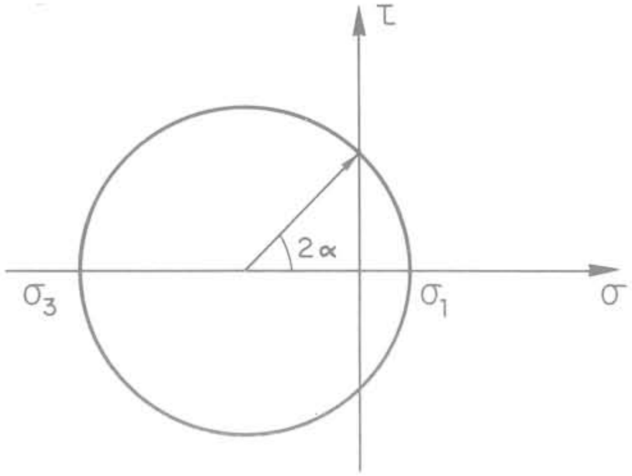


Fig. 5 Cercle de Mohr

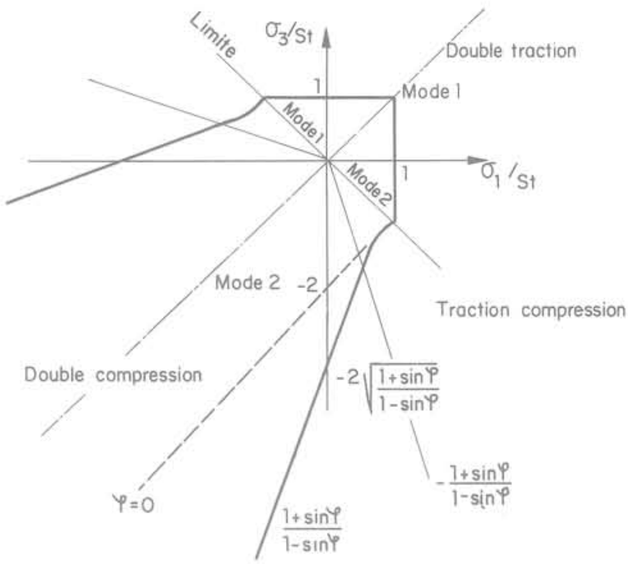


Fig. 6 Domaine de réversibilité dans le plan des contraintes extrêmes

3.3.1 $\alpha-\frac{\pi}{2}\leqslant\beta\leqslant\alpha+\frac{\pi}{2}$ où α est l'angle défini par la figure 5.
α caractérise le rapport entre la traction et la compression.
Dans ce cas σ_n est positif et on est dans la même configuration qu'en double traction. La limite est :

$$\sigma_1\leqslant\frac{K_c}{\sqrt{\pi a}}=S_t \quad \text{avec} \quad K_{II}=0.$$

3.3.2 Si $\beta<\frac{\pi}{2}-\alpha$ ou $\beta>\frac{\pi}{2}+\alpha$. Dans ce cas, les lèvres de la fissure sont en compression et donc $K_I=0$.
L'étude du maximum de K_{II} montre que dans ce cas, deux situations sont possibles :

- si $\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\leqslant-\frac{1+\sin\varnothing}{1-\sin\varnothing}$ la première propagation a lieu en mode II pour une inclinaison $\beta=\frac{\pi}{4}+\frac{\varnothing}{2}$.

La courbe limite est le prolongement de la demi-droite obtenue en double compression.

- Si $\frac{\sigma_3}{\sigma_1}\geqslant-\frac{1+\sin\varnothing}{1-\sin\varnothing}$ la première propagation a lieu en mode II pour une inclinaison $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ et la courbe limite est un arc d'hyperbole équilatère définie par

$$\sigma_1\,\sigma_3=-\frac{K_c^2}{\pi a}=-S_t^2.$$

3.4 Critère macroscopique d'irréversibilité

On voit donc apparaître (fig. 6) deux zones de comportement fondamentalement différent suivant que la contrainte moyenne $\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}$ est une traction ou une compression.

- *Comportement de traction* si $\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}>0$.

Les premières irréversibilités interviennent en mode I, par ouverture perpendiculairement à la fissure.
Le critère macroscopique associé est un *critère de traction maximale* $\sigma_1\leqslant S_t$.

Il est remarquable, et conforme à l'expérience, que la résistance à la traction biaxiale soit égale à la résistance à la traction uniaxiale.

- *Comportement de compression* si $\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}<0$.

Les premières irréversibilités interviennent en mode II, par glissement tangentiel dû aux contraintes de cisaillement.

Le critère macroscopique associé est essentiellement un *critère de Coulomb*. $\sigma_1(1+\sin\varnothing)-\sigma_3(1-\sin\varnothing)=2C\cos\varnothing$ où C est la cohésion et vaut ici $\frac{K_c}{\sqrt{\pi a}}=S_t$.

Le critère de Coulomb s'écrit également : $|\sigma_t|\leqslant c+\operatorname{tg}\varnothing\,|\sigma_n|$ et traduit une résistance au cisaillement qui croît linéairement avec la contrainte normale.

Le présent modèle fournit ainsi un support physique au critère de Coulomb et en particulier l'angle de frottement interne apparaît comme l'angle de frottement entre les deux lèvres des fissures existant dans le matériau. On retrouve également l'angle $\frac{\pi}{4}+\frac{\varnothing}{2}$ caractérisant les premières irréversibilités.

- *Zone de transition*

Entre la zone de traction maximale et la zone caractérisée par le critère de Coulomb, il existe un domaine de raccordement limité par une hyperbole, correspondant à une transition entre les deux comportements fondamentaux. A mesure que le rapport de la compression à la traction diminue $\left(\alpha\longrightarrow\frac{\pi}{2}\right)$ l'inclinaison critique se rapproche de $\frac{\pi}{4}$.

Pour $\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}=0$, il y a indétermination : on peut avoir une propagation en mode I avec $\beta=\frac{\pi}{2}$ ou une propagation en mode II avec $\beta=\frac{\pi}{4}$, qui correspond à la facette de cisaillement maximum.

3.5 Domaine de reversibilité en traction-compression biaxial et dans l'essai de compression « triaxiale »

Nous étudions ici deux types d'essais pour lesquels existent dans la littérature des résultats expérimentaux qui nous permettent la comparaison du modèle avec les matériaux réels (pâte de ciment, mortiers. roches...).

3.5.1 Essai biaxial

Dans cet essai, une plaque carrée est soumise à un état de contrainte plan de direction principale les axes de symétrie de la plaque et la direction perpendiculaire (fig. 7-A). Les contraintes principales sont σ_1, σ_2 et $\sigma_3 = 0$.

Le domaine de réversibilité du modèle dans cet essai est représenté (fig. 7-B).

- *De* A *à* B : la première irréversibilité apparaît en mode I pour les microfissures perpendiculaires à la plus grande traction σ_1.
- *De* B *à* C : les contraintes extrêmes sont σ_1 et σ_2. Les premières irréversibilités interviennent en mode II dans le plan de la plaque (fig. 8-A).
- *De* C *à* D : les contraintes extrêmes sont dans cette zone σ_1 et $\sigma_3 = 0$. Le domaine est donc limité par un segment parallèle à l'axe σ_1. Les premières irréversibilités apparaissent dans le plan (σ_1, σ_3) en mode II pour des fissures faisant un angle $\frac{\pi}{4} - \frac{\varnothing}{2}$ avec la direction de compression σ_1 (fig. 8-B). Il faut remarquer que le domaine obtenu est très ressemblant à celui donné par Vile [14] pour les mortiers, en particulier dans la zone de traction-compression où on retrouve la concavité du domaine (fig. 9).

En double compression, on retrouve le segment CD parallèle à l'axe σ_1, qui est ici la contrainte intermédiaire. Ce parallélisme traduit la faible influence de la contrainte intermédiaire σ_1.

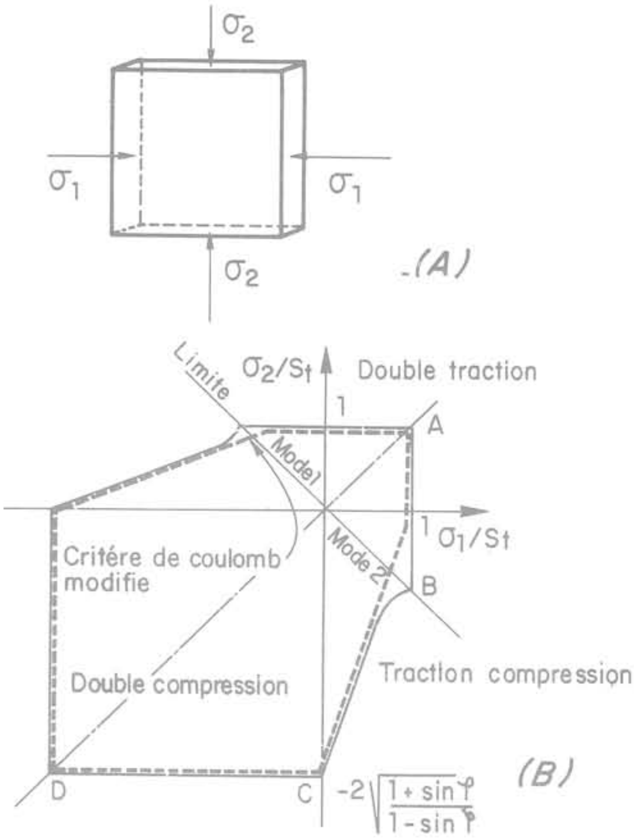
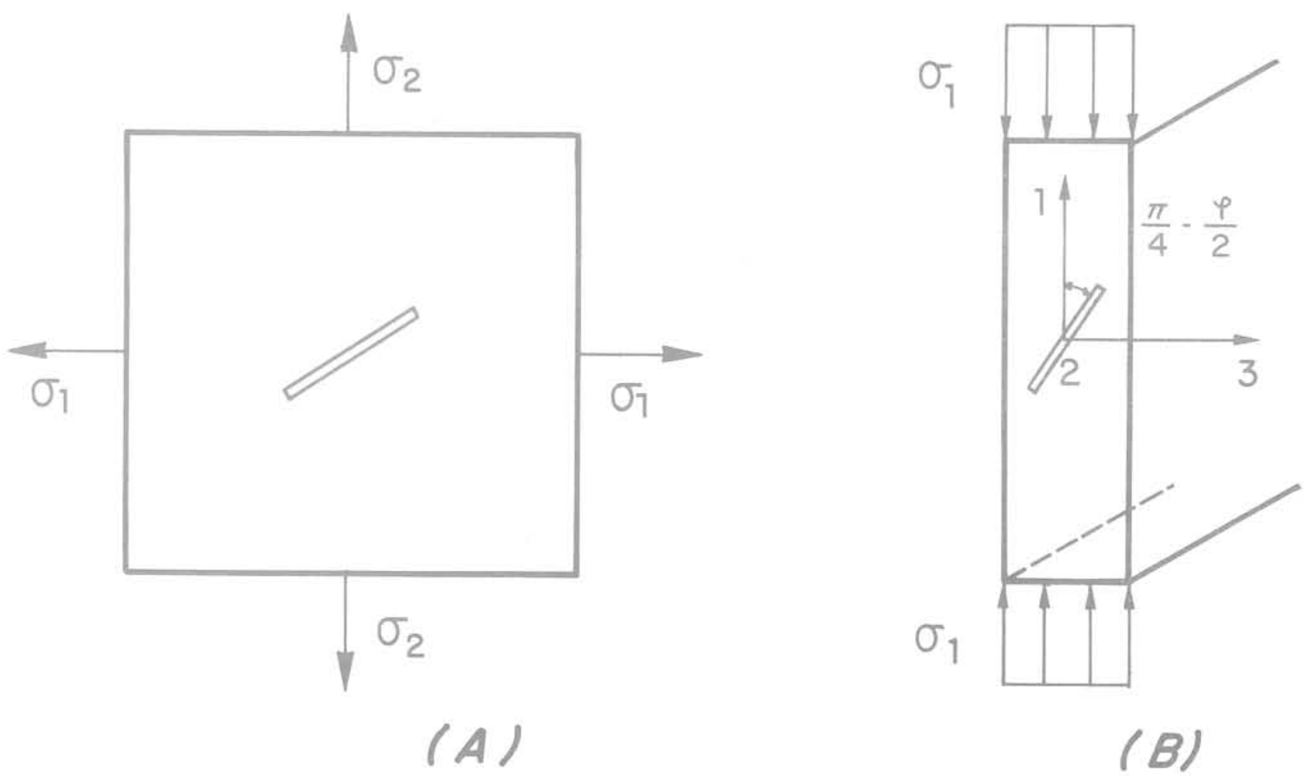


Fig. 7
A : essais biaxial
B : domaine de réversibilité

Fig. 8 Essais biaxial
A : première irréversibilité en traction-compression
B : première irréversibilité en double compression



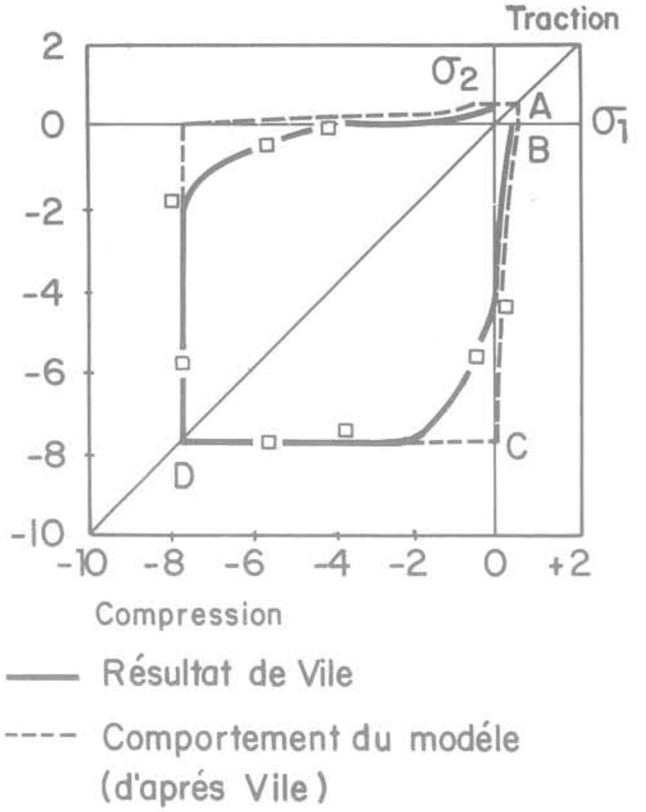


Fig. 9 Essai biaxial. Comparaison des résultats expérimentaux et des prévisions du modèle

Ce domaine est également en bon accord avec celui donné par le critère de Coulomb avec limitation de la résistance à la traction introduit par B. Paul [11], pour approcher les domaines de réversibilité des matériaux fragiles (fig. 7-B).

3.5.2 État de contrainte cylindrique : essai de compression

Un état de contrainte cylindrique est réalisé dans l'essai de compression avec pression de confinement (essai dit triaxial).

Dans cet essai on réalise tout d'abord un état de contrainte sphérique. Puis on augmente la valeur de la pression sur les faces horizontales (fig. 10-A).

Les premières irréversibilités dans le modèle apparaissent pour

$$N = \frac{2 \cos \varnothing}{1 - \sin \varnothing} S_t + P_c \frac{1 + \sin \varnothing}{1 - \sin \varnothing}.$$

(N et P_c comptées positivement).

Remarquons que $\frac{2 \cos \varnothing}{1 - \sin \varnothing} S_t = S_c$ résistance à la compression simple (fig. 10-B).

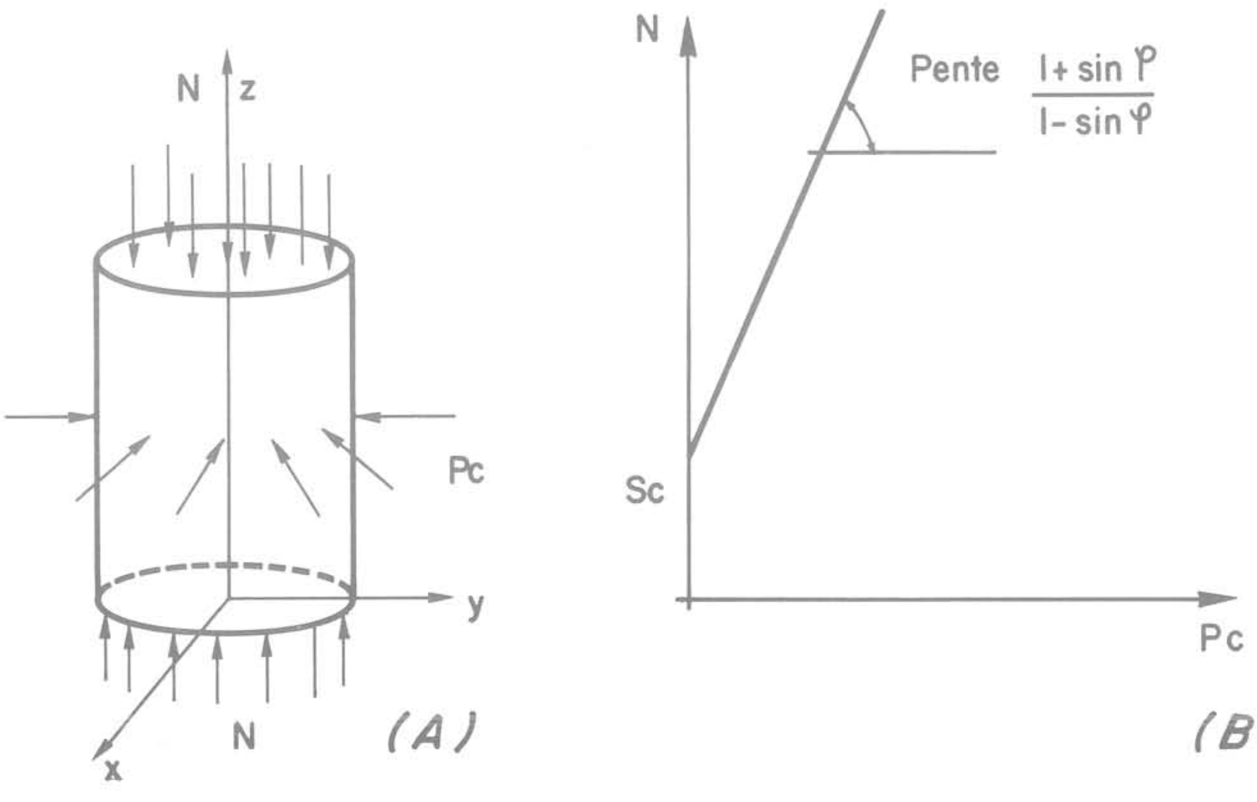
Ces premières irréversibilités se produisent en mode II pour des fissures faisant un angle $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varnothing}{2}$ avec le plan xy.

Ces résultats sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux pour les mortiers et bétons [5] mais aussi pour les roches [4-10] (voir fig. 1).

Les pentes obtenues sont de l'ordre de 5 ce qui conduit à un angle de frottement de l'ordre de 42°.

Pour ce type d'essai, le critère macroscopique d'irréversibilité associé au modèle se confond avec le critère de Coulomb.

Fig. 10
A : essais de compression
B : limite du domaine de réversibilité



4 Comportement dans le domaine irréversible

Dans ce chapitre, on se propose de montrer que le modèle traduit la différence fondamentale qui existe entre la propagation des fissures en traction et en compression.

- *en traction :* la propagation est instable; la rupture suit de peu la première irréversibilité.
- *en compression :* la microfissuration est progressive et stable : à chaque étape, il faut un nouvel apport d'énergie pour faire progresser la fissuration.

4.1 Direction de propagation

Lorsqu'une fissure se trouve en mode mixte (c'est-à-dire lorsque K_I et K_{II} sont non nuls) ou en mode II, elle ne se propage pas en ligne droite, mais se branche dans une certaine direction. On fait l'hypothèse que la fissure se propage dans la direction θ_0 pour laquelle la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale : cette hypothèse est la plus couramment admise [3].
En dehors d'un petit cercle de rayon r_0, le champ des contraintes est donné par la solution élastique. Le vecteur contrainte $\vec{T}(r_0, \theta)$ sur la facette faisant un angle θ avec l'axe de la fissure a pour composante pour $r = r_0$:

$$\sigma_{\theta\theta} = f(\theta) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi r_0}} K_I\left(3\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2}\right) - 3K_{II}\left(\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_{\theta r} = g(\theta) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi r_0}} K_I\left(\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2}\right) + K_{II}\left(\cos\frac{\theta}{2} + 3\cos\frac{3\theta}{2}\right)$$

On peut remarquer que, compte tenu de l'équation de l'équilibre

$$\frac{\partial}{\partial r}\sigma_{r\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}}{\partial_\theta} + 2\frac{\sigma_{r_\theta}}{r} = 0.$$

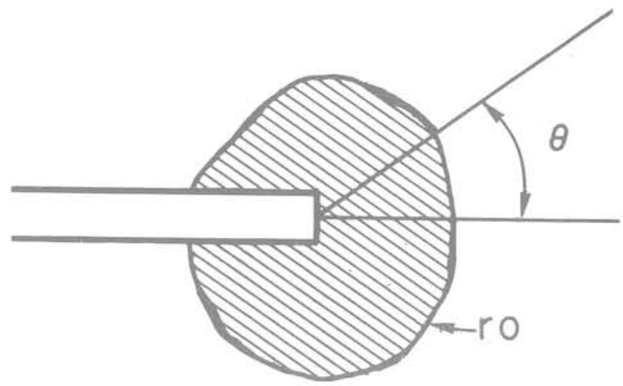


Fig. 11 Fond de fissure

On a : $g(\theta) = -\frac{2}{3} f'(\theta)$ et donc que la facette de traction maximale, le cisaillement est nul.

L'angle θ_0 définissant la direction de propagation est donc donné par

$$f'(\theta_0) = g(\theta_0) = 0.$$

On se propose de déterminer cet angle dans le cas de la compression simple et celui de la traction simple (fig. 12-A).

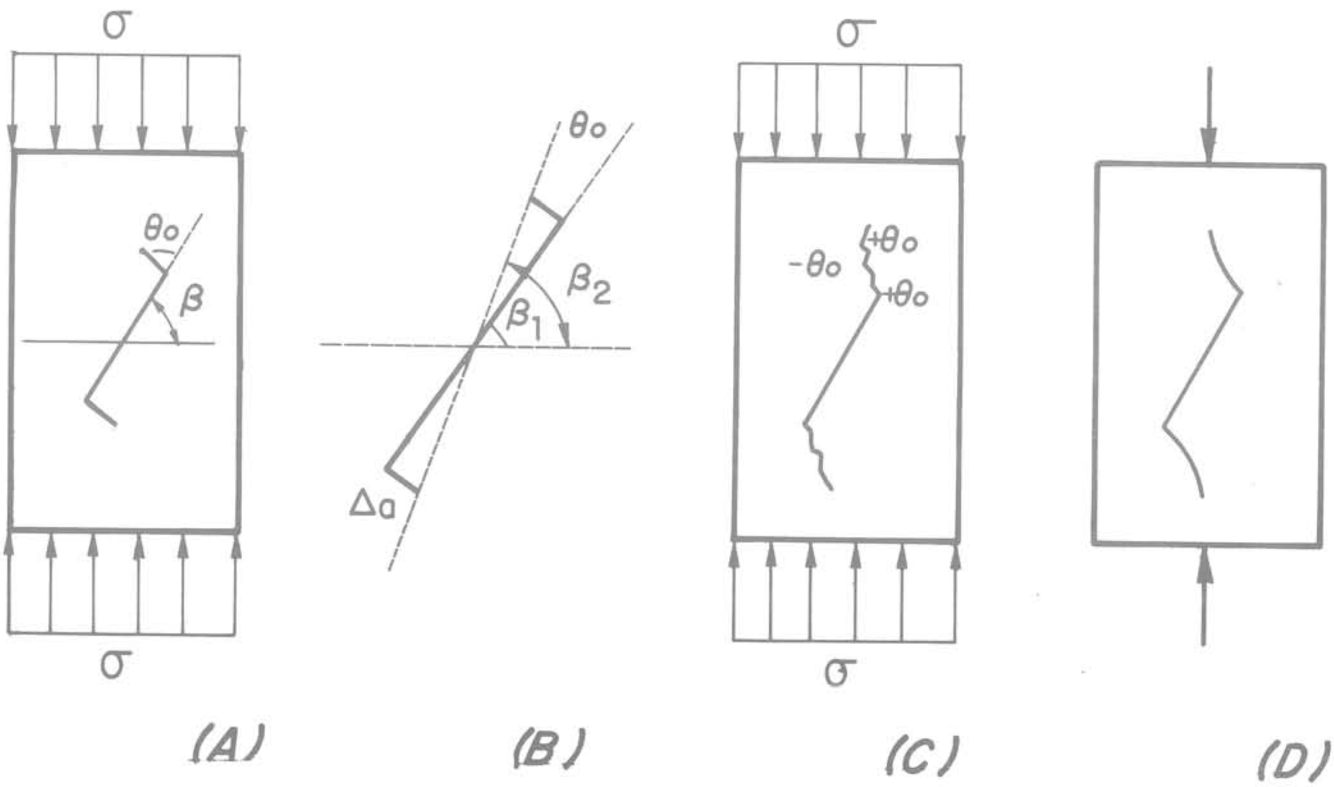
4.2 Compression simple : Propagation stable des fissures

Par une fissure de longueur 2a inclinée d'un angle β par rapport à la direction perpendiculaire à l'axe de compression simple σ.

$K_I = 0$ et $K_{II} = \sqrt{\pi a}\,\frac{\sigma}{2}\left[\sin 2\beta - \operatorname{tg} \varnothing(1 + \cos 2\beta)\right] < 0$ pour $\beta > \varnothing$

$K_{II} = 0$ pour $\beta < \varnothing$.

Fig. 12 Propagation en compression simple



θ_0 est donc déterminé par la condition $\cos\frac{\theta_0}{2} + 3\cos\frac{3\theta_0}{2} = 0$ qui donne $\theta_0 \simeq \pm 70°5$.

Ainsi pour $\beta < \theta$ les fissures ne se propagent pas à cause du frottement qui annule la singularité.

Pour $\beta > \theta$ la fissure se branche avec un angle de 70° 5 indépendamment de l'inclinaison initiale.

La fissure progresse d'une longueur Δa dans la direction θ_0 puis la fissure se branche à nouveau avec l'angle $-\theta_0$ et ainsi de suite. Il en résulte que la fissure voit son inclinaison β augmenter au cours de la propagation (fig. 12-B) et tend à s'aligner parallèlement à la direction de la contrainte de compression (fig. 12-C).

Cette analyse grossière de la direction de propagation des fissures en compression est tout à fait en accord avec les résultats expérimentaux obtenus par Brace et Bombolakis (1963) sur les matières plastiques fragiles (fig. 12-D) [2].

Une conséquence importante de cette tendance à l'alignement parallèle à la contrainte est la stabilisation de la propagation des microfissures.

La variation du taux de restitution d'énergie en fonction de β permet d'étudier la stabilité de la propagation.

ici : $G = \frac{1-\nu}{E} K_{II}^2$ d'où $\frac{\partial G}{\partial \beta} = \frac{1-\nu}{E} K_{II} \frac{\partial K_{II}}{\partial \beta}$

Pour $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ K_{II} est positif et vaut

$$K_{II} = \sqrt{\pi a}\,\frac{\sigma}{2}(\sin 2\beta - \operatorname{tg} \varnothing (1 + \cos 2\beta)) \quad \text{voir § 3-2.}$$

D'où :

$$\frac{\partial K_{II}}{\partial a} = \sqrt{\Pi a}\,\sigma(\cos 2\beta + \operatorname{tg} \varnothing \sin 2\beta).$$

Il en résulte que pour β compris entre $\frac{\Pi}{4} + \frac{\varnothing}{2}$ et $\frac{\Pi}{2}$, G décroît quand β croît.

On a vu que lorsque σ atteint S_c, les fissures inclinées à $\frac{\Pi}{4} + \frac{\varnothing}{2}$ atteignent l'équilibre limite. Elles se propagent donc avec un angle de branchement θ_0.

L'angle β diminue et donc le taux de restitution d'énergie G diminue. Il faut donc un nouvel apport d'énergie pour faire progresser de nouveau la fissure. *La propagation* est donc *stable*.

Dans le raisonnement précédent on n'a pas pris en compte la variation simultanée de la longueur de la fissure qui au contraire fait augmenter G. On veut seulement montrer le caractère stabilisateur de l'alignement des microfissures sur la direction de compression.

On peut interpréter ces résultats en disant qu'il a un phénomène d'« *écrouissage fragile* », en reprenant cette idée introduite par B. Paul [11].

En effet, lorsque les microfissures se propagent, elles évoluent vers un état qui conduit à un taux de restitution d'énergie pour le matériau dans son ensemble plus faible que dans l'état initial. Ceci est d'ailleurs assez intuitif, puisque les microfissures tendent à devenir parallèles à la direction de compression et que dans cette orientation le taux de restitution d'énergie est nul : les microfissures ne tendent donc plus à se propager.

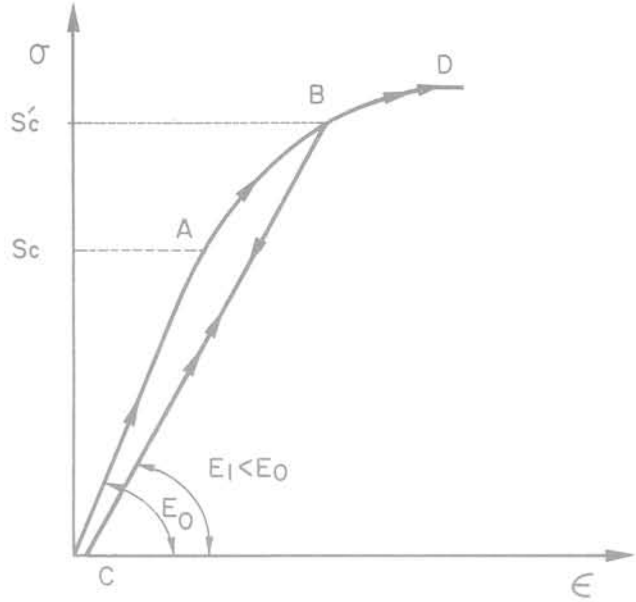


Fig. 13 Ecrouissage fragile

Dans un essai de compression (fig. 13) de 0 à A, le comportement est élastique. Lorsque la contrainte σ atteint S_c précédemment définie, la microfissuration progressive commence. La courbe effort-déformation s'incurve.

Si à partir de B, on décharge, le comportement du nouveau matériau est élastique. Toutefois, on peut s'attendre à ce que les coefficients élastiques aient varié par rapport à l'état initial. En C, on a une déformation résiduelle. Si on recharge à partir de C, on remonte pratiquement sur la courbe de décharge. En B la microfissuration redémarre pour une valeur S_c' de la limite élastique.

On a donc bien un *phénomène d'écrouissage* du matériau, mais de nature fondamentalement différente de celui que l'on peut observer dans les métaux.

Si on continue à charger, on suit la courbe BD; la rupture finale intervient lorsque les microfissures stables forment un réseau continu tel qu'il puisse y avoir séparation des morceaux.

4.3 Traction simple : Instabilité de la propagation

Dans le cas de la traction simple, les microfissures sont en mode mixte (sauf pour $\beta = 0$).

$K_I = \sigma\sqrt{\Pi a}\cos^2\beta$ et $K_{II} = \sigma\sqrt{\Pi a}\sin\beta\cos\beta$.

La condition $f'(\theta_0) = g(\theta_0) = 0$ devient ici

$K_I \sin\theta_0 + K_{II}(3\cos\theta_0 - 1) = 0$

soit ici : $\sin\theta_0 + (3\cos\theta_0 - 1)\operatorname{tg}\beta = 0$.

L'angle de branchement θ_0 dépend ici de l'inclinaison β (fig. 14-A).

Pour une fissure initialement inclinée d'un angle β, les branchements successifs ont pour effet de faire diminuer cet angle : plus l'angle initial est grand, plus l'angle de branchement θ_0 est important : la fissure tend à s'orienter perpendiculairement à la direction de traction (fig. 14-B).

On étudie la stabilité de cette propagation :

$$G = \frac{1-\nu}{E}(K_I^2 + K_{II}^2) = \frac{1-\nu}{E}\pi a \sigma^2 \cos^2\beta$$

d'où : $\frac{\partial G}{\partial \beta} = -\frac{1-\nu}{E}\pi a\,\sigma^2 \sin 2\beta < 0$

pour $0 < \beta < \frac{\Pi}{2}$.

β	20°	40°	60°	80°
θ_o	-27°16	-50°28	-60°	-67°20

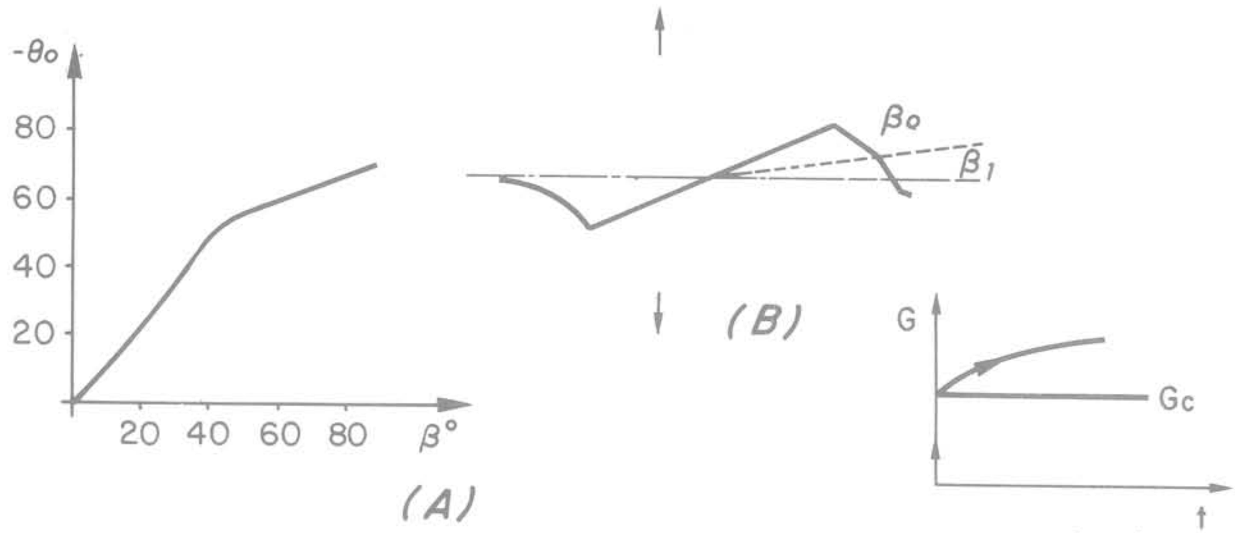
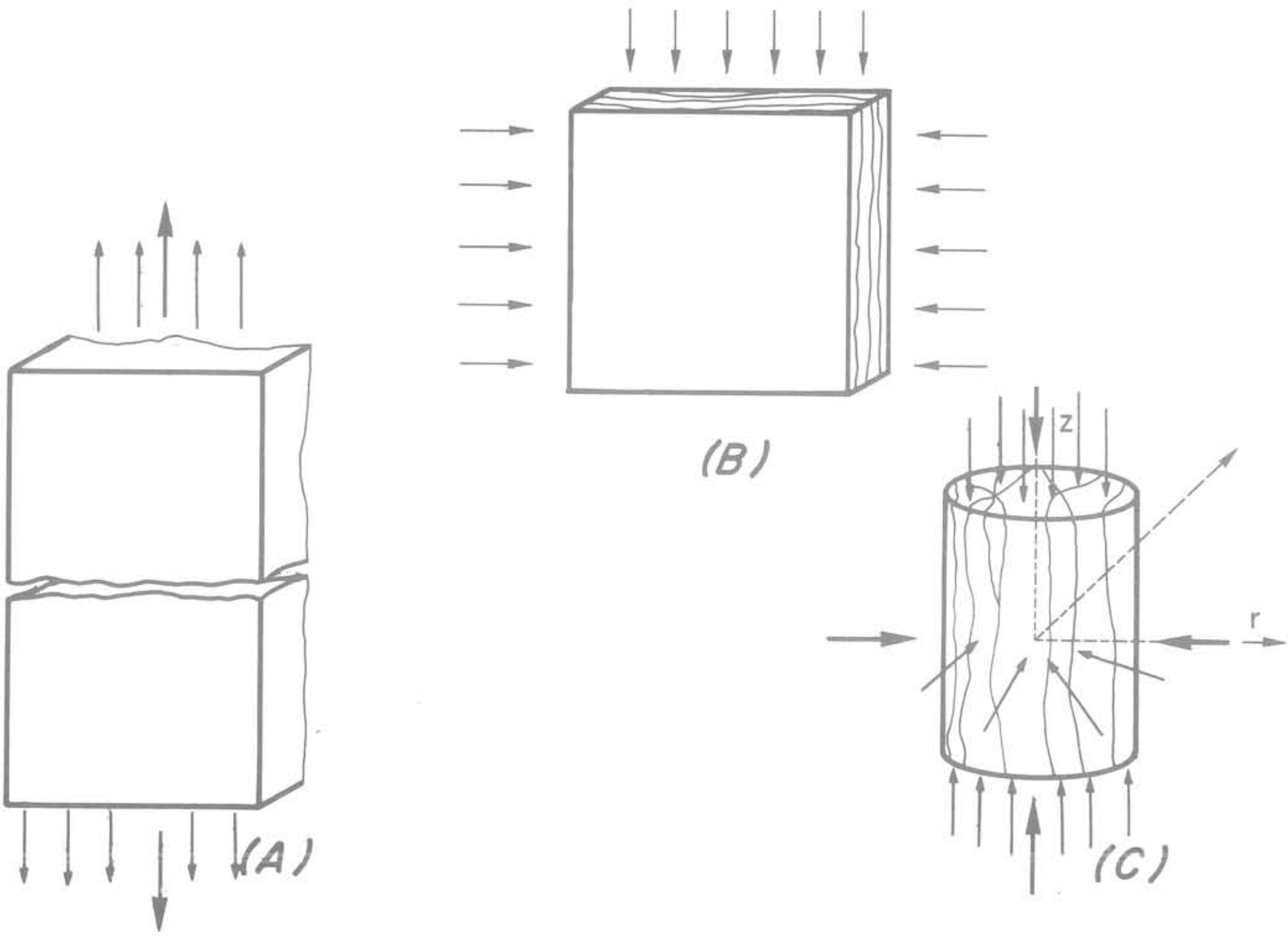


Fig. 14 Propagation en traction simple
A : angle de branchement
B : alignement des microfissures perpendiculairement à la direction de traction
C : instabilité en traction

Fig. 15 Modes de rupture
A : en traction simple
B : en double compression
C : en compression avec étreinte latérale



Lorsque la fissure se propage, β et donc G, le taux de restitution d'énergie augmentent. Cet effet ici se conjugue avec l'augmentation de G due à l'accroissement de la longueur de la fissure : la *propagation est instable* puisque le système est capable de fournir de plus en plus d'énergie à mesure que la fissure se propage (fig. 14-C).

La rupture en traction est donc *brutale* et intervient sans déformations irréversibles préalables. Les microfissures s'orientent perpendiculairement à la direction de traction et la rupture se produit par *séparation* du matériau en deux parties *perpendiculairement à la direction de traction*.

4.4 Modes de rupture et critère d'extension maximale

Le modèle permet également de rendre compte des modes de rupture des matériaux fissurés.

• Dans le domaine du *comportement de traction*, la propagation instable des microfissures provoque la séparation de l'éprouvette en deux morceaux perpendiculairement à la direction de plus grande traction. C'est ce que l'on observe, par exemple, en traction simple (fig. 15-A).

• Dans le domaine du *comportement de compression*, la tendance des microfissures à s'aligner parallèlement à la direction de plus grande compression conduit à une rupture par séparation parallèlement à cette direction.

• Dans l'essai de *double compression*, par exemple, la rupture intervient par feuilletage de l'éprouvette dans son plan [14] (fig. 15-B).

• Dans l'essai de *compression avec étreinte latérale*, on observe, si l'essai est conduit avec soin, la séparation de colonnette par le réseau des fissures nées de la jonction des microfissures.

La rupture finale peut alors intervenir par flambement des colonnettes (fig. 15-C).

Dans ces deux derniers essais, la progression de la microfissuration se traduit par une forte extension dans la direction perpendiculaire au changement, liée à l'ouverture des microfissures, et une augmentation irréversible de volume. Le brusque changement de pente que l'on peut observer dans la courbe contrainte-déformation transversale est d'ailleurs l'un des meilleurs indicateurs du passage dans le domaine d'irréversibilité du matériau (fig. 16).

On constate que dans tous les cas, la rupture intervient perpendiculairement à la direction d'extension maximale. Le professeur Maso et son équipe [8-9] ont étudié la validité d'un critère unique d'*extension maximale*, faisant la synthèse des deux types de comportement que nous avons mis en évidence.

Le présent modèle ramène également le comportement à un critère local unique, le critère énergétique de Griffith, et insiste sur la profonde dissymétrie des mécanismes en traction et en compression.

En particulier, il faut remarquer qu'en double compression le mécanisme d'irréversibilité est la propagation de microfissure de cisaillement (mode II) bien que la rupture finale ait l'apparence d'un mécanisme de séparation (mode I).

Le critère d'extension maximale ne semble donc pas traduire un mécanisme structural du matériau, mais apparaît plutôt comme une description phénoménologique de la rupture finale.

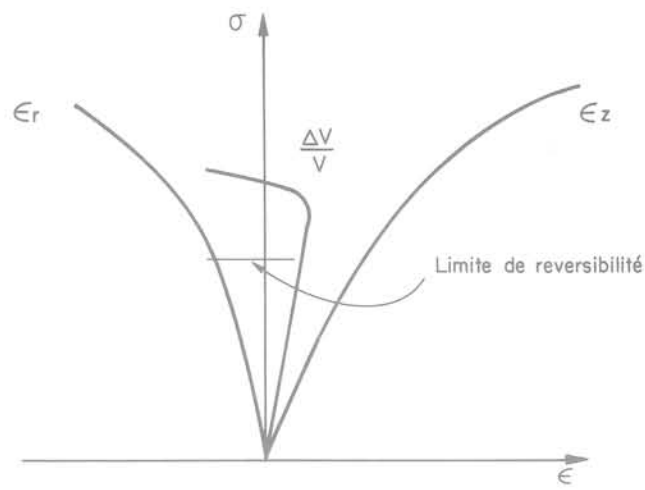


Fig. 16 Déformation longitudinale (Ez), radiale (Er) et volumique (ΔV/V) dans l'essai de compression

Conclusion

Le modèle proposé permet une synthèse et une représentation simple des phénomènes physiques, principalement le développement de la microfissuration, qui déterminent le comportement mécanique des matériaux minéraux.

Il prévoit un critère macroscopique d'irréversibilité de type Coulomb avec limitation de la traction, ce qui est en bon accord avec l'expérience. Il met en évidence la profonde dissymétrie du comportement de traction et de compression, liée à la stabilité de la propagation des microfissures. Enfin, il permet de prévoir qualitativement les comportements dans le domaine irréversible et les modes de rupture.

L'intérêt de ce modèle réside dans l'aide qu'il peut apporter, par sa simplicité, à la compréhension du comportement mécanique des matériaux minéraux, que rencontre le plus couramment l'ingénieur géotechnicien.

Le tableau de synthèse ci-dessous résume les traits fondamentaux de ce comportement, dont le modèle est susceptible de rendre compte.

Références Bibliographiques

[1] J. Bergues, P. Habib, P. Morlier : Critère de la rupture des bétons soumis à des sollicitations triaxiales.
Cahier du groupe Français de Rhéologie - Tome II n° 5 (1971).

[2] D. Broek : Ingineering Fracture Mechanics - Chap. 4.
Noordhorff International Publishing (1974).

[3] H. D. Bui : la Mécanique de la Rupture fragile. Édition Masson (1978).

[4] F.A. McClintock, J.B. Walsh : Friction ou Griffith cracks in rocks under pressure.
Proceeding of the U.S. National Congress on Applied Mechanics - Berkeley vol. 2 (1962).

[5] P. Launay, H. Gachon, P. Poitevin : Déformation et Résistance ultime du béton sous étreinte triaxiale.
6e colloque colloque International de la Précontrainte - Prague (1970).

[6] A. A. Griffith : The phenomenon of rupture and flow in solids.
Phil. Trans Royal Society of London (1921).

[7] A. A. Griffith : The theory of rupture.
Proc. 1st International Congress on Applied Mechanics (1924).

[8] J. C. Maso : La nature minéralogique des agrégats, facteur essentiel de la résistance des bétons à la rupture et à l'action du gel.
Thèse de Docteur ès Sciences, Toulouse 1967.

[9] M. Lorrain : Contribution à l'étude de la micromécanique des matériaux granulaires cohérents. Application au béton.
Thèse de Docteur Es Sciences, Toulouse 1974.

[10] L. Obert : Brittle Fracture of Rocks.
Fracture VII Liebowitz ed. Academic Press (1969).

[11] B. Paul : A modification of th Coulomb Mohr Theory of Fracture
Journal of Applied Mechanics (juin 1961).

[12] B. Paul : Macrocopic Criteria flor flow and fracture.
Fracture II - Liebowitz ed. Academic Press (1969).

[13] G. C. Sih ed. Methods of analysis and solution of crack problems.
Noordhorff International Publishing (1973).

[14] G. W. D. Vile : The strength of concrete under short term static !oading.
Proc. International Congress on the Structure of Concrete (session F) - Londres (1965).

Synthèse des résultats des modèles

<table>
<tr><th></th><th></th><th>Traction dominante</th><th>Compression dominante</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Première irréversibilité</td><td>Mode</td><td>Ouverture (Mode 1)</td><td>Glissement (Mode 2)</td></tr>
<tr><td>Critére global</td><td>Traction maximale
$\sigma_1 < S_t$</td><td>Coulomb
$|\sigma_t| \leqslant c + tg\varphi|\sigma_n|$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Comportement irréversible</td><td>Propagation des microfissures</td><td>Instable</td><td>Stable
Dilatation volumique irreversible</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Mode de rupture</td><td>⊥ Traction maximale</td><td>// Compression maximale</td></tr>
<tr><td colspan="2">Séparation perpendiculairement à la direction d'extension maximale</td></tr>
</table>