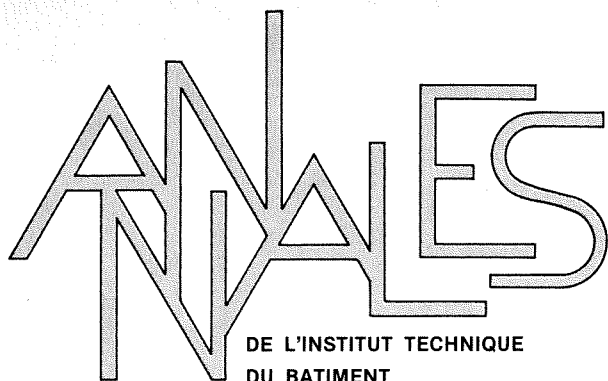




DE L'INSTITUT TECHNIQUE
DU BATIMENT
ET DES TRAVAUX PUBLICS

N° 421 - JANVIER 1984
SERIE : SOLS ET FONDATIONS 185

LA THÉORIE DE LA PLASTICITÉ ET L'ÉQUILIBRE LIMITE EN MÉCANIQUE DES SOLS

par

Elie ABSI

Lauréat de l'Académie des Sciences
Professeur à l'Ecole Centrale de Paris
Directeur Scientifique du CEBTP

INSTITUT TECHNIQUE DU BATIMENT ET DES TRAVAUX PUBLICS

Ce que vous trouverez dans ce fascicule :**LA THEORIE DE LA PLASTICITE
ET L'EQUILIBRE LIMITE EN MECANIQUE DES SOLS**

Les méthodes de dimensionnement en Mécanique des Sols et dans l'analyse des structures ont évolué différemment en raison de la nature des problèmes à résoudre et des moyens disponibles en calcul.

Depuis Coulomb, il y a deux siècles, l'étude de la stabilité des ouvrages en terre était basée sur une analyse à l'état limite. Pour les structures, le calcul était fait uniquement en phase de service et l'on supposait un comportement élastique linéaire des matériaux utilisés.

Avec les nouvelles possibilités offertes par l'informatique et une meilleure connaissance de la rhéologie des matériaux, la tendance actuelle est de considérer ces deux approches comme complémentaires et de procéder simultanément, quelle que soit la nature de l'ouvrage, à une analyse en phase de service et à l'état ultime. En effet, il est indispensable de connaître la tenue de l'ouvrage en cours d'exploitation ainsi que l'intervalle de sécurité sur lequel on peut compter.

La présente étude fait le point sur l'application de la Théorie de la plasticité à divers problèmes d'équilibre limite en Mécanique des Sols et reprend différentes publications que l'auteur a déjà effectuées sur cette question.

SOMMAIRE

	Pages
1. INTRODUCTION	67 à 68
2. ETUDE GENERALE	69 à 76
3. MILIEUX NON PESANTS	76 à 79
4. MILIEUX PUREMENT COHERENTS	79 à 85
5. ANALYSE GENERALE DES LIGNES CARACTERISTIQUES	85 à 91
6. SUPERPOSITION DE DIFFERENTES SOLUTIONS D'EQUILIBRE LIMITE	92 à 96
7. STABILITE DES TALUS	97 à 105
8. POUSSEE ET BUTEE DES SOLS	106 à 112
9. FONDATIONS	112 à 114
ANNEXE A	115 à 117
B	118
C	118 à 119
D	119 à 123

LA THÉORIE DE LA PLASTICITÉ ET L'ÉQUILIBRE LIMITE EN MÉCANIQUE DES SOLS

par Elie ABSI

Cette étude est dédiée à la mémoire d'Albert CAQUOT et Jean MANDEL. Leur apport à l'équilibre limite en Mécanique des Sols a été important et je leur dois énormément.

1. Introduction

1.1. Préliminaire

Soit un milieu soumis à un certain chargement. On admet que le seuil d'écoulement est atteint en un point donné quand le tenseur de contraintes vérifie un certain critère de la forme :

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (1.1)$$

Dans l'espace des σ_i , l'équation (1.1) définit une surface qui se superpose à elle-même pour toute rotation de $\frac{2\pi}{3}$ autour de la trisectrice OA. Ceci résulte du fait que les trois contraintes principales σ_i jouent le même rôle et peuvent se substituer entre elles (fig. 1).

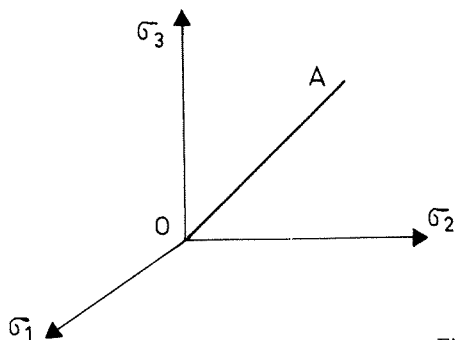


Fig. 1.

1.2. Problèmes de déformations planes

Le cas de la déformation plane (x_1, x_2) concerne une classe importante de problèmes qui se posent en mécanique des sols (talus, fondations, soutènement,...) (fig. 2).

La direction x_3 est principale et les composantes e_{i3} du tenseur de déformations sont nulles ($e_{i3} = 0$). La contrainte principale σ_3 est alors une certaine fonction de σ_1 et σ_2

$$\sigma_3 = g(\sigma_1, \sigma_2) \quad (1.2)$$

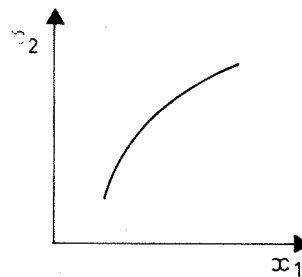


Fig. 2.

La forme de cette fonction dépend des lois de comportement du matériau considéré. En portant cette valeur de σ_3 dans (1.1), on trouve :

$$f(\sigma_1, \sigma_2, g(\sigma_1, \sigma_2)) = k(\sigma_1, \sigma_2) = 0 \quad (1.3)$$

Cette expression constitue le critère d'écoulement plastique en cas de déformations planes.

Dans le plan de Mohr, la relation (1.3) définit un ensemble de cercles dont l'enveloppe E est une courbe caractéristique de chaque matériau. On la désigne par *courbe intrinsèque* (fig. 3).

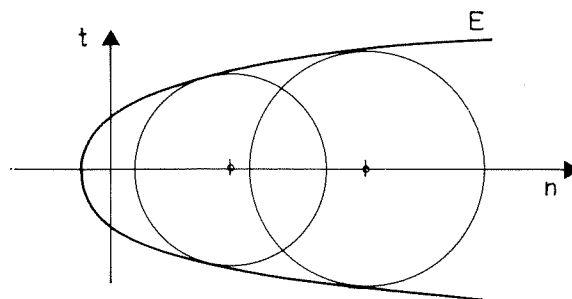


Fig. 3.

En conséquence :

- Si un massif est en état d'équilibre limite plan, les deux équations d'équilibre et le critère d'écoulement permettent, normalement, de déterminer le champ de contraintes ($\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$) ;

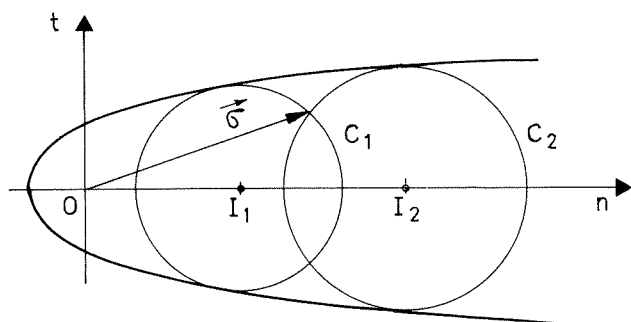


Fig. 4.

- La connaissance des trois composantes σ_{ij} définit un cercle tangent à la courbe intrinsèque;
- A la contrainte $\vec{\sigma}$ agissant sur un élément de surface du massif, correspondent deux cercles de Mohr (fig. 4). Ces deux cercles C_1 et C_2 sont relatifs à des états d'équilibre distincts qu'on qualifie respectivement d'inférieur ou de supérieur.

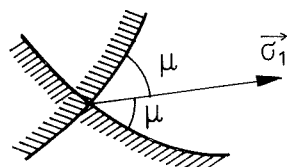


Fig. 6 a.

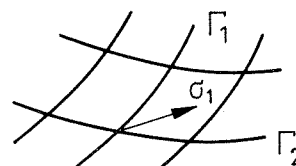


Fig. 6 b.

1.3. Cas des sols

1.31. Critère de Coulomb

Pour les sols, on adopte comme courbe intrinsèque la droite de Coulomb D (fig. 5) d'équation :

$$|t| = C + n \cdot \tan \varphi = (H + n) \tan \varphi \quad (1.4)$$

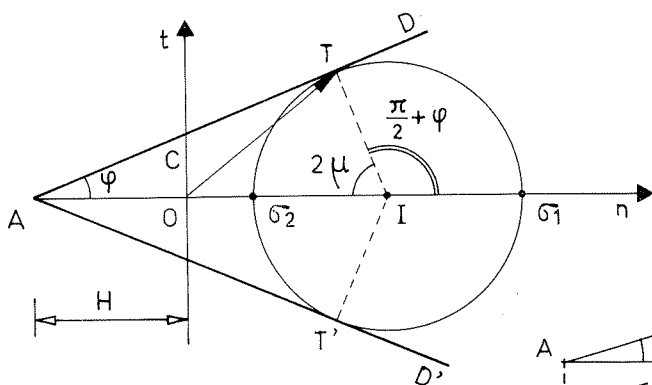


Fig. 5.

Fig. 7.

En chaque point du massif supposé en état d'équilibre limite, il y a deux éléments de surface sur lesquels le critère de Coulomb (1.4) est vérifié. Ils correspondent aux points de tangence T et T' sur le cercle de Mohr. Comme on peut le voir, ces deux éléments admettent la direction de la contrainte maximale σ_1 comme bissectrice et font entre eux un angle de (fig. 6 a) :

$$2\mu = \frac{\pi}{2} - \varphi \quad (1.5)$$

Les enveloppes de ces deux éléments constituent deux familles de lignes dites de glissement (Γ_1 et Γ_2) le long desquelles le critère de Coulomb (1.4) est vérifié (fig. 6 b).

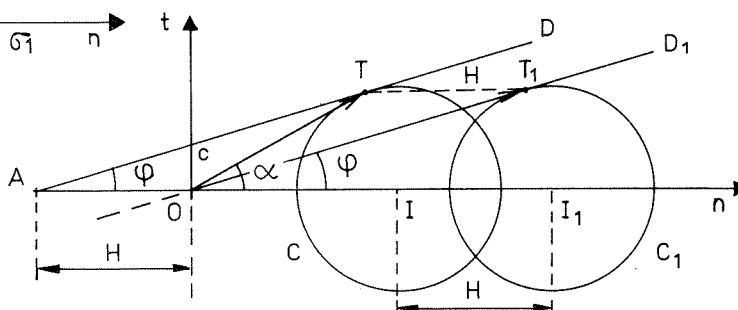
1.32. Classification des sols

Compte tenu des caractéristiques φ et C, les sols peuvent être classés en :

- Sols pulvérulents ($\varphi \neq 0$, $C = 0$) ;
- Sols purement cohérents ($\varphi = 0$, $C \neq 0$) ;
- Sols cohérents ($\varphi \neq 0$, $C \neq 0$).

1.4. Théorème des états correspondants de Caquot

Soit un milieu cohérent en équilibre limite. En tout point de ce milieu, le cercle de Mohr est tangent en T à la droite de Coulomb (fig. 7). La contrainte limite OT a une obliquité α supérieure à φ .



Faisons subir au milieu la modification suivante :

Par la pensée, majorons le champ de contraintes d'une pression hydrostatique $H = \frac{C}{\tan \varphi}$. Cela revient à imprimer au cercle de Mohr C une translation égale à H. En particulier, sur l'élément de surface pour lequel la contrainte est OT, la nouvelle contrainte sera OT₁ et le cercle C₁ sera tangent en T₁ à la droite D₁ parallèle à D passant par l'origine O.

Le nouveau champ de contraintes correspond à celui d'un milieu pulvérulent d'angle de frottement φ , en équilibre limite et soumis, en plus du chargement initial, à la pression H.

Ce théorème est dû à Caquot. Il permet de ramener l'étude d'un milieu cohérent en équilibre limite à celui d'un milieu pulvérulent. Comme nous le verrons par la suite, ce théorème est d'un très grand intérêt sur le plan pratique.

2. Etude générale

2.1. Préliminaire

Considérons un massif homogène en état d'équilibre limite plan (x_1, x_2) .

En chaque point M du massif, les lignes de glissement Γ_1 et Γ_2 admettent σ_1 comme bissectrice et font entre elles un angle 2μ de valeur :

$$2\mu = \frac{\pi}{2} - \varphi \quad (2.1)$$

Désignons par θ l'angle que fait σ_1 avec Ox_1 (fig. 8). L'équation générale d'une ligne de glissement est donc :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg}(\theta \pm \mu) \quad (2.2)$$

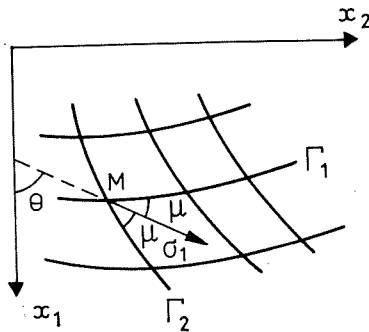


Fig. 8.

Les signes (+) et (−) correspondent respectivement à la première et à la deuxième famille de lignes de glissement Γ_1 et Γ_2 .

D'après le cercle de Mohr, les expressions des σ_{ij} sont les suivantes (fig. 9) :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda (1 + \sin \varphi \cos 2\theta) - H \\ \sigma_{22} &= \lambda (1 - \sin \varphi \cos 2\theta) - H \\ \sigma_{12} &= \lambda \sin \varphi \sin 2\theta \end{aligned} \quad (2.3)$$

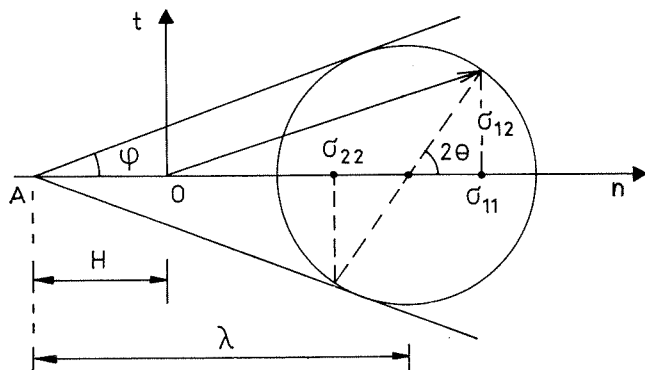


Fig. 9.

2.2. Equations d'équilibre

Les équations d'équilibre suivant les deux directions x_1 et x_2 s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} &= X_1 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} &= X_2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

où X_1 et X_2 sont les charges volumiques.

Remplaçons dans ces équations chaque terme par sa valeur tirée des expressions (2.3). On trouve :

$$\begin{aligned} (1 + \sin \varphi \cos 2\theta) \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} + \sin \varphi \sin 2\theta \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \\ - 2\lambda \sin \varphi \left(\sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_1} - \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right) &= X_1 \\ \sin \varphi \sin 2\theta \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} + (1 - \sin \varphi \cos 2\theta) \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \\ + 2\lambda \sin \varphi \left(\cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right) &= X_2 \end{aligned} \quad (2.5)$$

En remarquant que $2\mu = \frac{\pi}{2} - \varphi$ les expressions (2.5) deviennent :

$$\begin{aligned} [\cos^2(\theta + \mu) + \cos^2(\theta - \mu)] \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} + \\ + [\sin(\theta + \mu) \cos(\theta + \mu) + \\ + \sin(\theta - \mu) \cos(\theta - \mu)] \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \\ - 2\lambda \sin \varphi \left[\sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_1} - \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right] &= X_1 \\ [\sin(\theta + \mu) \cos(\theta + \mu) + \\ + \sin(\theta - \mu) \cos(\theta - \mu)] \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} + \\ + [\sin^2(\theta + \mu) + \sin^2(\theta - \mu)] \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} + \\ + 2\lambda \sin \varphi \left[\cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right] &= X_2 \end{aligned} \quad (2.6)$$

C'est un système de deux équations aux dérivées partielles du 1^{er} ordre quasi linéaire. Il est de type hyperbolique et admet deux familles de lignes caractéristiques qui sont, comme on le verra, les lignes de glissement Γ_1 et Γ_2 .

Multiplions la première équation par $\sin(\theta \mp \mu)$ et la seconde par $\cos(\theta \mp \mu)$. Par soustraction membre à membre, on trouve successivement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \cos(\theta + \mu) + \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \sin(\theta + \mu) + \\ + 2\lambda \left[\cos(\theta + \mu) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \right. \\ \left. + \sin(\theta + \mu) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right] \operatorname{tg} \varphi \\ = - \frac{X_1 \sin(\theta - \mu) - X_2 \cos(\theta - \mu)}{\cos \varphi} = V_1 \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \cos(\theta - \mu) + \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \sin(\theta - \mu) - \\ - 2\lambda \left[\cos(\theta - \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \right. \\ \left. + \sin(\theta - \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right] \operatorname{tg} \varphi \\ = \frac{X_1 \sin(\theta + \mu) - X_2 \cos(\theta + \mu)}{\cos \varphi} = V_2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

où V_1 et V_2 sont les composantes des charges volumiques suivant les lignes de glissement Γ_1 et Γ_2 (fig. 10).

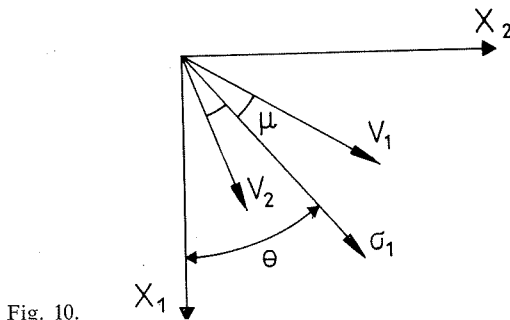


Fig. 10.

Les deux expressions (2.7) peuvent se mettre sous la forme condensée.

$$\lambda \left[\frac{\partial}{\partial x_1} + \operatorname{tg}(\theta \pm \mu) \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \right] \cdot \left[\operatorname{Log} \frac{\lambda}{k} \pm 2\theta \operatorname{tg} \varphi \right] = \mp \frac{X_1 \sin(\theta \mp \mu) - X_2 \cos(\theta \mp \mu)}{\cos \varphi \cdot \cos(\theta \pm \mu)} = \begin{cases} V_1 / \cos(\theta + \mu) \\ V_2 / \cos(\theta - \mu) \end{cases} \quad (2.8)$$

Or :

$$\begin{aligned} \sin(\theta - \mu) &= \sin(\theta + \mu) \sin \varphi - \cos(\theta + \mu) \cos \varphi \\ \cos(\theta - \mu) &= \cos(\theta + \mu) \sin \varphi - \sin(\theta + \mu) \cos \varphi \\ \sin(\theta + \mu) &= \sin(\theta - \mu) \sin \varphi + \cos(\theta - \mu) \cos \varphi \\ \cos(\theta + \mu) &= \cos(\theta - \mu) \sin \varphi - \sin(\theta - \mu) \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.9)$$

L'équation (2.8) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \lambda \left[\frac{\partial}{\partial x_1} + \operatorname{tg}(\theta \pm \mu) \frac{\partial}{\partial x_2} \right] \cdot \left[\operatorname{Log} \frac{\lambda}{k} \pm 2\theta \operatorname{tg} \varphi \right] &= \mp \{ X_1 [\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg}(\theta \pm \mu) - 1] - \\ &\quad - X_2 [\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg}(\theta \pm \mu)] \} \\ &= \begin{cases} V_1 / \cos(\theta + \mu) \\ V_2 / \cos(\theta - \mu) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.3. Equations de Kötter

2.3.1. Première approche

L'équation générale des lignes caractéristiques (l.c.) est :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg}(\theta \pm \mu) \quad (2.11)$$

(+) : pour la première famille Γ_1

(-) : pour la deuxième famille Γ_2 .

Il en résulte que l'équation (2.8) s'écrit le long d'une l.c.

• de la première famille (Γ_1) :

$$\begin{aligned} d\lambda + 2\lambda \operatorname{tg} \varphi \cdot d\theta &= (X_1 + X_2 \operatorname{tg} \varphi) dx_1 - \\ &\quad - (X_1 \operatorname{tg} \varphi + X_2) dx_2 = V_1 ds_1 \end{aligned} \quad (2.12)$$

• de la deuxième famille (Γ_2) :

$$\begin{aligned} d\lambda - 2\lambda \operatorname{tg} \varphi \cdot d\theta &= (X_1 - X_2 \operatorname{tg} \varphi) dx_1 + \\ &\quad + (X_1 \operatorname{tg} \varphi - X_2) dx_2 = V_2 ds_2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Les relations (2.12) et (2.13) sont les équations de Kötter.

En particulier, si la charge volumique se ramène au poids propre γ uniquement et en prenant x_1 suivant la verticale vers le bas ($X_1 = \gamma$, $X_2 = 0$), les équations (2.12) et (2.13) deviennent alors :

$$\begin{cases} d\lambda + 2\lambda \operatorname{tg} \varphi \cdot d\theta = \gamma (dx_1 - \operatorname{tg} \varphi \cdot dx_2) \\ d\lambda - 2\lambda \operatorname{tg} \varphi \cdot d\theta = \gamma (dx_1 + \operatorname{tg} \varphi \cdot dx_2) \end{cases} \quad (2.14)$$

ou encore

$$d\lambda + 2\varepsilon \lambda \operatorname{tg} \varphi \cdot d\theta = \gamma (dx_1 - \varepsilon \operatorname{tg} \varphi \cdot dx_2) \quad (2.15)$$

où l'on a posé $\varepsilon = \pm 1$.

2.3.2. Deuxième approche

Les équations de Kötter peuvent être obtenues par voie directe en écrivant l'équilibre d'un élément de volume ABCD en forme de parallélogramme et dont les côtés AB et AC sont tangents aux l.c. Γ_2 et Γ_1 (fig. 11).

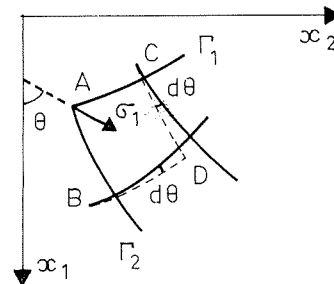


Fig. 11.

Désignons par $\vec{\tau}$ et $\vec{p}$ les composantes d'une contrainte $\vec{\sigma}$ suivant respectivement les deux directions $\vec{O}t$ et $\vec{A}T$ (fig. 12). On a

$$\vec{\sigma} = \vec{n} + \vec{t} = \vec{p} + \vec{\tau} \quad (2.16)$$

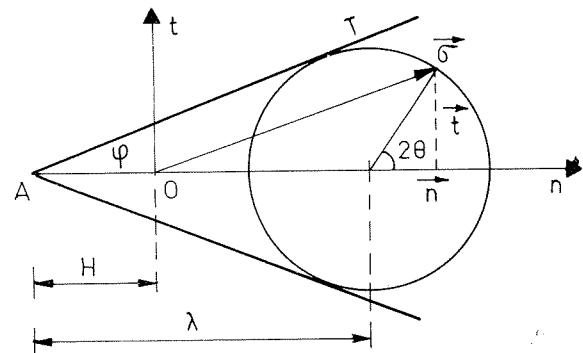


Fig. 12 a.

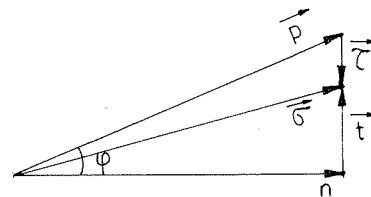


Fig. 12 b.

ou

$$p = \frac{n}{\cos \varphi} \quad \tau = t - n \operatorname{tg} \varphi \quad (2.17)$$

Or, on a (équations 2.3)

$$\left. \begin{aligned} n &= \lambda (1 + \sin \varphi \cos 2\theta) - H \\ t &= \lambda \sin \varphi \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

D'où

$$\left. \begin{aligned} dp &= \frac{1}{\cos \varphi} [(1 + \sin \varphi \cos 2\theta) d\lambda - \\ &\quad - 2\lambda \sin \varphi \sin 2\theta d\theta] \\ d\tau &= [\sin \varphi \sin 2\theta - \\ &\quad - \operatorname{tg} \varphi (1 + \sin \varphi \cos 2\theta)] d\lambda \\ &\quad + [2\lambda \sin \varphi \cos 2\theta - \\ &\quad - 2\lambda \sin \varphi \sin 2\theta \cdot \operatorname{tg} \varphi] d\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

Reprenons l'élément ABCD. Sur AC agit une contrainte $\vec{\sigma}$ de composantes $\vec{p}$ et $\vec{\tau}$ (fig. 13).

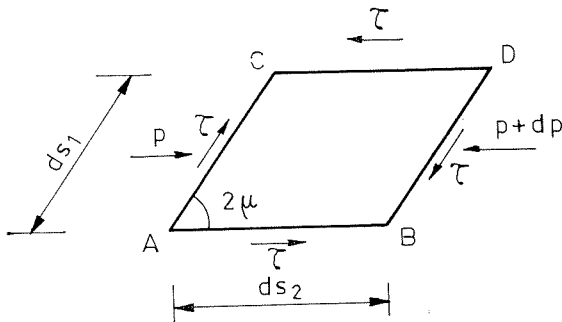


Fig. 13.

L'angle θ correspondant ayant pour valeur

$$2\theta = \frac{\pi}{2} + \varphi \quad (2.20)$$

les expressions (2.19) deviennent alors :

$$\left. \begin{aligned} dp &= \cos \varphi \cdot d\lambda - 2\lambda \sin \varphi d\theta \\ d\tau &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Ecrivons maintenant l'équilibre de ABCD, suivant la direction de Γ_2 . On trouve :

$$dp \cdot ds_1 = V_2 ds_1 ds_2 \cos \varphi$$

d'où

$$\frac{dp}{\cos \varphi} = d\lambda - 2\lambda \operatorname{tg} \varphi \cdot d\theta = V_2 ds_2 \quad (2.22)$$

C'est la deuxième équation de Kötter (2.13). En exprimant l'équilibre de ABCD suivant Γ_1 , on retrouve la première équation de Kötter.

2.33. Remarques

Remarque 1 :

Effectuons le changement de variables suivant :

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{2 \operatorname{tg} \varphi} \log \frac{\lambda}{k} + \theta \\ \xi_2 &= \frac{1}{2 \operatorname{tg} \varphi} \log \frac{\lambda}{k} - \theta \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

où k est une constante arbitraire.

Inversement, on a :

$$\left. \begin{aligned} 2\theta &= \xi_1 - \xi_2 \\ \lambda &= k e^{2(\xi_1 + \xi_2) \operatorname{tg} \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

Les équations (2.7) peuvent alors se mettre sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \operatorname{tg}(\theta + \mu) \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} &= \frac{V_1}{2\lambda \operatorname{tg} \varphi \cos(\theta + \mu)} = a_1 \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} + \operatorname{tg}(\theta - \mu) \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} &= \frac{V_2}{2\lambda \operatorname{tg} \varphi \cos(\theta - \mu)} = a_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

ou :

$$\frac{d\xi_i}{ds_i} = \frac{V_i}{2\lambda \operatorname{tg} \varphi} \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 1 \text{ sur } \Gamma_1 \\ i = 2 \text{ sur } \Gamma_2 \end{array} \right. \quad (2.26)$$

Remarque 2 :

Dans le cas d'un milieu non pesant ($V_i = 0$), l'intégration des équations de Kötter (2.26) est immédiate et donne :

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{2 \operatorname{tg} \varphi} \operatorname{Log} \frac{\lambda}{k} + \theta = C^{\text{te}} \text{ sur une ligne } \Gamma_1 \\ \xi_2 &= \frac{1}{2 \operatorname{tg} \varphi} \operatorname{Log} \frac{\lambda}{k} - \theta = C^{\text{te}} \text{ sur une ligne } \Gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

Remarque 3 :

Considérons le cas d'un milieu purement cohérent (fig. 14).

On a :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \eta + C \cos 2\theta \\ \sigma_{22} &= \eta - C \cos 2\theta \\ \sigma_{12} &= C \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

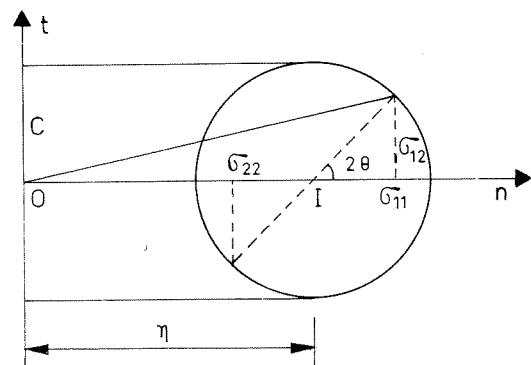


Fig. 14.

En portant ces expressions dans les équations d'équilibre (2.4), on trouve :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} - 2C \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + 2C \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_2} &= X_1 \\ \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + 2C \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + 2C \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_2} &= X_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

Si l'on procède comme précédemment, on constate que les équations de Kötter se ramènent à :

- suivant une l.c. Γ_1 :

$$d\eta + 2C \cdot d\theta = V_1 ds_1 \quad (2.30)$$

- suivant une l.c. Γ_2 :

$$d\eta - 2C \cdot d\theta = V_2 ds_2 \quad (2.31)$$

Ces relations portent le nom d'équations de Hencky.

2.4. Problème de Cauchy

Considérons le problème suivant qui est un problème courant en mécanique des sols :

On connaît le long de AB de la courbe Γ du massif la répartition des contraintes (c'est-à-dire λ et θ ou ξ_1 et ξ_2) et l'on suppose que le massif est en état d'équilibre limite (fig. 15 a). Peut-on trouver une solution à ce problème et sous quelles conditions ?

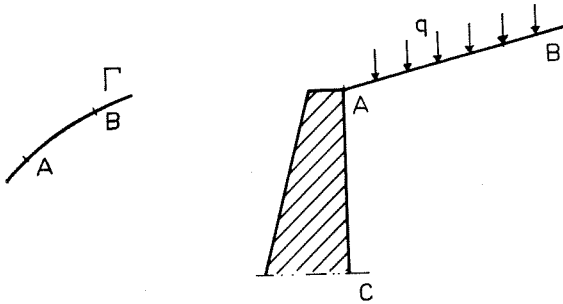


Fig. 15 a.

Fig. 15 b.

C'est le cas, par exemple, des murs de soutènement où l'on connaît la répartition des charges q agissant sur le talus AB et l'on se propose de déterminer les contraintes dans le massif, supposé en état d'équilibre limite, ainsi que la pression agissant sur l'écran AC (fig. 15 b).

Ce problème est dit « problème de Cauchy ». La résolution peut s'effectuer par approximations successives. Pour cela, il faut connaître les dérivées partielles de ξ_1 et ξ_2 par rapport à x_1 et x_2 . Le long de AB, on a :

$$d\xi_1 = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} dx_2 \quad (2.32)$$

$$d\xi_2 = \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} dx_2$$

Des équations (2.25) et (2.32), on tire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} &= \frac{a_1 dx_2 - \operatorname{tg}(\theta + \mu) d\xi_1}{dx_2 - \operatorname{tg}(\theta + \mu) dx_1} \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} &= \frac{a_1 dx_1 - d\xi_1}{dx_2 - \operatorname{tg}(\theta + \mu) dx_1} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} &= \frac{a_2 dx_2 - \operatorname{tg}(\theta - \mu) d\xi_2}{dx_2 - \operatorname{tg}(\theta - \mu) dx_1} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} &= \frac{a_2 dx_1 - d\xi_2}{dx_2 - \operatorname{tg}(\theta - \mu) dx_1} \end{aligned} \quad (2.33)$$

La solution est donc possible sous réserve que les dénominateurs soient non nuls. Autrement, nous sommes en présence d'une ligne caractéristique (l.c.) ou de discontinuité.

2.5. Lignes caractéristiques

Supposons que le long de la courbe Γ (fig. 15 a), le numérateur et le dénominateur s'annulent simultanément dans l'une des équations (2.33). Le problème sera alors indéterminé et la courbe Γ est une ligne caractéristique.

L'examen de ces équations (2.33) montre que l'on a deux familles de lignes caractéristiques définies par :

- pour la première famille Γ_1 :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg}(\theta + \mu) \quad \frac{d\xi_1}{dx_1} = a_1 \quad (2.34)$$

- pour la deuxième famille Γ_2 :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg}(\theta - \mu) \quad \frac{d\xi_2}{dx_1} = a_2 \quad (2.35)$$

Ces l.c. sont donc des lignes de glissement définies par :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg}(\theta \pm \mu) \quad (2.36)$$

et le long desquelles la relation :

$$\frac{d\xi_i}{dx_1} = a_i \quad (2.37)$$

n'est autre que l'équation de Kötter.

2.6. Ligne limite ou de discontinuité de première espèce

Supposons que le long de AB de la courbe Γ , le dénominateur seul soit nul dans l'une des équations (2.33). Soit, par exemple :

$$dx_2 - \operatorname{tg}(\theta - \mu) \cdot dx_1 = 0 \quad (2.38)$$

$$a_2 dx_1 - d\xi_2 \neq 0 \quad (2.39)$$

Dans ce cas, on constate que sur AB (fig. 16) :

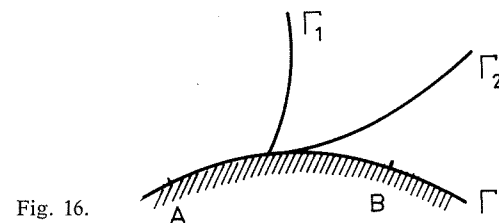


Fig. 16.

- le paramètre ξ_2 subit une discontinuité

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \rightarrow \infty \quad (2.40)$$

- la courbe Γ est tangente à l'ensemble des l.c. Γ_2 qui y aboutissent

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg}(\theta - \mu) \quad (2.41)$$

Donc Γ est une enveloppe pour les l.c. Γ_2 ;

- le long de Γ , l'équation de Kötter n'est pas vérifiée

$$\frac{d\xi_2}{dx_1} \neq a_2 \quad (2.42)$$

On verra par la suite que Γ est aussi un lieu de points de rebroussement pour la première famille Γ_1 des l.c. Donc, la solution ne peut pas être prolongée au-delà de Γ .

Nous désignons alors Γ par « ligne limite » ou « ligne de discontinuité de première espèce ».

2.7. Recherche d'une solution

2.71. *AB est une courbe quelconque*

La connaissance de la répartition des contraintes, c'est-à-dire de ξ_1 et ξ_2 , et de leurs dérivées partielles sur AB nous permet, en général, de trouver une solution au voisinage et de part et d'autre de AB.

On peut étendre cette solution de proche en proche à tout le quadrilatère ABCD limité par les quatre lignes caractéristiques issues des deux extrémités A et B (fig. 17). Au-delà de l'une de ces lignes telle que AD, il est impossible de prolonger la solution, vu l'indétermination qu'on aura dans les expressions des dérivées partielles de ξ_1 et ξ_2 . La solution est donc complètement déterminée et d'une façon unique dans tout le quadrilatère ABCD et sur son contour.

Une conséquence importante en découle : la répartition des contraintes dans le domaine ABCD ne dépend que de la valeur prise par le tenseur de contraintes le long de AB.

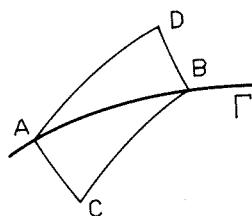


Fig. 17.

2.72. *AB est une ligne caractéristique*

Soit AB une ligne caractéristique de la deuxième famille par exemple. La connaissance de la répartition des contraintes ne suffit pas pour trouver une solution à cause de l'indétermination qu'on a sur les dérivées partielles de ξ_2 . Il nous faut donc des renseignements supplémentaires. Ces renseignements peuvent être fournis :

- soit par la connaissance de la deuxième l.c. AC passant par A (fig. 18). En ce cas, le problème sera entièrement déterminé et d'une façon unique dans le quadrilatère ABCD dont les côtés sont des lignes caractéristiques ;

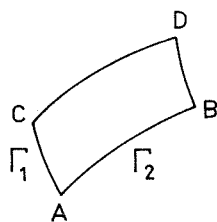


Fig. 18.

- soit par la connaissance d'une relation entre ξ_1 et ξ_2 sur une courbe AE (fig. 19). En ce cas, le problème est complètement déterminé et d'une façon unique dans le quadrilatère ABCD dont les côtés sont des lignes caractéristiques.

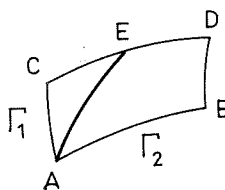


Fig. 19.

2.73. *Raccordement de deux solutions distinctes*

Deux équilibres limites différents ne peuvent se raccorder que le long d'une ligne caractéristique commune.

2.74. *Rencontre de deux lignes caractéristiques*

Physiquement, il est impossible que deux lignes caractéristiques d'une même famille se coupent entre elles en un point du massif.

2.8. Cas particulier $\lambda = 0$

Dans le problème de Cauchy, on a supposé implicitement que $\lambda \neq 0$ le long de Γ . Examinons ce cas particulier de $\lambda = 0$.

Il s'agit d'établir que θ n'est plus une donnée de Cauchy le long de Γ , et de montrer comment on peut obtenir :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_1}, \frac{\partial \lambda}{\partial x_2}, \theta, \frac{\partial \theta}{\partial x_1}, \frac{\partial \theta}{\partial x_2}.$$

Afin de mieux illustrer la démarche, on considère que le massif est soumis uniquement à son poids propre γ et que x_1 est dirigé suivant la verticale (fig. 20).

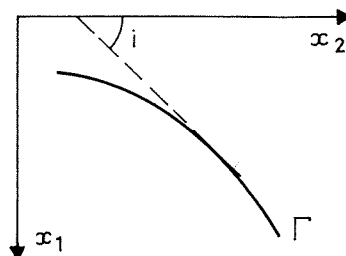


Fig. 20.

D'une part, on a :

$$\begin{aligned} &\text{• dans le massif} \\ &X_1 = \gamma \quad X_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} &\text{• le long de } \Gamma \\ &\lambda = 0 \quad \frac{dx_1}{dx_2} = \tan i \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$d\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} dx_2 = 0 \quad (2.45)$$

ou

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \tan i + \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} = 0 \quad (2.46)$$

D'autre part, on peut tirer des équations (2.5) les valeurs de $\frac{\partial \lambda}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial \lambda}{\partial x_2}$.

On trouve, tout calcul fait :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left\{ \gamma (1 - \sin \varphi \cos 2\theta) + \right. \\ \left. + 2\lambda \sin \varphi \left[\sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \right. \right. \\ \left. \left. + (\sin \varphi - \cos 2\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} = \frac{-1}{\cos^2 \varphi} \left\{ \gamma \sin \varphi \sin 2\theta + \right. \\ \left. + 2\lambda \sin \varphi \left[(\sin \varphi + \cos 2\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.48)$$

Sur Γ , ces expressions deviennent ($\lambda = 0$) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} &= \frac{\gamma}{\cos^2 \varphi} (1 - \sin \varphi \cos 2\theta) \\ \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} &= \frac{-\gamma}{\cos^2 \varphi} \sin \varphi \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

En portant ces expressions dans l'équation (2.46), on trouve :

$$(1 - \sin \varphi \cos 2\theta) \operatorname{tg} i - \sin \varphi \sin 2\theta = 0$$

ou

$$\sin i - \sin \varphi \cos (2\theta - i) = 0 \quad (2.50)$$

On voit que la valeur de θ sur le contour Γ est bien déterminée et elle ne constitue donc pas une donnée de Cauchy. Si on en tient compte dans les équations (2.47) et (2.48), on obtient les valeurs de

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \text{ et } \frac{\partial \lambda}{\partial x_2}.$$

Déterminons les dérivées partielles de θ . En dérivant l'expression (2.50) suivant Γ , on trouve :

$$\left(2 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} - \frac{\partial i}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left(2 \frac{\partial \theta}{\partial x_2} - \frac{\partial i}{\partial x_2} \right) dx_2 = 0 \quad (2.51)$$

ou

$$2 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \operatorname{tg} i + 2 \frac{\partial \theta}{\partial x_2} - \frac{\partial i}{\partial x_1} - \frac{\partial i}{\partial x_2} = 0 \quad (2.52)$$

La deuxième relation nécessaire pour avoir $\frac{\partial \theta}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial \theta}{\partial x_2}$ est obtenue en comparant les expressions de $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_1 \partial x_2}$ tirées des deux équations (2.47) et (2.48). En effet, on a ($\lambda = 0$) :

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2 \varphi}{2 \sin \varphi} \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_1 \partial x_2} &= \gamma \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + \\ &\frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \left[\sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + (\sin \varphi - \cos 2\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right] \\ &= -\gamma \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_1} - \frac{\partial \lambda}{\partial x_1} \left[(\sin \varphi + \cos 2\theta) \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + \right. \\ &\quad \left. + \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right] \end{aligned} \quad (2.53)$$

Ces deux équations (2.52) et (2.53) nous permettent donc d'avoir $\frac{\partial \theta}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial \theta}{\partial x_2}$ sur Γ .

2.81. Remarques

Remarque 1 :

L'équation (2.50) montre que l'on a tout le long de Γ :

$$\left. \begin{aligned} \sin i &\leq \sin \varphi \\ \text{ou} \\ i &\leq \varphi \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

Remarque 2 :

Le cas de $\lambda = 0$ se présente notamment quand Γ est le contour d'un massif pulvérulent non chargé.

Remarque 3 :

Supposons que Γ soit une l.c. Des équations (2.15) de Kötter, on déduit :

$$dx_1 - \varepsilon \operatorname{tg} \varphi \cdot dx_2 = 0$$

ou

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \varepsilon \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} i \quad (2.55)$$

En conséquence, ce cas se produit dans le problème de Rankine lorsque la pente $i = \varphi$.

2.82. En résumé

Si le long d'un contour Γ , on a $\lambda = 0$:

- on ne peut pas se donner arbitrairement la valeur de θ ; ce n'est pas une donnée de Cauchy ;
- il est possible de déterminer les dérivées successives de λ et de θ le long de Γ .

2.9. Utilisation des coordonnées polaires

L'utilisation des coordonnées polaires (r, ω) est commode pour le traitement de toute une classe de problèmes (fig. 21).

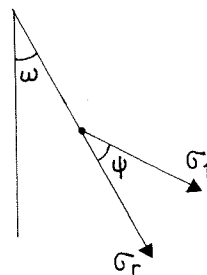


Fig. 21.

2.91. Critère de Coulomb et cercle de Mohr

Le critère de Coulomb s'écrit (fig. 22) :

$$\left(\frac{\sigma_r - \sigma_\omega}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_r + \sigma_\omega}{2} \right)^2 \cdot \sin^2 \varphi \quad (2.56)$$

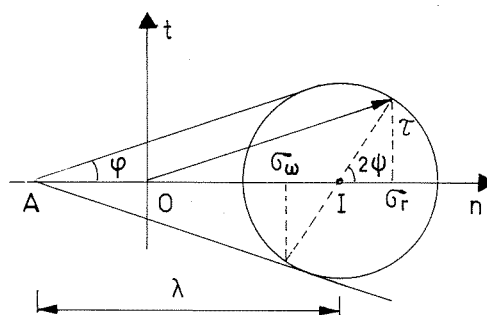


Fig. 22.

De même, on tire du cercle de Mohr

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \lambda (1 + \sin \varphi \cos 2\psi) - H \\ \sigma_\omega &= \lambda (1 - \sin \varphi \cos 2\psi) - H \\ \tau &= \lambda \sin \varphi \sin 2\psi \end{aligned} \right\} \quad (2.57)$$

où ψ est l'angle que σ_1 fait avec σ_r , ou le rayon vecteur r .

2.92. Equations d'équilibre

Les équations d'équilibre en coordonnées polaires s'écrivent (fig. 23) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau}{\partial \omega} + \frac{\sigma_r - \sigma_\omega}{r} &= X_r \\ \frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\omega}{\partial \omega} + 2 \frac{\tau}{r} &= X_\omega \end{aligned} \right\} \quad (2.58)$$

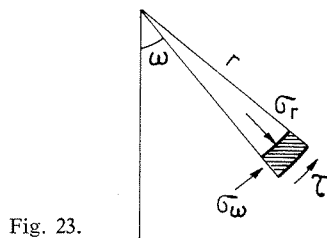


Fig. 23.

où X_r et X_ω sont les composantes des charges volumiques suivant r et ω . En remplaçant dans ces expressions chaque terme par sa valeur [équations (2.57)], on trouve :

$$\left. \begin{aligned} (1 + \sin \varphi \cos 2\psi) \frac{\partial \lambda}{\partial r} - 2 \lambda \sin \varphi \sin 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial r} + \\ + 2 \frac{\lambda}{r} \left(1 + \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \right) \sin \varphi \cos 2\psi + \\ + \frac{1}{r} \sin \varphi \sin 2\psi \frac{\partial \lambda}{\partial \omega} &= X_r \\ \sin \varphi \sin 2\psi \frac{\partial \lambda}{\partial r} + 2 \lambda \sin \varphi \cos 2\psi \frac{\partial \psi}{\partial r} + \\ + \frac{1}{r} (1 - \sin \varphi \cos 2\psi) \frac{\partial \lambda}{\partial \omega} + \\ + 2 \frac{\lambda}{r} \left(1 + \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \right) \sin \varphi \sin 2\psi &= X_\omega \end{aligned} \right\} \quad (2.59)$$

2.93. Equations des lignes caractéristiques

$$r \frac{d\omega}{dr} = \operatorname{tg}(\psi \pm \mu) \quad (2.60)$$

+ : pour la première famille Γ_1
— : pour la deuxième famille Γ_2 .

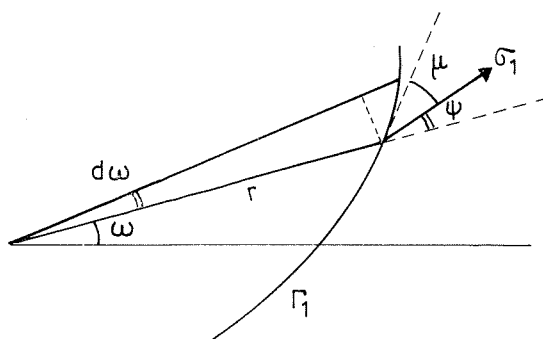


Fig. 24.

2.10. Milieux hétérogènes

Considérons une courbe Γ qui sépare deux milieux distincts ① et ② caractérisés par (C_1, φ_1) et (C_2, φ_2) (fig. 25).

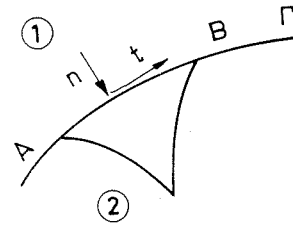


Fig. 25.

Supposons connu le champ de contraintes dans ① et en particulier sur Γ le long de laquelle on a :

$$t \leq C_1 + n \operatorname{tg} \varphi_1 \quad (2.61)$$

• si

$$t < C_2 + n \operatorname{tg} \varphi_2 \quad (2.62)$$

on se trouve en présence d'un problème de Cauchy et le prolongement de la solution de la région ① vers ②, à travers Γ , est possible et il est unique ;

• si

$$t = C_2 + n \operatorname{tg} \varphi_2 \quad (2.63)$$

la courbe Γ est alors une l.c. pour la région ② et l'on peut raccorder au champ de contraintes dans ① une infinité de solutions dans ② ;

• si

$$t > C_2 + n \operatorname{tg} \varphi_2 \quad (2.64)$$

aucune solution n'est possible dans ②.

2.11. Equilibres homogènes et semi-homogènes

Si θ reste constant dans tout le massif (fig. 26), les l.c. sont alors constituées par deux familles de droites parallèles (Γ_1 et Γ_2) d'équations :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg}(\theta \pm \mu) \quad (2.65)$$

L'équilibre correspondant est dit homogène.

Si uniquement une des deux familles, Γ_1 par exemple, est constituée par des droites, l'équilibre est appelé alors semi-homogène.

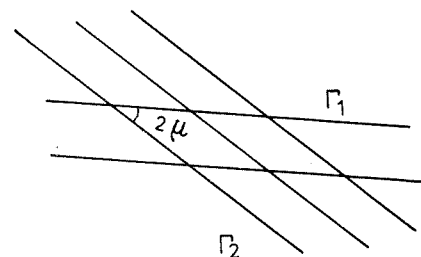


Fig. 26.

2.12. Ligne de discontinuité de deuxième espèce

Dans divers problèmes d'équilibre limite, la recherche d'une solution statiquement admissible conduit à considérer une discontinuité dans le champ de contraintes à l'intérieur du massif supposé homogène (voir paragraphe 3.23 ci-après).

Nous désignons par « ligne de discontinuité de deuxième espèce », toute courbe le long de laquelle on a un tel problème. Elle est caractérisée par le fait que deux points infiniment voisins et situés de part et d'autre de cette courbe ont des cercles de Mohr différents.

Examinons le cas représenté sur la figure 27.

Dans la zone I règne un équilibre correspondant à l'état d'équilibre sur OA.

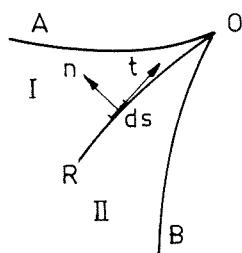


Fig. 27.

Dans la zone II règne un équilibre correspondant à l'état d'équilibre sur OB différent du premier.

Il peut être possible de trouver une ligne de discontinuité OR raccordant ces deux états. Les équations d'équilibre entraînent que, sur un élément ds de OR, les contraintes normale n et tangentielle t sont les mêmes de part et d'autre de OR. Par contre, la contrainte normale n_1 sur un élément de surface $d\sigma$ perpendiculaire à OR subit une discontinuité le long de OR (fig. 28) :

$$n_1 \neq n'_1 \quad (2.66)$$

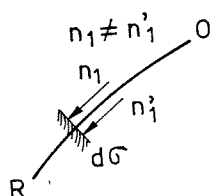


Fig. 28.

Pour tout point de OR, on a donc, dans le plan de Mohr, deux cercles distincts I et I' (fig. 29). Leur intersection m donne la contrainte $\vec{\sigma}$ agissant suivant OR.

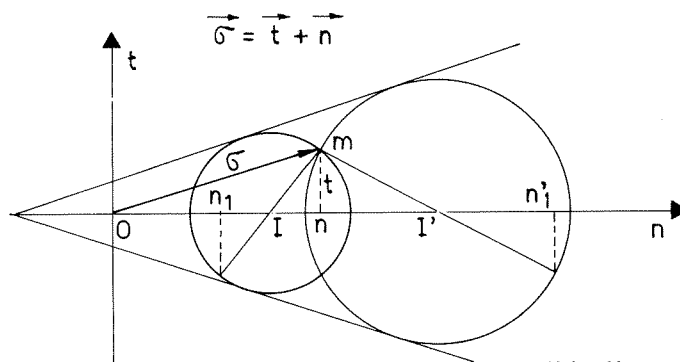


Fig. 29.

Le long d'une l.c. ou d'une enveloppe de l.c., il ne peut pas y avoir une discontinuité de contraintes. En effet, on ne peut tracer qu'un seul cercle de Mohr (fig. 30).

Donc, une ligne de discontinuité de deuxième espèce ne peut pas être une l.c. ou une enveloppe de l.c.

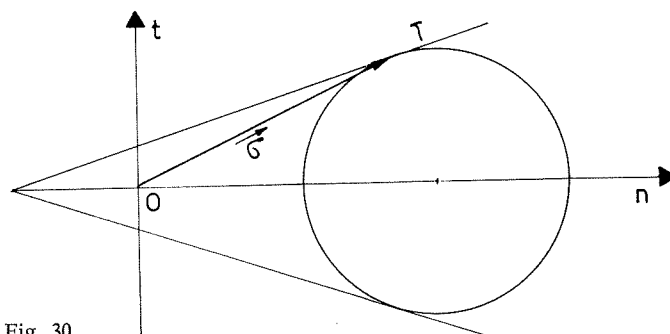


Fig. 30.

3. Milieux non pesants

3.1. Préliminaire

L'étude des milieux non pesants présente un intérêt pratique, notamment dans les deux cas suivants :

- les forces extérieures en présence sont plus importantes que le poids propre du milieu ;
- pour obtenir une solution approchée d'un problème par superposition de différentes solutions partielles.

Reprenons les équations (2.27) qui résultent de l'intégration des équations de Kötter. Si A et B sont deux points (fig. 31) sur une l.c. (Γ_1 ou Γ_2), ces équations nous permettent d'écrire :

$$\left[\frac{1}{2\lambda \tan \varphi} \log \frac{\lambda}{k} + \varepsilon \theta \right]_A = \left[\frac{1}{2\lambda \tan \varphi} \log \frac{1}{k} + \varepsilon \theta \right]_B \quad (3.1)$$

d'où la relation :

$$\lambda_A = \lambda_B e^{\varepsilon^2 (\theta_B - \theta_A) \tan \varphi} \quad (3.2)$$

avec

$$\begin{aligned} \varepsilon &= +1 \text{ sur } \Gamma_1 \\ \varepsilon &= -1 \text{ sur } \Gamma_2 \end{aligned}$$

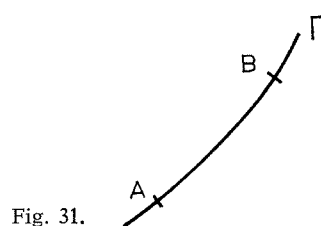


Fig. 31.

3.2. Equilibre limite d'un coin dans un milieu pulvérulent

Le coin (AOB) est en état d'équilibre limite sous l'action d'un système de chargement uniforme q_1 suivant OA et q_2 suivant OB (fig. 32). On se propose d'établir la relation entre q_1 et q_2 .

Soit AB une l.c. de la deuxième famille Γ_2 (fig. 33).

On a en A (fig. 34) :

$$q_1 = Om_1 = \lambda_A (\cos \alpha_1 + \sin \varphi \cos \gamma_1) \quad (3.3)$$

d'où

$$\lambda_A = \frac{q_1}{\cos \alpha_1 + \sin \varphi \cos \gamma_1} \quad (3.4)$$

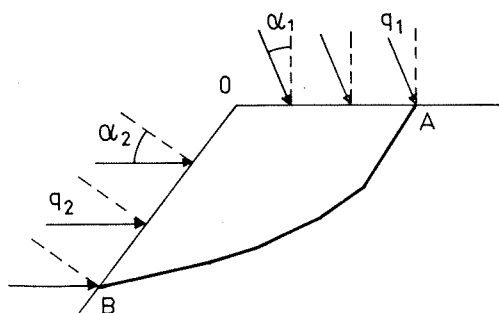


Fig. 32.

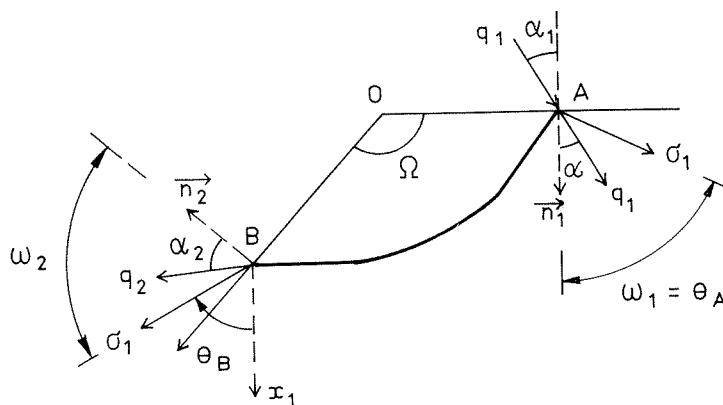


Fig. 33.

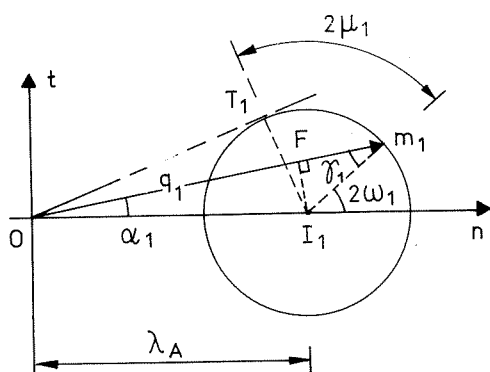


Fig. 34.

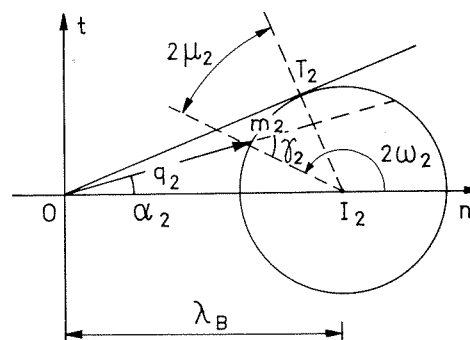


Fig. 35.

$$2\theta_A = 2\omega_1 = \alpha_1 + \gamma_1 \quad (3.5)$$

où :

$$\sin \gamma_1 = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \varphi} \quad (3.6)$$

De même, en B (fig. 35) :

$$q_2 = Om_2 = \lambda_B (\cos \alpha_2 - \sin \varphi \cos \gamma_2)$$

d'où

$$\lambda_B = \frac{q_2}{\cos \alpha_2 - \sin \varphi \cos \gamma_2} \quad (3.7)$$

$$2\theta_B = 2(\omega_2 - \Omega) = (\alpha_2 + \pi - \gamma_2 - 2\Omega) \quad (3.8)$$

$$\sin \gamma_2 = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \varphi} \quad (3.9)$$

En portant ces valeurs dans l'équation (3.2) on trouve, tout calcul fait :

$$q_2 = q_1 \frac{\cos \alpha_2 - \sin \varphi \cos \gamma_2}{\cos \alpha_1 + \sin \varphi \cos \gamma_1} e^{-2\delta \lg \varphi} \quad (3.10)$$

où :

$$2\delta = 2(\theta_A - \theta_B) = \alpha_1 + \gamma_1 - \alpha_2 + \gamma_2 - \pi + 2\Omega \quad (3.11)$$

3.21. Zones d'équilibre et lignes caractéristiques

Sur OA règne un état d'équilibre inférieur et sur OB un équilibre supérieur (fig. 36).

L'angle AOB comporte trois zones d'équilibre distinctes :

- zone I d'équilibre homogène (ou de Rankine).

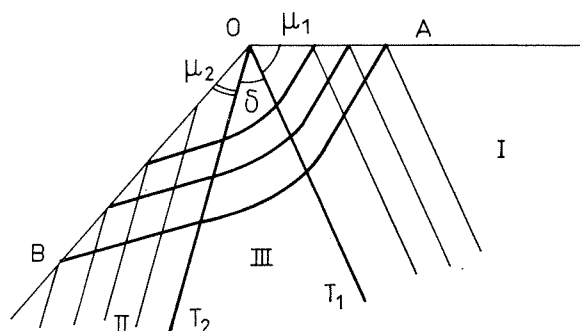


Fig. 36.

On a :

$$\widehat{AOT_1} = \mu_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \varphi - 2\omega_1 \right) \quad (3.12)$$

- zone II d'équilibre homogène

$$\widehat{BOT_2} = \mu_2 = \frac{1}{2} \left(2\omega_2 - \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \quad (3.13)$$

- zone III d'équilibre semi-homogène en spirales logarithmiques

$$\begin{aligned} \widehat{T_1OT_2} &= \Omega - (\mu_1 + \mu_2) \\ &= \Omega - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \varphi - 2\omega_1 + 2\omega_2 - \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \\ &= \Omega + (\omega_1 - \omega_2) \\ &= \Omega + \frac{1}{2} (\alpha_1 + \gamma_1 - \alpha_2 - \pi + \gamma_2) = \delta \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.22. Coefficient de poussée

Le problème traité permet d'avoir la valeur de la poussée q_2 agissant sur un écran OB sous l'action d'une charge uniformément répartie q_1 sur le talus OA.

Le coefficient de poussée est, par définition :

$$K_a = \frac{q_2}{q_1} = \frac{\cos \alpha_2 - \sin \varphi \cos \gamma_2}{\cos \alpha_1 + \sin \varphi \cos \gamma_1} e^{-2\delta \tan \varphi} \quad (3.15)$$

Des tables ont été établies permettant d'avoir K_a en fonction de α_1 , α_2 , Ω et φ (voir [6] et [7]).

Le milieu étant non pesant, on peut avoir l'équilibre de butée en intervertissant OA et OB.

3.23. Ligne de discontinuité de 2^e espèce

L'expression de K_a suppose que $\delta \geq 0$.

Si $\delta < 0$, les deux zones d'équilibre I et II s'interpénètrent (fig. 37) et on aura une zone commune à ces deux équilibres homogènes. Il en résulte qu'en un point M situé à l'intérieur de l'angle TOT', les contraintes ont des valeurs différentes suivant que l'on considère ce point comme appartenant à la zone AOT ou à la zone BOT'. Ceci est physiquement impossible. Pour lever la difficulté, on considère une ligne de discontinuité OR qui sépare le coin AOB en deux zones I et II (fig. 38).

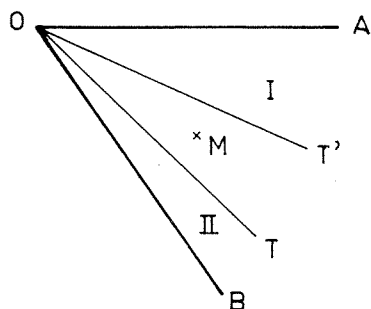


Fig. 37.

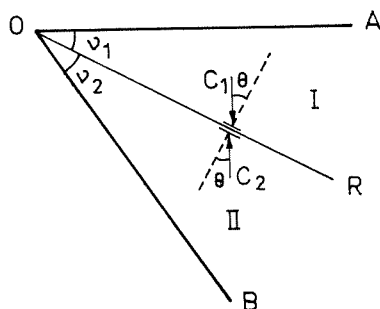


Fig. 38.

Dans la zone I règne l'équilibre inférieur. Cette ligne de discontinuité est déterminée par le fait que les contraintes C_1 et C_2 agissant respectivement sur deux éléments de surface situés de part et d'autre de OR et suivant celle-ci sont évidemment égales. Donc, les deux cercles de Mohr représentant les deux états

d'équilibre dans I et II doivent se couper en un point m tel que (fig. 39) :

$$C_1 = C_2 = Om.$$

Désignons la valeur de ces contraintes par $\sigma = Om$ et son obliquité par θ . On a :

$$\begin{aligned} \sin \gamma &= \frac{\sin \theta}{\sin \varphi}, \\ 2v_1 &= \gamma + \theta - (\alpha_1 + \gamma_1), \\ 2v_2 &= \gamma - \theta + (\alpha_2 - \gamma_2). \end{aligned} \quad (3.16)$$

d'où :

$$2(v_1 + v_2) = 2\gamma - (\alpha_1 - \alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2) = 2\Omega$$

ou :

$$\gamma = \Omega + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2)}{2} \quad (3.17)$$

Donc :

$$\sin \theta = \sin \varphi \sin \gamma$$

ou :

$$\sin \theta = \sin \varphi \sin \left(\Omega + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 + \gamma_1 + \gamma_2}{2} \right) \quad (3.18)$$

Cette équation permet de déterminer l'angle θ .

Cherchons la relation entre les charges q_1 et q_2 . On a :

$$\begin{aligned} \lambda_A &= \frac{q_1}{\cos \alpha_1 + \sin \varphi \cos \gamma_1} = \frac{\sigma}{\cos \theta + \sin \varphi \cos \gamma} \\ \lambda_B &= \frac{q_2}{\cos \alpha_2 - \sin \varphi \cos \gamma_2} = \frac{\sigma}{\cos \theta - \sin \varphi \cos \gamma} \end{aligned} \quad (3.19)$$

d'où finalement :

$$q_2 = q_1 \frac{\cos \theta + \sin \varphi \cos \gamma}{\cos \theta - \sin \varphi \cos \gamma} \times \frac{\cos \alpha_2 - \sin \varphi \cos \gamma_2}{\cos \alpha_1 + \sin \varphi \cos \gamma_1} \quad (3.20)$$

Les équations (3.18) et (3.20) déterminent entièrement le problème. La condition de validité de cette solution est :

$$0 \leq v_1 \leq \Omega \quad (3.21)$$

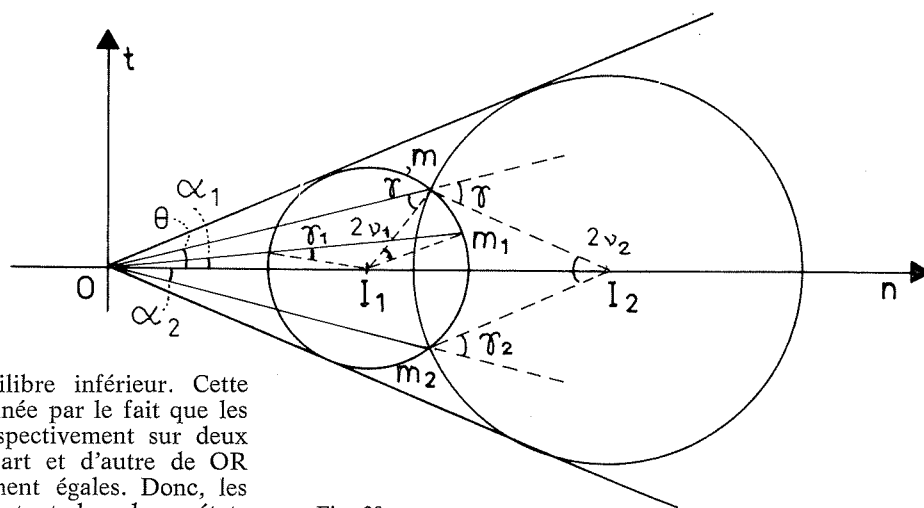


Fig. 39.

S'il n'est pas possible de trouver une solution de discontinuité qui vérifie la condition (3.21), la seule solution possible est celle d'un équilibre homogène couvrant tout le coin AOB.

Par définition, on qualifie la ligne OR de « ligne de discontinuité de 2^e espèce ».

3.3. Applications

Première application :

Considérons le cas (fig. 40) où :

$$\Omega = -\frac{\pi}{2} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

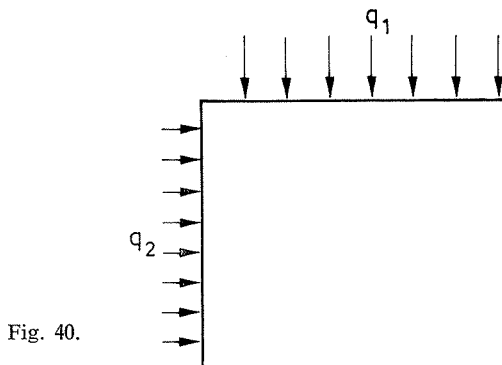


Fig. 40.

Il en résulte :

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 0 \quad \delta = 0$$

$$q_2 = q_1 \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} = q_1 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (3.22)$$

C'est un résultat utile pour l'étude des murs de soutènement.

Deuxième application :

L'exemple suivant intéresse les fondations superficielles (fig. 41).

$$\begin{aligned} \Omega &= \pi & \alpha_1 &= \alpha_2 = 0 \\ \gamma_1 &= \gamma_2 = 0 & 2\delta &= \pi \end{aligned}$$

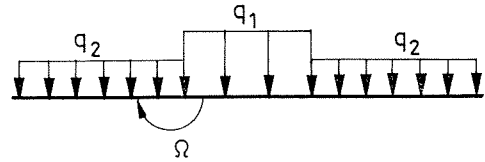


Fig. 41.

On trouve :

$$q_2 = q_1 \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) e^{-\pi \operatorname{tg} \varphi} \quad (3.23)$$

Troisième application :

Dans le cas où le massif est cohérent, les expressions précédentes deviennent respectivement

$$q_2 + H = (q_1 + H) \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \quad (3.24)$$

$$q_2 + H = (q_1 + H) \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) e^{-\pi \operatorname{tg} \varphi} \quad (3.25)$$

Ce résultat peut être obtenu directement par application du théorème des états correspondants.

Divers exemples sont traités dans les ouvrages indiqués dans la bibliographie sous références [6] et [7].

4. Milieux purement cohérents

4.1. Considérations générales

L'étude des milieux purement cohérents ($C \neq 0$, $\varphi = 0$) est importante en mécanique des sols. C'est notamment le cas des sols argileux parfaitement saturés.

Le milieu est en état d'équilibre limite si, en tout point, les contraintes principales σ_1 et σ_2 sont reliées entre elles par le critère de Coulomb (fig. 42)

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2C \quad (4.1)$$

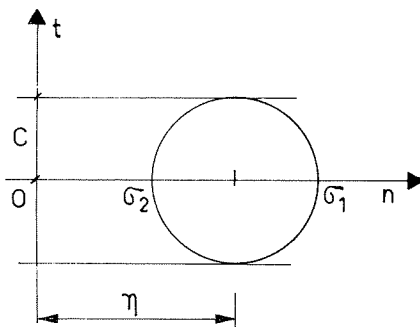


Fig. 42.

Généralement, on rapporte l'étude à un système de référence ($O x_1 x_2$) où l'axe $O x_1$ est dirigé suivant la verticale. Les lignes caractéristiques Γ_1 et Γ_2 constituent deux familles de courbes orthogonales admettant les directions de σ_1 et σ_2 comme bissectrices (fig. 43).

La répartition des contraintes dans le milieu est bien définie si l'on connaît en tout point I de celui-ci l'abscisse du centre du cercle de Mohr et l'angle θ que fait σ_1 avec l'axe $O x_1$.

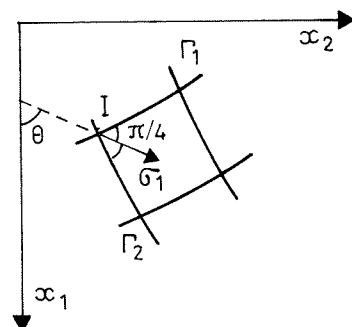


Fig. 43.

4.2. Equations de Hencky

Les équations de Kötter se réduisent, dans le cas d'un milieu purement cohérent, aux équations de Hencky.

Considérons un milieu cohérent (fig. 44). On a :

$$\lambda = H + \eta \quad d\lambda = d\eta \quad (4.1)$$

$$\lambda \operatorname{tg} \varphi = (H + \eta) \operatorname{tg} \varphi = C + \eta \operatorname{tg} \varphi \quad (4.2)$$

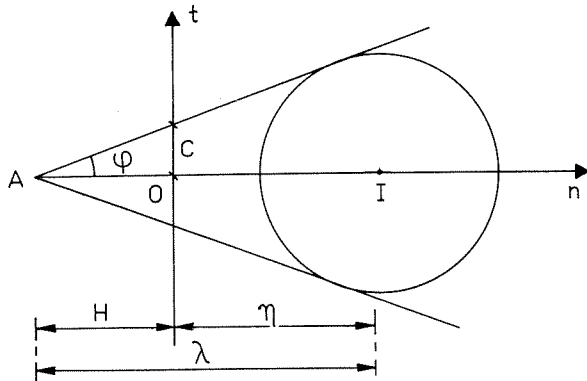


Fig. 44.

Dans le cas d'un milieu purement cohérent, les expressions précédentes tendent vers les valeurs :

$$\varphi = 0 \quad H \rightarrow \infty \quad (4.3)$$

$$\lambda \operatorname{tg} \varphi = C \quad (4.4)$$

En conséquence, les équations (2.26) de Kötter

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds_i} \left(\frac{1}{2 \operatorname{tg} \varphi} \operatorname{Log} \frac{\lambda}{k} \pm \theta \right) &= \\ &= \frac{1}{2 \lambda \operatorname{tg} \varphi} \frac{d\lambda}{ds_i} \pm \frac{d\theta}{ds_i} = \frac{V_i}{2 \lambda \operatorname{tg} \varphi} \end{aligned} \quad (4.5)$$

deviennent :

$$\frac{d\eta}{ds_i} \pm 2C \frac{d\theta}{ds_i} = V_i \quad (4.6)$$

On retrouve ainsi les équations (2.30) et (2.31).

Généralement, $\vec{V}$ est la résultante de la pesanteur $\vec{\gamma}$ et de la pression due à un gradient hydraulique i éventuel.

$$\vec{V} = \vec{\gamma} + \vec{\gamma}_e i \quad (4.7)$$

(γ_e : poids spécifique de l'eau).

En exprimant que $\vec{V}$ dérive d'une fonction de force W , on peut écrire :

$$\frac{\partial W}{\partial s_i} = V_i \quad (4.8)$$

L'équation (4.6) devient alors :

$$\frac{d\eta}{ds_i} \pm 2C \frac{d\theta}{ds_i} = \frac{dW}{ds_i} \quad (4.9)$$

En résumé, on a le long d'une même l.c. :

• de la première famille Γ_1 :

$$\eta + 2C\theta - W = C^{te} \quad (4.10)$$

• de la deuxième famille Γ_2 :

$$\eta - 2C\theta - W = C^{te} \quad (4.11)$$

Les relations (4.10) et (4.11) portent le nom d'équations de Hencky.

Dans le cas où $\vec{V}$ se réduit au poids propre du massif, on a évidemment :

$$W = \gamma x_1 + C^{te} \quad (4.12)$$

4.3. Poussée sur une paroi

Considérons (fig. 45) un sol purement cohérent délimité par une surface horizontale OH et la paroi OP. Le long de OH s'exerce une surcharge uniforme q_1 d'inclinaison α_1 . Le sol étant en équilibre limite, on se propose de déterminer la poussée q_2 agissant sur OP et dont l'inclinaison est α_2 .

Soit $A_1 A_2$ une ligne de glissement appartenant à la deuxième famille, le long de laquelle l'équation de Hencky s'écrit :

$$\eta - 2C\theta - \gamma x_1 = C^{te} \quad (4.13)$$

Au point A_1 sur OH, on a (fig. 46) :

$$\eta_1 = q_1 \cos \alpha_1 - C \cos 2\omega_1$$

$$\theta_1 = \omega_1$$

$$t_1 = q_1 \sin \alpha_1 = C \sin 2\omega_1$$

$$x_1 = 0$$

On voit que η_1 et θ_1 peuvent être déterminés en fonction de q_1 et de α_1 ou t_1 .

Au point A_2 sur OP, on a aussi (fig. 47) :

$$\eta_2 = q_2 \cos \alpha_2 - C \cos 2\omega_2$$

$$\theta_2 = \omega_2 - \Omega \quad (\Omega = \widehat{POH})$$

$$t_2 = q_2 \sin \alpha_2 = C \sin 2\omega_2$$

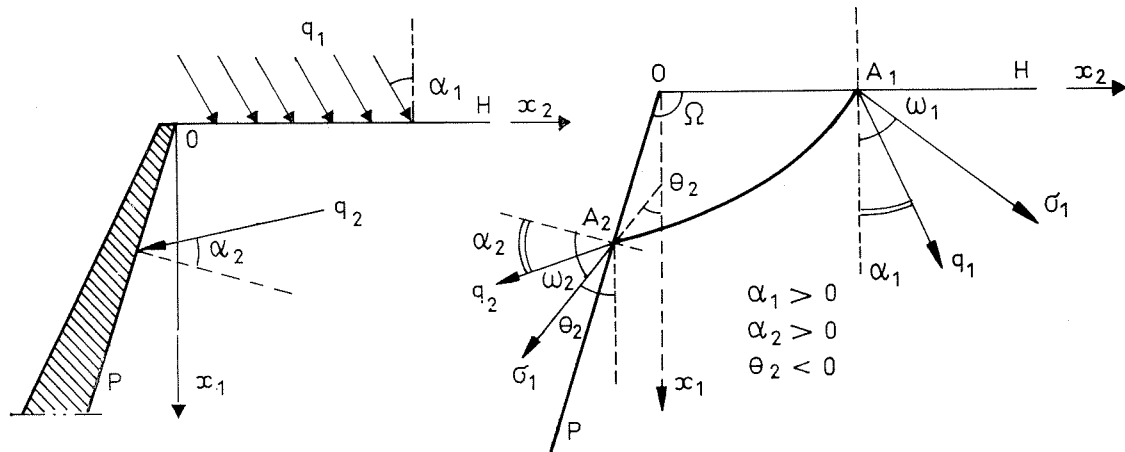


Fig. 45.

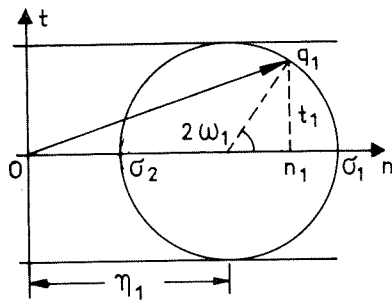


Fig. 46.

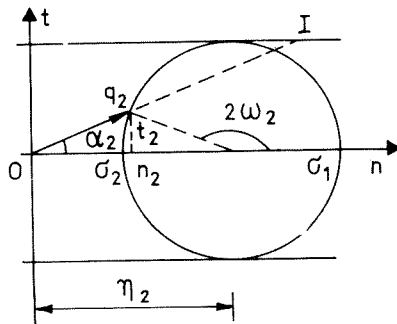


Fig. 47.

Ecrivons que l'expression (4.13) prend la même valeur en A_1 et A_2 . On trouve, compte tenu des relations précédentes :

$$\begin{aligned} q_1 \cos \alpha_1 - C \cos 2\omega_1 - 2C\omega_1 &= \\ &= q_2 \cos \alpha_2 - C \cos 2\omega_2 - \\ &- 2C(\omega_2 - \Omega) - \gamma x_1 \end{aligned} \quad (4.16)$$

où x_1 est l'abscisse du point A_2 .

Cette équation permet d'avoir la valeur de la poussée q_2 en s'imposant une certaine donnée le long de la paroi. Ainsi, en prenant α_2 constant, on trouverait une solution pour laquelle l'extrémité de q_2 décrirait la droite OI (fig. 47). Cependant, cette solution n'est admissible que sur une certaine hauteur de la paroi pour laquelle :

$$q_2 \leq OI = \frac{C}{\sin \alpha_2}. \quad (4.17)$$

Par contre, il nous paraît plus normal de s'imposer une valeur constante de la composante tangentielle t_2 tout le long de la paroi :

$$-C \leq t_2 = q_2 \sin \alpha_2 \leq C \quad (4.18)$$

Comme nous le verrons à la fin de ce paragraphe, ceci revient à admettre une inclinaison constante des lignes de glissement au contact avec la paroi.

La variation de la composante normale n_2 de q_2 peut être alors tirée de l'équation (4.16) :

$$\begin{aligned} n_2 = q_2 \cos \alpha_2 &= q_1 \cos \alpha_1 - \\ &- C(\cos 2\omega_1 - \cos 2\omega_2) - \\ &- 2C(\omega_1 - \omega_2 + \Omega) + \gamma x_1 \end{aligned} \quad (4.19)$$

On voit que n_2 varie linéairement en fonction de la profondeur x_1 . Dans le cas où le chargement q_1 est normal ($\alpha_1 = \omega_1 = 0$), l'expression précédente devient :

$$\begin{aligned} n_2 = q_1 - C(1 - \cos 2\omega_2) - \\ - 2C(-\omega_2 + \Omega) + \gamma x_1 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Elle s'annule pour :

$$\begin{aligned} (x_1)_0 &= -\frac{C}{\gamma} \\ \left[\frac{q_1}{C} - 1 + \cos 2\omega_2 + 2(\omega_2 - \Omega) \right] & \quad (4.21) \end{aligned}$$

L'équation (4.20) peut s'écrire aussi :

$$n_2 = \gamma [x_1 - (x_1)_0] \quad (4.22)$$

Le tableau I donne la variation de la quantité :

$$A = \cos 2\omega_2 + 2\omega_2 \quad (4.23)$$

en fonction de la quantité sans dimension T (fig. 48) :

$$-1 \leq T = \frac{t_2}{C} = \sin 2\omega_2 = \sin 2\psi \leq 1 \quad (4.24)$$

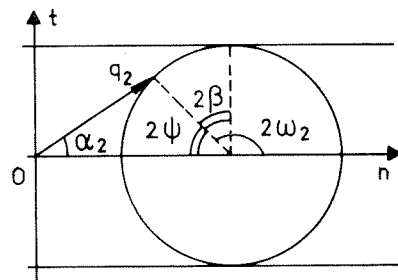


Fig. 48.

où :

$$-\frac{\pi}{2} \leq 2\psi = \pi - 2\omega_2 \leq \frac{\pi}{2} \quad (4.25)$$

TABLEAU I

T	A	T	A
-1.0	-4.71	0	-2.14
-0.9	-3.85	0.1	-2.05
-0.8	-3.47	0.2	-1.96
-0.7	-3.20	0.3	-1.88
-0.6	-2.99	0.4	-1.81
-0.5	-2.80	0.5	-1.75
-0.4	-2.64	0.6	-1.70
-0.3	-2.49	0.7	-1.65
-0.2	-2.36	0.8	-1.61
-0.1	-2.25	0.9	-1.59
-0	-2.14	1.0	-1.57

Dans la pratique, pour les cas où la valeur de $(x_1)_0$ est positive, la poussée sur la paroi n'est estimée qu'à partir de la profondeur $(x_1)_0$, c'est-à-dire en ne prenant que les valeurs de $n_2 \geq 0$.

Reprenons la relation :

$$t_2 = C \sin 2\omega_2 = C \cos 2\beta \quad \left(2\beta = 2\omega_2 - \frac{\pi}{2} \right)$$

où β est l'angle que fait la ligne de glissement avec la paroi.

Si l'on s'impose t_2 constante, il en résulte que les lignes de glissement rencontrent la paroi sous un angle β constant.

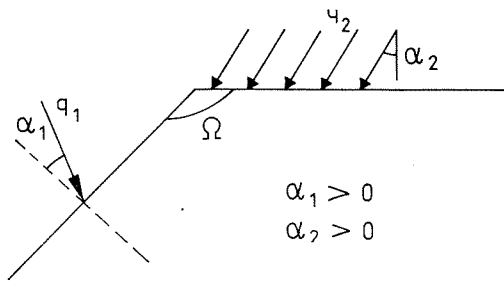


Fig. 49.

4.4. Butée

Si le sol travaille à la butée (fig. 49), un calcul identique au précédent donne une expression similaire à l'équation (4.16) et qui s'écrit :

$$\begin{aligned} q_1 \cos \alpha_1 - C \cos 2 \omega_1 - 2 C \omega_1 - \gamma x_1 &= \\ &= q_2 \cos \alpha_2 - C \cos 2 \omega_2 - \\ &- 2 C (\omega_2 - \Omega) \end{aligned} \quad (4.26)$$

où q_1 est la butée du sol en un point de profondeur x_1 et q_2 est la surcharge uniforme agissant sur la surface horizontale OH. Les angles α_1 , α_2 , ω_1 et ω_2 ont la même signification que précédemment.

Si l'on impose une valeur constante à la composante tangentielle t_1 le long de la paroi, l'expression (4.26) montre que la composante normale n_1 de la butée varie linéairement en fonction de x_1 . Notamment, si la surcharge q_2 est normale ($\alpha_2 = 0$, $2 \omega_2 = \pi$), on tire de l'équation (4.26) :

$$\begin{aligned} n_1 &= q_1 \cos \alpha_1 = \\ &= q_2 + C [1 + 2 \Omega - \pi + \\ &+ \cos 2 \omega_1 + 2 \omega_1] + \gamma x_1 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Cette équation peut s'écrire aussi sous la forme :

$$n_1 = \gamma [x_1 + (x_1)_0] \quad (4.28)$$

où :

$$\begin{aligned} (x_1)_0 &= \frac{C}{\gamma} \cdot \\ &\cdot \left[\frac{q_2}{C} + 1 + 2 \Omega - \pi + \cos 2 \omega_1 + 2 \omega_1 \right] \end{aligned} \quad (4.29)$$

Dans le cas où q_1 et q_2 sont normales

$$(\alpha_1 = \alpha_2 = \omega_1 = 0, 2 \omega_2 = \pi),$$

on obtient des équations (4.19) et (4.27) les expressions bien connues :

- pour la poussée :

$$q_2 = q_1 - 2 C \left(1 + \Omega - \frac{\pi}{2} \right) + \gamma x_1 \quad (4.30)$$

- pour la butée :

$$q_1 = q_2 + 2 C \left(1 + \Omega - \frac{\pi}{2} \right) + \gamma x_1$$

4.5. Fondations superficielles

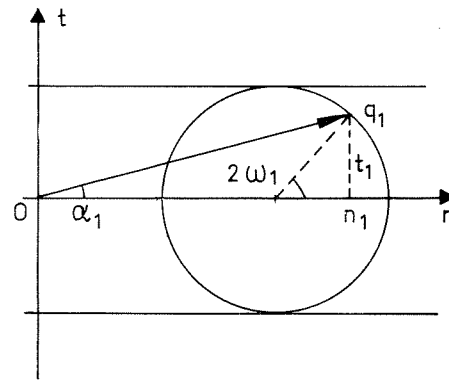
Si dans l'équation (4.16), on prend :

$$q_2 = 0, \quad \alpha_2 = 0 \rightarrow 2 \omega_2 = \pi,$$

$$\Omega = \pi \rightarrow x_1 = 0$$

on trouve alors la charge de rupture q_1 d'inclinaison α_1 pour une fondation superficielle :

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{C}{\cos \alpha_1} [\cos 2 \omega_1 + 2 \omega_1 + 1 + \pi] = \\ &= C \frac{\sin 2 \omega_1}{\sin \alpha_1} \end{aligned} \quad (4.31)$$



Cette double relation permet d'avoir ω_1 et q_1 . Si $\alpha_1 = \omega_1 = 0$, on retrouve l'équation bien connue :

$$q_1 = (2 + \pi) C \quad (4.32)$$

L'équation (4.32) peut être obtenue aussi en posant dans l'équation (4.27)

$$\Omega = \pi \quad q_2 = x_1 = 0$$

Le tableau II donne, en fonction de $2 \omega_1$ variant entre les limites $\left[-\frac{\pi}{2} \leq 2 \omega_1 \leq \frac{\pi}{2} \right]$ les valeurs de :

- la quantité sans dimension T :

$$T = \frac{t_1}{C} = \sin 2 \omega_1 \quad (4.33)$$

- l'inclinaison α_1 de la charge q_1 donnée en degrés :

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\sin 2 \omega_1}{\cos 2 \omega_1 + 2 \omega_1 + 1 + \pi} \quad (4.34)$$

- le paramètre sans dimension Q proportionnel à la charge de poinçonnement q_1 :

$$Q = \frac{q_1}{C} = \frac{\sin 2 \omega_1}{\sin \alpha_1} \quad (4.35)$$

Dans le cas où l'on a une fondation semi-enterrée à une profondeur D (fig. 50), le poids des terres de part et d'autre de celle-ci peut être assimilé à une surcharge q_2 de valeur :

$$q_2 = \gamma D$$

avec, comme on le verra dans les applications :

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha_1 \leq 0.$$

En conséquence, l'équation (4.26) est à remplacer par :

$$q_1 = \frac{C}{\cos \alpha_1} \left[\frac{\gamma D}{C} + \cos 2 \omega_1 + 2 \omega_1 + 1 + \pi \right] \quad (4.36)$$

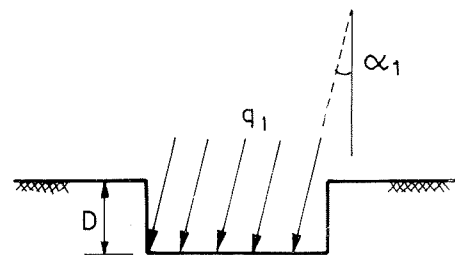


Fig. 50.

TABLEAU II

$2\omega_1$ (en degrés)	α_1 (en degrés)	T	Q	$2\omega_1$ (en degrés)	α_1 (en degrés)	T	Q	$2\omega_1$ (en degrés)	α_1 (en degrés)	T	Q
90	21.26	—	2.76	25	5.24	—	4.63	35	5.88	0.57	5.60
85	19.95	—	2.92	20	4.13	—	4.74	40	6.54	0.64	5.64
80	18.64	—	3.08	15	3.06	—	4.85	45	7.15	0.71	5.68
75	17.35	—	3.24	10	2.01	—	4.95	50	7.71	0.77	5.71
70	16.07	—	3.39	5	0.99	—	5.05	55	8.21	0.82	5.73
65	14.80	—	3.55	0	0.00	—	5.14	60	8.66	0.87	5.75
60	13.55	—	3.70	5	0.96	0.09	5.23	65	9.04	0.91	5.77
55	12.31	—	3.84	10	1.88	0.17	5.30	70	9.35	0.94	5.78
50	11.08	—	3.99	15	2.76	0.26	5.38	75	9.60	0.97	5.79
45	9.87	—	4.12	20	3.60	0.34	5.44	80	9.78	0.98	5.80
40	8.68	—	4.26	25	4.41	0.42	5.50	85	9.89	1.00	5.80
35	7.51	—	4.39	30	5.17	0.50	5.55	90	9.93	1.00	5.80
30	6.36	—	4.51								

4.6. Equilibre d'un talus

On considère le cas général (fig. 51) où le profil OB est soumis à une pression d'eau :

$$q = \gamma x_1$$

(γ = poids spécifique de l'eau).

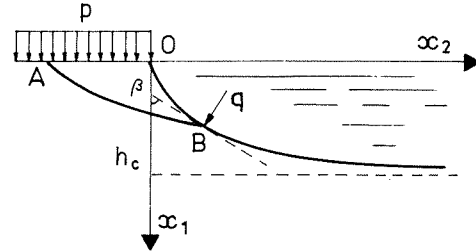


Fig. 51.

A l'intérieur du massif règne une pression interstitielle u . En un point du massif, les contraintes totales σ_i s'obtiennent en additionnant les contraintes intergranulaires ou de contact σ'_i et la pression interstitielle u :

$$\sigma_i = \sigma'_i + u \quad (4.37)$$

Or, la condition de l'équilibre limite de Coulomb (4.1) est exprimée en fonction des contraintes intergranulaires σ'_i et non de σ_i . Pour un milieu purement cohérent, ceci n'est pas nécessaire grâce au fait que la condition de Coulomb n'est pas modifiée par l'addition de la pression interstitielle u .

Elle peut être exprimée pareillement en fonction des contraintes totales ou intergranulaires :

$$t = C = \frac{1}{2} [\sigma'_1 - \sigma'_2] = \frac{1}{2} [\sigma_1 - \sigma_2] \quad (4.38)$$

Ceci se traduit dans le plan de Mohr par un déplacement du cercle de la quantité (fig. 52) :

$$II' = u$$

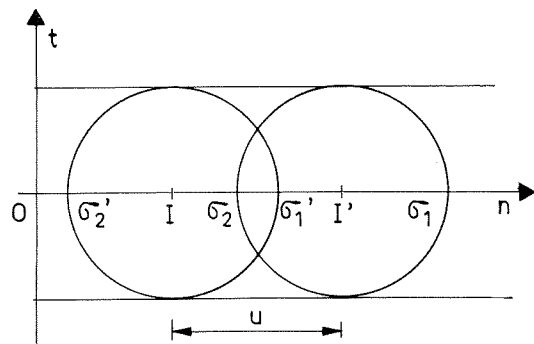


Fig. 52.

Ce déplacement conserve toujours la tangence du cercle de Mohr avec les deux droites intrinsèques.

Dans la suite de l'exposé on prend en considération les contraintes totales C_i .

Le profil limite qu'on peut donner au talus est défini à partir de l'équation (4.20) :

$$\beta = \frac{1}{2C} [W_{AB} - q + p - 2C]$$

où :

$$W_{AB} = \rho x_1$$

(ρ : poids spécifique du sol saturé).

$$q = \gamma x_1$$

d'où l'on tire l'équation différentielle du profil :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \frac{(\rho - \gamma) x_1 + p - 2C}{2C} \quad (4.39)$$

Par intégration on trouve :

$$x_2 = -\frac{2C}{\rho - \gamma} \operatorname{Log} \cos \frac{(\rho - \gamma) x_1 + p - 2C}{2C} + C^{\text{te}} \quad (4.40)$$

C'est l'équation du profil limite du talus OB. On voit qu'il tend asymptotiquement vers la droite $x_1 = h_c$ donnée par :

$$\frac{1}{2C} [(\rho - \gamma) x_1 + p - 2C] = \frac{\pi}{2} \quad (4.41)$$

La hauteur critique qu'on peut atteindre est donc :

$$h_c = \frac{1}{\rho - \gamma} [(2 + \pi) C - p] \quad (4.42)$$

On voit que la pression q de l'eau joue le rôle de stabilisateur. En l'absence de l'eau l'équation (4.40) du profil limite devient :

$$x_2 = -\frac{2C}{\rho} \operatorname{Log} \cos \frac{\rho x_1 + p - 2C}{2C} + C^{\text{te}} \quad (4.43)$$

et la hauteur critique est réduite à :

$$h_c = \frac{1}{\rho} [(2 + \pi) C - p] \quad (4.44)$$

Pour que la hauteur critique h_c soit nulle, il faut qu'on ait :

$$p = (2 + \pi) C.$$

C'est bien la formule (4.32) déjà rencontrée dans l'étude des fondations superficielles pour $q = 0$.

Si $p > (2 + \pi) C$, la hauteur critique devient négative ($h_c < 0$) et l'angle β à l'origine prend la valeur (fig. 53) :

$$\beta_0 = \frac{1}{2C} (p - 2C) > \frac{\pi}{2}$$

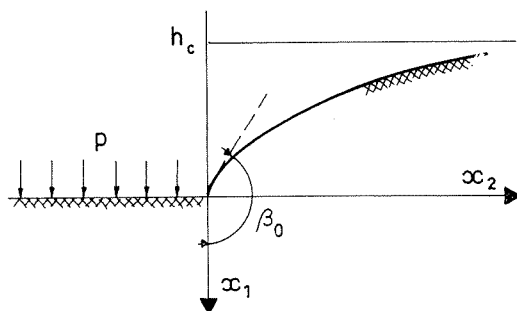


Fig. 53.

4.7. Applications

4.7.1. Poussée sur un mur de soutènement

Le sol horizontal OH est soumis à une charge verticale q_1 uniformément répartie. On désire déter-

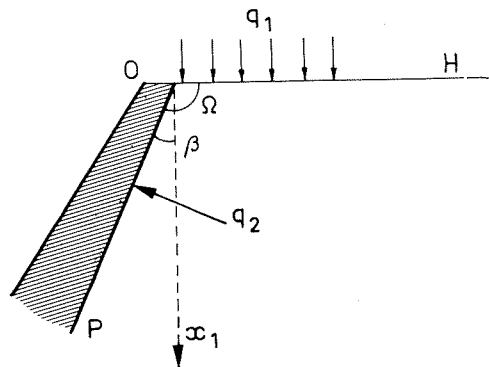


Fig. 54.

miner la poussée q_2 agissant normalement sur la paroi OP (fig. 54).

La poussée sur OP étant normale, il en résulte :

$$\alpha_2 = 0 \quad 2\omega_2 = \pi$$

d'où, de l'équation (4.21) :

$$(x_1)_0 = -\frac{C}{\gamma} \left[\frac{q_1}{C} - 1 - 1 + 2(\omega_2 - \Omega) \right] = \frac{1}{\gamma} [-q_1 + 2C(1 + \beta)]$$

où :

$$\beta = \Omega - \frac{\pi}{2} = \widehat{POx_1}.$$

L'équation (4.22) donne la valeur de la poussée q_2 :

$$q_2 = n_2 = \gamma [x_1 - (x_1)_0]$$

Au point A, d'abscisse $(x_1)_0$, la poussée est nulle (fig. 55). Sur la partie OA, la valeur de n_2 est négative. Ceci n'est pas possible physiquement. Il en résulte qu'on peut considérer que le diagramme des poussées s'étend sur AP uniquement ($n_2 > 0$).

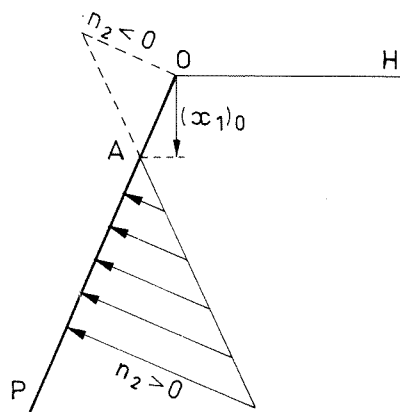


Fig. 55.

On peut tirer aussi de ce qui précède la conclusion intéressante suivante :

Sur OA, le mur de soutènement n'est pas sollicité. L'expression de $(x_1)_0$ permet d'avoir la hauteur du talus qu'on peut admettre, *a priori*, sans aucune risque. Ainsi, en prenant (fig. 56) :

$$q_1 = 0 \quad \Omega = \frac{\pi}{2} \quad \beta = 0$$

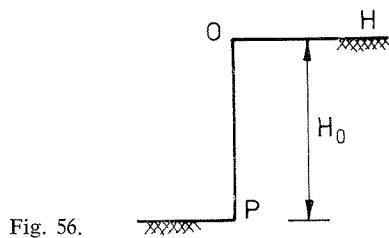


Fig. 56.

on trouve comme hauteur admissible H_0 la valeur :

$$(x_1)_0 = H_0 = \frac{2C}{\gamma}$$

En utilisant la méthode des cercles de glissement, on voit que la hauteur critique H_c à ne pas dépasser pour avoir un coefficient de sécurité égal à l'unité est de

$$H_c = \frac{3.84 C}{\gamma}$$

En prenant H_0 , le coefficient de sécurité dont on dispose est alors :

$$\rho = \frac{H_c}{H_0} = 1.92$$

ce qui est acceptable.

4.72. Fondations superficielles

Quelle est la valeur de la charge de poinçonnement q_1 d'une fondation superficielle OO' sachant que la valeur de sa composante tangentielle est $t_1 = 0.5 C$ (fig. 57).

La fondation OO' étant de longueur finie, il y a lieu de considérer les deux cas suivants :

Le premier suppose que le poinçonnement s'effectue du côté OP . On a alors ($\alpha_1 > 0$)

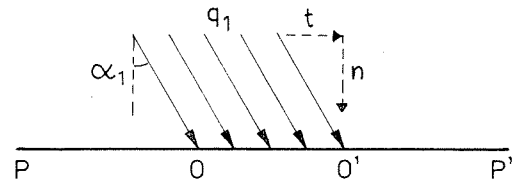


Fig. 57.

$$T = \frac{t_1}{C} = 0.5.$$

Le tableau II donne alors :

$$Q = 5.55 \quad \alpha_1 = 5^\circ.17$$

d'où :

$$q_1 = CQ = 5.55 C$$

et

$$n_1 = q_1 \cos \alpha_1 \approx 5.55 C.$$

Par contre, si l'on considère que le poinçonnement a lieu du côté $O'P'$, on trouve (avec $\alpha_1 < 0$) :

$$T = \frac{t_1}{C} = -0.5.$$

On tire du tableau II :

$$Q = 4.51 \quad \alpha_1 = -6^\circ.36$$

d'où

$$q_1 = 4.51 C$$

$$n_1 = q_1 \cos \alpha_1 = 4.51 C.$$

On voit que le poinçonnement se produit obligatoirement du côté $O'P'$ et la valeur de la charge de poinçonnement est de $4.51 C$.

D'ailleurs, en général, le poinçonnement s'effectue du côté correspondant à α_1 négatif.

5. Analyse générale des lignes caractéristiques

5.1. Préliminaire

Les deux familles de l.c. constituent un réseau de courbes se coupant sous un angle constant

$$2\mu = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

La connaissance de ce réseau permet d'avoir le champ de contraintes dans le massif. En effet, en chaque point (fig. 58) :

- l'angle θ donne la direction de contrainte principale σ_1 ;

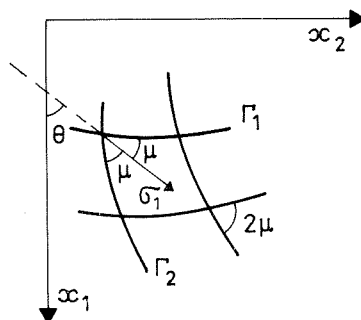


Fig. 58.

- le paramètre λ (ou ξ_1 et ξ_2) est obtenu à partir des conditions sur le contour et par intégration des équations de Kötter le long des lignes caractéristiques.

L'analyse de l'équilibre limite du massif peut donc passer par l'examen du réseau de l.c.

5.2. Expression de la courbure le long d'une ligne caractéristique

Considérons deux l.c. (Γ_2 et Γ_2') de la deuxième famille infiniment rapprochées (fig. 59).

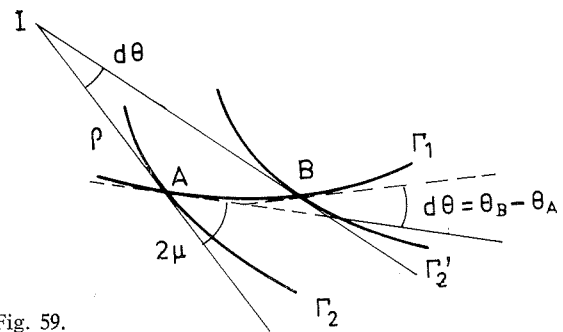


Fig. 59.

Elles interceptent le segment AB d'une ligne Γ_1 de la première famille. D'après la définition même de l'angle θ , on a :

$$d\theta = \theta_B - \theta_A \quad (5.1)$$

La courbure de l'arc AB = ds_1 infiniment petit est :

$$\frac{1}{R_1} = \frac{d\theta}{ds_1} \quad (5.2)$$

Or, du triangle infinitésimal IAB, on peut écrire :

$$R_1 = \frac{AB}{d\theta} = \frac{IA}{\sin 2\mu} = \frac{\rho}{\cos \varphi} \quad (5.3)$$

5.3. Analyse de la ligne limite ou de discontinuité de première espèce

Reprenons le paragraphe (2.6) et supposons que sur la courbe Γ , le dénominateur seul est nul dans l'une des équations (2.33). Soit, par exemple :

$$dx_2 - \operatorname{tg}(\theta - \mu) dx_1 = 0 \quad (5.4)$$

$$a_2 dx_1 - d\xi_2 \neq 0 \quad (5.5)$$

Par conséquent, la courbe Γ (fig. 60) est tangente en chacun de ses points à une l.c. Γ_2 . Elle constitue donc une enveloppe pour la famille des Γ_2 .

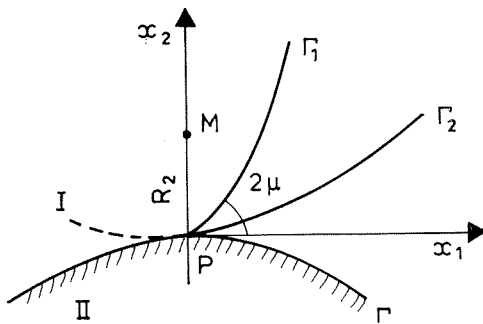


Fig. 60.

Plaçons-nous en P sur Γ et menons la tangente Px_1 (fig. 60). Dans le repère (x_1, x_2) , on a en P :

$$\theta = \mu \quad dx_2 = 0 \quad (5.6)$$

Du système d'équations (2.33), on constate qu'au point P, l'expression suivante a une valeur finie :

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = \frac{1}{2\lambda \operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} + \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \quad (5.7)$$

Par contre, l'expression ci-après tend vers l'infini :

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} = \frac{1}{2\lambda \operatorname{tg} \varphi} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} - \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \rightarrow \infty \quad (5.8)$$

La comparaison des expressions (5.7) et (5.8) montre que l'on a simultanément :

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_2} \rightarrow \infty \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x_2} \rightarrow \infty \quad (5.10)$$

L'expression (5.9) indique que le champ de contraintes subit une discontinuité quand on traverse la courbe Γ .

L'expression (5.10) montre que les l.c. Γ_1 aboutissant à la courbe Γ admettent sur celle-ci un point de rebroussement. En effet, on a :

$$\frac{1}{R_1} = \frac{d\theta}{ds_1} = \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{ds_1} + \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{ds_1} \rightarrow \infty \quad (5.11)$$

5.31. En résumé

- Une telle courbe Γ est l'enveloppe des l.c. de la deuxième famille Γ_2

$$dx_2 - \operatorname{tg}(\theta - \mu) dx_1 = 0 \quad (5.12)$$

et un lieu de points de rebroussement pour la première famille Γ_1 .

$$R_1 = 0 \quad (5.13)$$

- Le long de Γ , l'équation de Kötter n'est pas vérifiée :

$$d\xi_2 \neq a_2 dx_1 \quad (5.14)$$

- Cette courbe Γ est dite « ligne limite ou de discontinuité de première espèce ».

5.32. Interprétation géométrique

Soient deux l.c. Γ_2 et Γ'_2 tangentes en deux points voisins (A et P) à l'enveloppe Γ (fig. 61). Dans le triangle infinitésimal IAB, où IA et IB sont respectivement tangentes à Γ_2 et Γ'_2 , on a :

$$R_1 \approx \frac{AB}{\Delta\theta} = \frac{IA}{\cos \varphi} \quad (5.15)$$

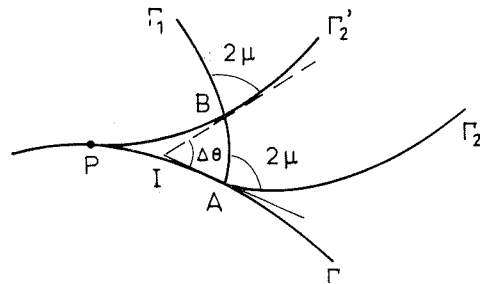


Fig. 61.

Quand le point P se rapproche indéfiniment de A, l'expression ci-dessus montre que le rayon de courbure R_1 de Γ_1 en A est nul. Donc c'est un point de rebroussement (voir paragraphe 5.57 ci-après).

5.4. Utilisation de coordonnées curvilignes

Ramenons l'étude de ce réseau à un système adéquat de coordonnées curvilignes :

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u_1(x_1, x_2) = \text{Cte sur une ligne } \Gamma_2 \\ u_2 &= u_2(x_1, x_2) = \text{Cte sur une ligne } \Gamma_1 \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

Inversement, on a :

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1(u_1, u_2) \\ x_2 &= x_2(u_1, u_2) \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

Le long d'une ligne Γ_1 ($u_2 = \text{Cte}$), on a :

$$\left. \begin{aligned} dx_1 &= \frac{\partial x_1}{\partial u_1} du_1 & dx_2 &= \frac{\partial x_2}{\partial u_1} du_1 \\ \frac{dx_2}{dx_1} &= \operatorname{tg}(\theta + \mu) = \frac{\partial x_2}{\partial u_1} / \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

$$d\xi_1 = \frac{\partial \xi_1}{\partial u_1} du_1 = a_1 dx_1 = a_1 \frac{\partial x_1}{\partial u_1} du_1$$

$$\text{ou} \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial u_1} = a_1 \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \quad (5.19)$$

Suivant Γ_2 , on a de même :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x_2}{\partial u_2} &= \operatorname{tg}(\theta - \mu) \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_2} &= a_2 \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

Au voisinage d'un point $M(x_1, x_2)$ quelconque du milieu, on a les transformations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} dx_1 &= \frac{\partial x_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x_1}{\partial u_2} du_2 \\ dx_2 &= \frac{\partial x_2}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x_2}{\partial u_2} du_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

Ceci n'est possible que si le déterminant fonctionnel D est différent de zéro :

$$D = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)} = \det. \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (5.22)$$

Compte tenu des équations (5.18) et (5.20), on trouve :

$$\begin{aligned} D &= \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial u_2} - \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial u_1} \\ &= [\operatorname{tg}(\theta + \mu) - \operatorname{tg}(\theta - \mu)] \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \\ &= \frac{\cos \varphi}{\cos(\theta + \mu) \cos(\theta - \mu)} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \neq 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

Rappelons aussi la relation :

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)} \cdot \frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(x_1, x_2)} = 1 \quad (5.24)$$

Si $D = 0$, le point $M(x_1, x_2)$ est alors singulier. (5.25)

5.41. L'enveloppe E d'une famille de lignes caractéristiques est un lieu de points singuliers pour la deuxième famille

Reprenons les équations paramétriques (5.17) :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(u_1, u_2) \\ x_2 &= x_2(u_1, u_2) \end{aligned}$$

Le long d'une Γ_1 de la première famille ($u_2 = C^{te}$), on a :

$$dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial u_1} du_1 \quad dx_2 = \frac{\partial x_2}{\partial u_1} du_1 \quad (5.26)$$

Toute relation

$$u_2 = u_2(u_1) \quad (5.27)$$

définit une courbe E le long de laquelle on a :

$$\left. \begin{aligned} dx_1 &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1} + \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \cdot \frac{du_2}{du_1} \right) du_1 \\ dx_2 &= \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_1} + \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \cdot \frac{du_2}{du_1} \right) du_1 \end{aligned} \right\} \quad (5.28)$$

Déterminons la fonction $u_2(u_1)$ pour que E soit l'enveloppe E_1 de la famille Γ_1 . Pour cela, exprimons que E_1 est tangente en chacun de ses points à une courbe Γ_1 .

Des équations (5.26) et (5.28), on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_1} &= \frac{\frac{\partial x_1}{\partial u_1}}{\frac{\partial x_1}{\partial u_1}} \cdot \frac{\frac{\partial x_2}{\partial u_1}}{\frac{\partial x_2}{\partial u_1}} \\ &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1} + \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \cdot \frac{du_2}{du_1} \right) / \left(\frac{\partial x_2}{\partial u_1} + \frac{\partial x_2}{\partial u_2} \cdot \frac{du_2}{du_1} \right) \end{aligned}$$

d'où :

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial u_2} - \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial u_1} \right) \frac{du_2}{du_1} = 0 \quad (5.29)$$

La fonction recherchée $u_2(u_1)$ doit donc vérifier la relation :

$$D = \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial u_2} - \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial u_1} = 0 \quad (5.30)$$

Cette relation exprime aussi que E_1 est un lieu de points singuliers, équation (5.23).

Du fait de la symétrie en u_1 et u_2 dans les équations (5.17) et (5.30), on peut dire :

- Les enveloppes E_1 et E_2 des deux familles de l.c. (Γ_1 et Γ_2) sont définies par le même système d'équations :

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1(u_1, u_2) \\ x_2 &= x_2(u_1, u_2) \\ D &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.31)$$

- Bien que les deux enveloppes E_1 et E_2 soient définies par les mêmes équations (5.31), elles constituent deux courbes distinctes. Chacune d'elles est aussi un lieu de points de rebroussement pour la deuxième famille.

Ainsi, sur la figure 62, E_2 est l'enveloppe de la famille Γ_2 et elle est un lieu des points de rebroussement pour la famille Γ_1 .

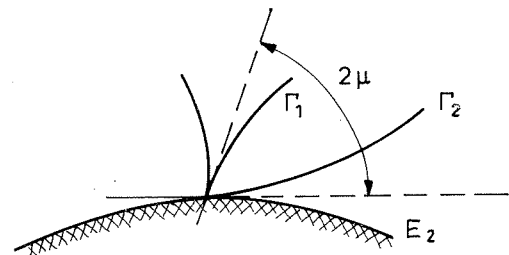


Fig. 62.

5.42. Point singulier

Supposons qu'en un point $M(x_1, x_2)$, on a (équation 5.25) :

$$D = 0 \quad (5.32)$$

Ce point est dit alors « singulier » et il peut lui correspondre, dans le plan (u_1, u_2) , deux points distincts M' et M'' (fig. 63).

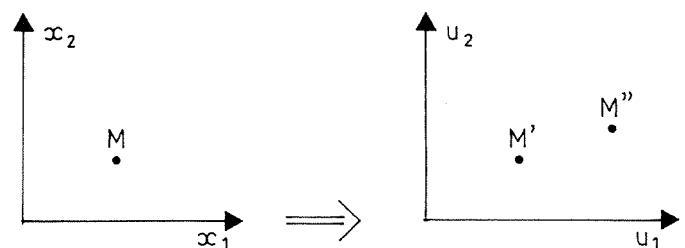


Fig. 63.

Dans divers problèmes de mécanique des sols, on se trouve en présence d'un tel cas. En effet, un massif en équilibre limite peut comporter sur son contour des zones d'équilibre différentes séparées par des points singuliers.

Soit 0 un point qui sépare deux zones du contour Γ où l'on a sur OA un équilibre inférieur et sur OB un équilibre supérieur (fig. 64). Le point 0 est alors un point de discontinuité. Un pareil cas se présente par exemple :

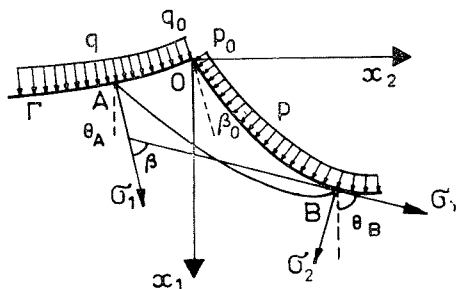


Fig. 64.

- dans l'étude des fondations superficielles où l'on a deux points de discontinuité O_1 et O_2 (fig. 65) ;

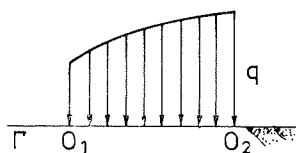


Fig. 65.

- dans l'étude des murs de soutènement où le sommet 0 est un point de discontinuité (fig. 66).

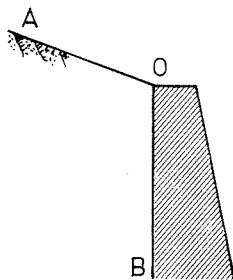


Fig. 66.

Prenons une ligne caractéristique A_1B_1 infiniment voisine du point de discontinuité 0, et traçons les deux lignes caractéristiques A_1C et B_1D de la deuxième famille (fig. 67). Elles coupent AB sous un angle de 2μ :

- A_1C correspond à l'état d'équilibre régnant sur OA ;
- B_1D correspond à l'état d'équilibre régnant sur OB.

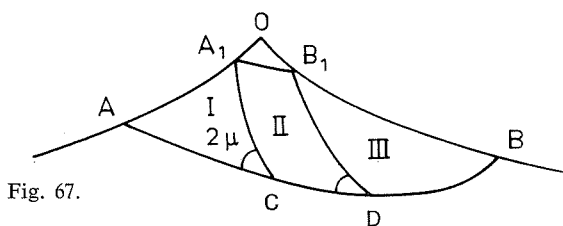


Fig. 67.

Le point de discontinuité 0 étant isolé par la caractéristique A_1B_1 , on voit que dans son voisinage règnent trois zones d'équilibre limite différentes : I, II et III. La zone intermédiaire II raccorde les deux zones extrêmes I et III.

D'après les propriétés précitées des lignes caractéristiques lors de l'étude du problème de Cauchy, on peut dire que la connaissance de q sur OA et de la direction de p sur OB détermine entièrement le problème.

L'effet du poids propre du triangle OA_1B_1 étant négligeable par rapport aux charges p_o et q_o agissant en 0, on peut dire que l'état d'équilibre au voisinage de 0 est similaire à celui rencontré dans l'étude des milieux non pesants.

La recherche d'une solution pratique dans le voisinage d'un point singulier peut être obtenue par intégration numérique des équations de Kötter :

- Sur OA, on connaît λ et θ . Il s'agit d'un simple problème de Cauchy et l'on peut établir la solution dans la zone I et déterminer la l.c. A_1C .

- La zone II est délimitée par les deux l.c. A_1C et A_1B_1 . Sur cette dernière, on a :

$$\left. \begin{aligned} x_1 = x_2 = 0 \\ d\lambda + 2\lambda \tan \varphi \cdot d\theta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

On connaît λ et θ en A_1 et la valeur de θ en B_1 . L'équation de Kötter réduite (5.33) permet d'avoir la variation de λ en fonction de θ sur A_1B_1 .

Ces deux l.c. définissent parfaitement le problème dans la zone II ainsi que sa frontière B_1D qui est une l.c. de la deuxième famille (voir paragraphe 2.72).

- Dans la zone III, la connaissance de B_1D et de la valeur de θ sur A_1B suffisent pour la résolution du problème et pour avoir, en particulier, la répartition de la charge p correspondant à l'état d'équilibre limite du massif (voir paragraphe 2.72).

Dans le plan (u_1, u_2) , le schéma de la figure 67 devient la figure 68 où AB et A_1B_1 sont des l.c. appartenant à la deuxième famille Γ_2 . Le long de A_1B_1 , on a :

$$\left. \begin{aligned} x_1 = x_2 = 0 \\ dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x_1}{\partial u_2} du_2 = 0 \\ dx_2 = \frac{\partial x_2}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial x_2}{\partial u_2} du_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

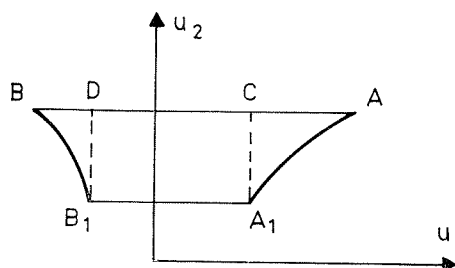


Fig. 68.

Etant donné que $du_2 = 0$ et $du_1 \neq 0$, il en résulte :

$$\frac{\partial x_1}{\partial u_1} = \frac{\partial x_2}{\partial u_2} = 0 \quad (5.35)$$

$$D = \frac{\partial (x_1, x_2)}{\partial (u_1, u_2)} = 0 \quad (5.36)$$

Le point 0 du plan (x_1, x_2) est bien un point singulier. Il lui correspond les deux points distincts (A_1) et (B_1) dans le plan (u_1, u_2) .

Remarques

- L'étude précitée suppose que $\lambda \neq 0$ en A_1 . Autrement, l'équation (5.33) est indéterminée et il y a lieu d'avoir recours à d'autres approches pour le traitement du problème.
- Pour qu'il y ait une solution, il faut que le contour OB soit situé hors de la zone II. Dans un tel cas, on peut avoir une solution statiquement admissible en prévoyant une ligne de discontinuité (voir paragraphe 2.12).

5.5. Milieux non pesants et milieux purement cohérents

Les équations (2.27), (4.10) et (4.11) peuvent se mettre sous la même forme:

$$\left. \begin{aligned} \psi + \theta &= h_1(u_2) = C^{\text{te}} \text{ sur } \Gamma_1 \\ \psi - \theta &= h_2(u_1) = C^{\text{te}} \text{ sur } \Gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.37)$$

où l'on a :

- pour un milieu non pesant :

$$\psi = \frac{1}{2 \lg \varphi} \operatorname{Log} \frac{\lambda}{k} \quad (5.38)$$

- pour un milieu purement cohérent :

$$\psi = \frac{\eta - W}{2C} \quad (5.39)$$

Les l.c. relatives à de tels milieux jouissent d'un certain nombre de propriétés communes qu'on examine successivement compte tenu des fonctions $h_1(u_2)$ et $h_2(u_1)$.

5.51. Premier cas : les deux fonctions $h_1(u_2)$ et $h_2(u_1)$ sont quelconques

C'est le cas général.

Par application des relations (5.37), on a (fig. 69) :

$$\left. \begin{aligned} (\psi + \theta)_A &= (\psi + \theta)_B & (\psi + \theta)_C &= (\psi + \theta)_D \\ (\psi - \theta)_A &= (\psi - \theta)_C & (\psi - \theta)_B &= (\psi - \theta)_D \end{aligned} \right\} \quad (5.40)$$

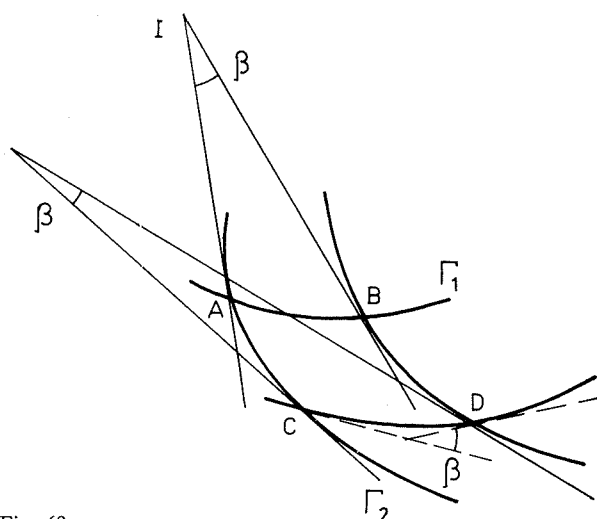


Fig. 69.

ou :

$$\left. \begin{aligned} (\psi + \theta)_A + (\psi - \theta)_B &= \\ (\psi + \theta)_B + (\psi - \theta)_D &= \\ (\psi - \theta)_A + (\psi + \theta)_C &= \\ (\psi - \theta)_C + (\psi + \theta)_D &= \end{aligned} \right\} \quad (5.41)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \psi_A - \psi_D &= 2\theta_B - \theta_A - \theta_D = \\ &= -2\theta_C + \theta_A + \theta_D \end{aligned} \quad (5.42)$$

On en tire finalement la relation suivante due à Hencky :

$$\beta = \theta_B - \theta_A = \theta_D - \theta_C \quad (5.43)$$

Des équations (5.37), on peut écrire aussi :

$$\left. \begin{aligned} (\psi + \theta)_A - (\psi - \theta)_B &= \\ (\psi + \theta)_B - (\psi - \theta)_D &= \\ (\psi + \theta)_C - (\psi - \theta)_A &= \\ (\psi + \theta)_D - (\psi - \theta)_C &= \end{aligned} \right\} \quad (5.44)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \theta_A - \theta_D &= 2\psi_B - \psi_A - \psi_D = \\ &= -2\psi_C + \psi_A + \psi_D \end{aligned} \quad (4.45)$$

On obtient cette deuxième relation

$$\psi_B - \psi_A = \psi_D - \psi_C \quad (5.46)$$

5.52. Deuxième cas : une seule des deux fonctions h_i est constante

Supposons que $h_1(u_2)$ soit constante dans tout le massif. On a alors en tout point de celui-ci :

$$\psi + \theta = C^{\text{te}} \quad (5.47)$$

Or, le long d'une l.c. Γ_2 donnée, on a :

$$\psi - \theta = h_2(u_1) = C^{\text{te}} \text{ sur } \Gamma_2 \quad (5.48)$$

En comparant les équations (5.47) et (5.48), on déduit que θ reste constant tout le long de cette ligne Γ_2 dont l'équation est :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg}(\theta - \mu) = C^{\text{te}} \quad (5.49)$$

C'est donc une droite.

En conséquence, les lignes Γ_2 constituent une famille de droites dont l'équation générale, dépendant du paramètre θ , est de la forme :

$$x_2 = x_1 \operatorname{tg}(\theta - \mu) + k(\theta) \quad (5.50)$$

Pour avoir l'enveloppe E de cette famille de droites, dérivons l'équation (5.50) par rapport au paramètre θ . On obtient :

$$0 = \frac{x_1}{\cos^2(\theta - \mu)} + k'(\theta) \quad (5.51)$$

d'où :

$$x_1 = -k'(\theta) \cdot \cos^2(\theta - \mu) \quad (5.52)$$

En portant cette valeur dans l'équation (5.50), on trouve :

$$x_2 = -\frac{1}{2} k'(\theta) \sin 2(\theta - \mu) + k(\theta) \quad (5.53)$$

Les expressions (5.52) et (5.53) constituent les équations paramétriques de l'enveloppe E (fig. 70).

Considérons deux droites (Γ_2, Γ_2') infiniment rapprochées et interceptant deux lignes quelconques Γ_1 et Γ_1' de la première famille. On a :

$$\left. \begin{aligned} CC' &= rd\theta \\ \cotg 2\mu &= \operatorname{tg} \varphi = \frac{B'C'}{CC'} = \frac{dr}{rd\theta} \end{aligned} \right\} \quad (5.54)$$

5.55. Propriétés complémentaires

5.551. Si un segment quelconque AB d'une l.c. de la famille Γ_1 est une droite, tous les segments CD des lignes de cette même famille compris entre les deux mêmes l.c. (Γ_2 et Γ_2') de la deuxième famille sont aussi des droites (fig. 75).

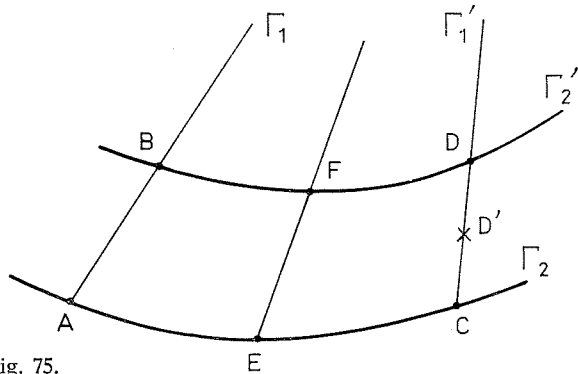


Fig. 75.

En effet : sur le segment rectiligne AB de Γ_1 , les paramètres ψ et θ sont constants

$$\psi_A = \psi_B \quad \theta_A = \theta_B \quad (5.61)$$

Le long des lignes caractéristiques Γ_2 et Γ_2' , on a respectivement :

$$\left. \begin{aligned} \psi_A - \theta_A &= \psi_C - \theta_C \\ \psi_B - \theta_B &= \psi_D - \theta_D = \psi_C - \theta_C \end{aligned} \right\} \quad (5.62)$$

Sur CD de Γ_1' , on a aussi :

$$\psi_D + \theta_D = \psi_C + \theta_C \quad (5.63)$$

En comparant les deux dernières relations, on constate que

$$\theta_D = \theta_C \quad \psi_D = \psi_C \quad (5.64)$$

Ce résultat est valable pour tout point intermédiaire D' situé sur CD. Par conséquent, les paramètres ψ et θ sont constants sur CD.

Donc CD est un segment de droite.

5.552. Deux équilibres se raccordant suivant une l.c. rectiligne ne peuvent être qu'homogènes ou semi-homogènes.

Soient deux équilibres limites distincts régnant dans les zones I et II et se raccordant entre eux le long d'une droite caractéristique Γ_1 (fig. 76).

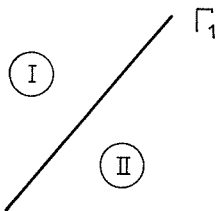


Fig. 76.

D'après le paragraphe 5.54, la l.c. Γ_1 étant commune aux deux équilibres, il en résulte que l'on ne peut avoir en (I) et en (II) qu'un équilibre homogène ou semi-homogène.

5.56. Variation de la courbure d'une ligne caractéristique

Reprenons le paragraphe 5.51. Supposons que AC et BD appartiennent à deux lignes Γ_2 infiniment rapprochées et que la famille des l.c. Γ_2 admettent une enveloppe E (fig. 77).

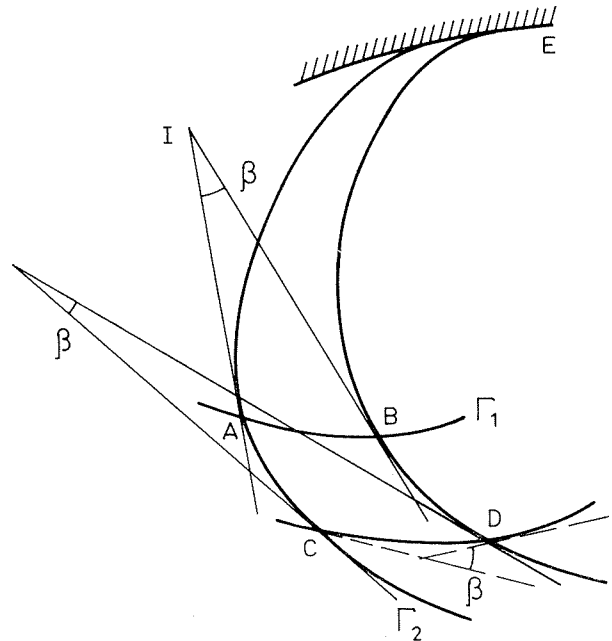


Fig. 77.

L'arc AB étant infiniment petit, on a de l'équation (5.3) :

$$R_1 = \frac{AB}{\beta}$$

Au fur et à mesure que l'on se rapproche de l'enveloppe E, la longueur de AB tend vers zéro, mais β reste constant. Donc, le rayon de courbure R_1 devient nul et l'on a un point de rebroussement de Γ_2 sur E.

6. Superposition de différentes solutions d'équilibre limite

6.1. Préliminaire

Dans le cas général, l'intégration des équations de Kötter ne peut se faire que par utilisation d'un ordinateur et par application de la méthode des différences finies, par exemple. Pratiquement, il n'est pas possible d'effectuer un tel calcul chaque fois qu'on a à étudier un problème particulier (fondation, mur de soutènement,...). C'est la raison pour laquelle on a été amené à tourner cette difficulté en procédant à une superposition de différentes solutions élémentaires d'équilibre limite.

Il est bien évident que cette manière de procéder n'est pas exacte sur le plan théorique. En effet, la superposition n'est possible que dans le cas de l'élasticité linéaire, ce qui n'est nullement le cas du problème qui nous préoccupe. La question consiste à savoir de quel côté de la sécurité se situe la solution approchée ainsi obtenue.

6.2. Examen général du problème

Considérons (fig. 78) un corps en état d'équilibre limite sous l'action d'un système de chargement $\vec{S}'$. Soit $\vec{\sigma}'_1$ la contrainte principale majeure en un point P de celui-ci. Elle représente la contrainte agissant sur l'élément de surface ds de normale $\vec{n}$ dirigée suivant $\vec{\sigma}'_1$ (fig. 79). Dans le plan de Mohr, désignons par I' le centre du cercle correspondant et par η' son abscisse (fig. 80).

Considérons un deuxième état de chargement $\vec{S}''$ mettant le milieu aussi en état d'équilibre limite. Il lui correspond une contrainte principale majeure $\vec{\sigma}''_1$

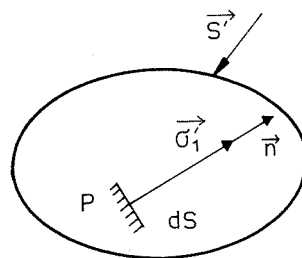


Fig. 78.

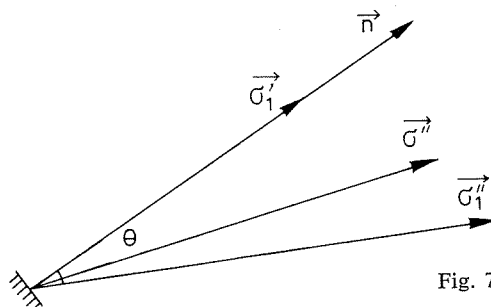


Fig. 79.

au point P et une contrainte $\vec{\sigma}''$ agissant sur ds . Soit θ l'angle entre $\vec{\sigma}'_1$ et $\vec{\sigma}''_1$.

Supposons maintenant que le milieu soit soumis au système de chargement $\vec{S} = \vec{S}' + \vec{S}''$. La superposition des deux répartitions de contraintes relatives aux chargements $\vec{S}'$ et $\vec{S}''$ pris séparément donne une solution statiquement possible. Elle vérifie simultanément toutes les équations d'équilibre au sein du milieu et sur son contour.

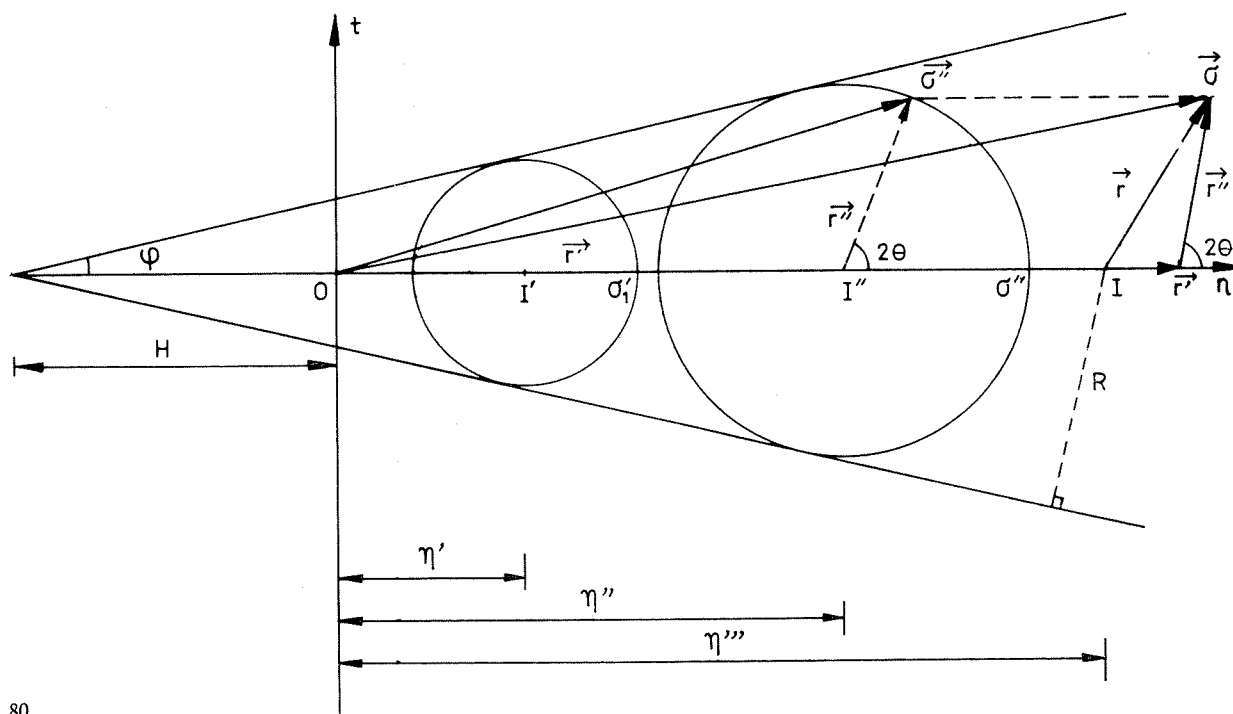


Fig. 80.

Examinons au point P ce problème de superposition. La valeur de la contrainte résultante $\vec{\sigma}$ agissant sur ds est :

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}' + \vec{\sigma}'' \quad (6.5)$$

Or, on a :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}' &= \overrightarrow{OI'} + \vec{r}' \\ \vec{\sigma}'' &= \overrightarrow{OI''} + \vec{r}'' \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= \overrightarrow{OI'} + \vec{r}' + \overrightarrow{OI''} + \vec{r}'' \\ &= \overrightarrow{OI} + \vec{r} \end{aligned} \quad (6.6)$$

où I désigne le centre du cercle de Mohr et r son rayon :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OI} &= \overrightarrow{OI'} + \overrightarrow{OI''} \quad \text{ou} \quad \eta = \eta' + \eta'' \\ \vec{r} &= \vec{r}' + \vec{r}'' \end{aligned} \quad (6.7)$$

D'où :

$$\begin{aligned} r^2 &= (r')^2 + (r'')^2 + 2 r' r'' \cos 2\theta \\ &= [(H + \eta')^2 + (H + \eta'')^2 + \\ &\quad + 2 (H + \eta') (H + \eta'') \cos 2\theta] \sin^2 \varphi \end{aligned} \quad (6.8)$$

La distance R du centre I à la droite de Coulomb est donnée par :

$$R = (OI + H) \sin \varphi = (\eta + H) \sin \varphi \quad (6.9)$$

Trois cas peuvent se présenter :

a) *En tout point du milieu* : $r \leq R$.

Donc tous les cercles de Mohr sont situés à l'intérieur des deux droites de Coulomb. La superposition donne alors une solution approchée située du côté de la sécurité.

b) *En tout point du milieu* : $r = R$.

Les cercles de Mohr résultants sont alors tangents aux deux droites de Coulomb. La superposition donne, dans ce cas, la solution exacte du problème.

c) *En un ou plusieurs points du milieu* : $r \geq R$.

En ces points le cercle de Mohr résultant coupe les deux droites de Coulomb. La solution obtenue par superposition est donc inadmissible.

En résumé, la condition nécessaire et suffisante pour que la superposition donne une solution statiquement admissible est :

$$r \leq R \quad (6.10)$$

6.3. Cas des milieux pulvérulents

Pour un milieu pulvérulent, on a :

$$C = H = 0 \quad (6.11)$$

Les équations (6.4) et (6.5) donnent respectivement :

$$\begin{aligned} r^2 &= [(\eta')^2 + (\eta'')^2 + 2 \eta' \eta'' \cos 2\theta] \sin^2 \varphi \\ R^2 &= \eta^2 \sin^2 \varphi = (\eta' + \eta'')^2 \sin^2 \varphi \end{aligned} \quad (6.12)$$

d'où :

$$R^2 - r^2 = 2 \eta' \eta'' (1 - \cos 2\theta) \sin^2 \varphi \geq 0 \quad (6.13)$$

On voit qu'en général :

$$R \geq r.$$

Donc la superposition de deux solutions d'équilibre limite, pour un milieu pulvérulent, donne une solution surabondante située du côté de la sécurité.

Dans le cas particulier où l'on a en tout point $\theta = 0$, c'est-à-dire si les deux solutions admettent dans tout le milieu la même direction pour les contraintes

principales, et en conséquence les mêmes lignes de glissement, il résulte alors de l'équation (6.13) :

$$R = r.$$

Donc, la solution obtenue par superposition constitue, dans ce cas, la solution exacte du milieu en état d'équilibre limite.

6.4. Cas des milieux purement cohérents

Un milieu purement cohérent est caractérisé par le fait que le rayon du cercle de Mohr du milieu en état d'équilibre limite est égal à la cohésion (fig. 81).

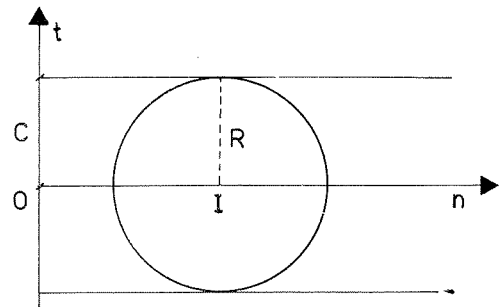


Fig. 81.

On a donc :

$$R = r' = r'' = C \quad (6.14)$$

L'équation (6.8) donne alors :

$$r^2 = 2 C^2 (1 + \cos 2\theta) = 4 C^2 \cos^2 \theta$$

ou :

$$r = 2 C \cos \theta$$

La condition $R \geq r$ pour que la superposition donne une solution surabondante entraîne :

$$C \geq 2 C \cos \theta$$

Cette inégalité ne peut être réalisée que si :

$$\cos \theta \leq \frac{1}{2}$$

ou :

$$|\theta| \geq \frac{\pi}{3} \quad (6.15)$$

En résumé, la superposition de deux solutions d'équilibre limite donne une solution surabondante, c'est-à-dire du côté de la sécurité, si celles-ci admettent en tout point du milieu des directions principales faisant entre elles un angle θ vérifiant l'inégalité (6.15). En particulier, si les deux solutions admettent les mêmes lignes de glissement ($\theta = 0$), la superposition donne alors une solution inadmissible.

Dans le cas particulier où l'on a en tout point $\theta = \frac{\pi}{3}$, la superposition donne alors la solution exacte du milieu en état d'équilibre limite.

6.5. Cas des milieux cohérents

Pour de tels milieux, la superposition ne peut donner une solution admissible que si la condition $R \geq r$ est vérifiée en tout point du milieu. Comme on peut le constater, une telle vérification n'est pas aisée à effectuer pratiquement.

On peut contourner cette difficulté en ayant recours à l'un des deux théorèmes donnés ci-après.

6.6. Théorème des états correspondants de Caquot

D'après ce théorème (voir paragraphe 1.4), on peut faire correspondre à un milieu cohérent (φ , C) un milieu pulvérulent (φ) soumis sur son contour à une pression hydrostatatique H (fig. 82). Or, pour ce « milieu pulvérulent correspondant », on peut superposer différentes solutions d'équilibre limite. La solution résultante est, d'après le paragraphe (6.3), certainement surabondante et de ce fait du côté de la sécurité.

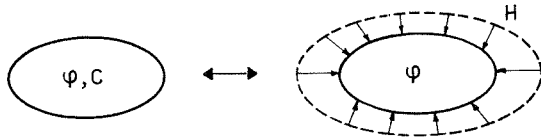


Fig. 82.

6.7. Nouveau théorème sur la superposition

Considérons le cas d'un milieu cohérent et reprenons l'étude du paragraphe 6.2.

Sous l'action du premier système de charge $\vec{S}'$, le milieu cohérent est en état d'équilibre limite et l'on a :

$$r' = (H + \eta') \sin \varphi \quad (6.16)$$

Sous l'action du deuxième cas de charge $\vec{S}''$, on suppose que le milieu est dépourvu de cohésion et en état d'équilibre limite. On a cette fois-ci :

$$r' = \eta'' \sin \varphi \quad (6.17)$$

La superposition de ces deux solutions donne une solution caractérisée par (fig. 83) :

- Le centre I du cercle de Mohr résultant : $OI = \eta' + \eta''$ (6.18)

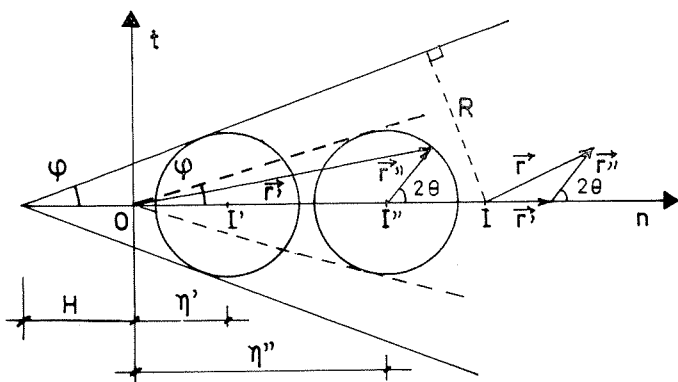


Fig. 83.

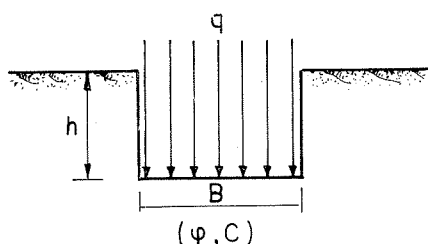


Fig. 84.

- Le rayon r du cercle correspondant :

$$r^2 = [(\eta' + H)^2 + (\eta'')^2 + 2(\eta' + H)\eta'' \cos 2\theta] \sin^2 \varphi \quad (6.19)$$

Or,

$$\begin{aligned} R^2 &= (\eta' + \eta'' + H)^2 \sin^2 \varphi = \\ &= [(\eta' + H)^2 + (\eta'')^2 + 2(\eta' + H)\eta''] \sin^2 \varphi \end{aligned} \quad (6.20)$$

La comparaison de ces deux dernières expressions montre bien qu'on a toujours :

$$r \leq R.$$

En conséquence, nous proposons le théorème suivant :

La superposition de deux solutions d'équilibre limite, dont la première est relative au milieu réel cohérent et la seconde concerne le milieu pulvérulent correspondant, donne une solution surabondante située du côté de la sécurité.

En particulier, si l'on a en tout point du milieu $\theta = 0$, la superposition donne la solution exacte du problème ($r = R$).

Sur le plan pratique, on a souvent intérêt à procéder de la manière suivante :

- 1) Trouver une première solution du problème dans l'hypothèse d'un milieu cohérent non pesant et soumis aux charges réelles appliquées sur le contour.
- 2) Trouver une deuxième solution dans l'hypothèse d'un milieu pulvérulent soumis uniquement à son poids propre. En ce sens, diverses tables numériques existent déjà pour les problèmes courants (fondations semi-enterrées, poussée et butée, ...).

La superposition de ces deux solutions donne une solution approchée du milieu cohérent soumis simultanément à l'ensemble de ses charges. Cette solution est certainement du côté de la sécurité.

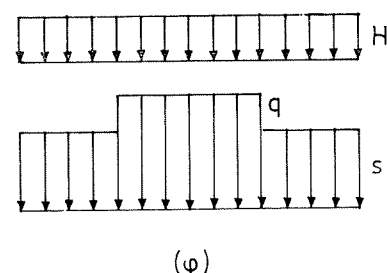
Examinons successivement les deux applications suivantes :

- fondations semi-enterrées ;
- poussée des terres.

6.8. Fondations semi-enterrées

Considérons une fondation de largeur B ancrée d'une profondeur h dans un sol cohérent. La solution exacte de ce problème nécessite, dans chaque cas particulier, l'utilisation de l'ordinateur.

On assimile le poids des terres (γh) situées de part et d'autre de la fondation à une surcharge uniformément répartie ($s = \gamma h$). De même, d'après le théorème des états correspondants, on assimile le sol cohérent à un milieu pulvérulent soumis sur toute l'étendue de sa surface à une pression hydrostatatique H. Les charges en présence sont alors (fig. 84) :



- le poids propre du milieu de densité γ ;
- les charges fictives :
 $q_1 = q + H$
 $q_2 = s + H$.

Considérons les deux solutions partielles suivantes :

- 1) La charge de poinçonnement q_1' d'une fonction superficielle agissant sur un sol pulvérulent de densité γ , est donnée par la relation :

$$q_1' = \frac{1}{2} B \gamma N_r \quad (6.21)$$

où N_r est le terme de surface.

- 2) La charge de poinçonnement q_1'' d'une fondation agissant sur un sol pulvérulent non pesant, compte tenu de la présence d'une surcharge q_2 agissant de part et d'autre de celle-ci, est obtenue à partir de la relation (3.23) :

$$q_1'' = b q_2$$

où b est un coefficient qui dépend de φ .

Par superposition des deux cas précédents, on peut écrire :

$$q_1 = q_1' + q_1'' = \frac{1}{2} B \gamma N_r + b q_2 \quad (6.22)$$

Remplaçons q_1 et q_2 par leurs valeurs. On trouve alors :

$$q + H = \frac{1}{2} B \gamma N_r + b (\gamma h + H)$$

d'où :

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2} B \gamma N_r + \gamma h b + H (b - 1) \\ &= \frac{1}{2} B \gamma N_r + \gamma h N_q + C N_c \end{aligned} \quad (6.23)$$

où l'on a posé :

$$N_q = b \quad N_c = \frac{b - 1}{\tan \varphi} \quad (6.24)$$

On retrouve ainsi l'expression pratique utilisée pour les fondations semi-enterrées. Celle-ci étant obtenue par superposition de deux solutions d'équilibre limite ($q_1 = q_1' + q_1''$), elle est donc approchée et elle est du côté de la sécurité.

L'application du théorème sur la superposition (paragraphe 6.7) donne dans le cas des fondations semi-enterrées le même résultat que celui sur les états correspondants.

6.9. Poussée des terres

Considérons (fig. 85) un mur de soutènement retenant un remblai cohérent (γ, φ, C) et de pente β . On suppose que la paroi OA du mur est lisse et verticale et que

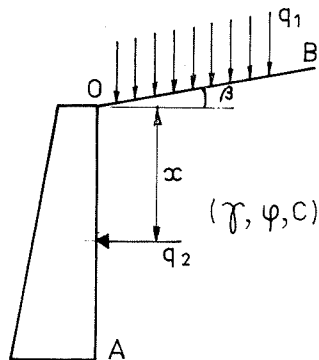


Fig. 85.

le talus OB est soumis à une charge uniformément répartie q_1 . On se propose de déterminer la poussée q_2 agissant normalement sur OA.

La solution exacte du problème ne peut être obtenue que par intégration des équations de Kötter sur ordinateur. On peut obtenir une solution approchée en procédant de diverses manières. Examinons en particulier les méthodes suivantes :

6.91. Première méthode : par superposition directe

On calcule séparément les pressions q_1' et q_2'' dues respectivement au poids propre γ du milieu et à la charge uniformément répartie q_1 . La superposition de ces deux solutions partielles donne :

$$q_2 = q_2' + q_2'' \quad (6.25)$$

A priori, cette solution est inacceptable si elle n'est pas justifiée. En effet, le milieu étant cohérent, la superposition risquerait de ne pas vérifier le critère (6.10) en tout point du massif.

6.92. Deuxième méthode : application du théorème des états correspondants

D'après ce théorème, on assimile le sol à un milieu pulvérulent soumis sur tout son contour AOB à une charge hydrostatique H . Le problème revient alors à examiner successivement les différentes solutions partielles suivantes :

- 1) Pression q_2' due au poids propre :

$$q_2' = \gamma p' x \quad (6.26)$$

où p' est le coefficient de poussée donné par les tables de Caquot et Kérisel [11] et x l'abscisse d'un point courant du parement OA.

Cette répartition de pression est représentée par la droite I dans le diagramme des poussées de la figure 86.

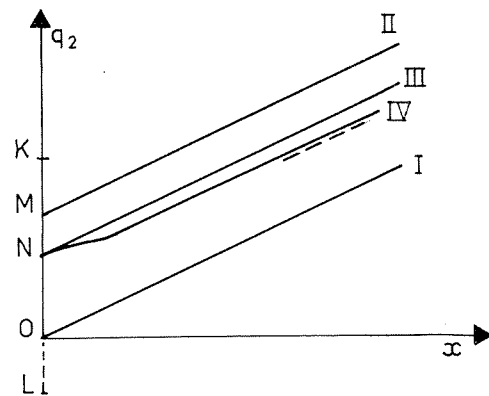


Fig. 86.

- 2) Pression $q_2'' = p'' q_1$ (6.27)

où p'' est un coefficient tiré des Tables L'Hermier et Absi [6] et [7]. Il est défini par :

$$\alpha_1 = -i \quad \alpha_2 = 0 \quad \Omega = \widehat{AOB}.$$

C'est une pression constante tout le long de OA. Elle est désignée par le point K sur le diagramme de la figure 86.

- 3) Pression négative q_2''' due à la pression hydrostatique H agissant sur tout le contour AOB (fig. 87) :

$$q_2''' = p''' H - H = -H (1 - p''') \quad (6.28)$$

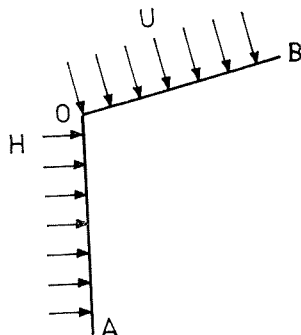


Fig. 87.

Dans cette expression, le coefficient p''' a même signification que p'' et il est défini par :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad \Omega = \widehat{AOB}.$$

La valeur de q''' est indiquée par le point L sur le diagramme des poussées de la figure 86.

Par superposition, on trouve :

$$q_2 = q_2' + q_2'' + q_2''' = \gamma p' x + p'' q_1 - H(1 - p''') \quad (6.29)$$

C'est une répartition linéaire représentée par la droite II sur le diagramme des poussées. Au sommet O, la poussée est donnée par l'ordonnée du point M définie par :

$$KM = OL \quad (6.30)$$

6.93. Troisième méthode : application du théorème sur la superposition

L'application de ce théorème revient à superposer les deux états d'équilibre limite suivants :

Premier état

Le milieu est supposé pulvérulent. Son poids propre exerce une pression q_2' sur la paroi OA donnée par la relation (6.26) :

$$q_2' = \gamma p' x.$$

Deuxième état

Le milieu étant cohérent, la surcharge q_1 exerce sur la paroi OA une pression q_2'' qu'on peut déterminer à partir de l'étude des milieux non pesants.

Comme on peut le vérifier q_2'' est constante. Elle est désignée sur le diagramme des poussées par le point N qui est toujours situé entre O et M.

En conséquence, la superposition :

$$q_2 = q_2' + q_2'' = \gamma p' x + q_2'' \quad (6.31)$$

donne une répartition linéaire représentée par une droite III située entre I et II sur le diagramme de la figure 86.

Cette solution est plus proche de la poussée réelle que celle obtenue à partir du théorème des états correspondants. Elle est située évidemment du côté de la sécurité.

6.94. Solution exacte du problème

Au voisinage du sommet O, l'effet du poids propre est un infiniment petit du second ordre. La pression en ce point est due pratiquement à la surcharge q_1 . Le diagramme réel IV de la poussée part donc du point N. Au fur et à mesure qu'on s'en éloigne, l'effet du poids propre augmente progressivement. Cependant, le diagramme restera toujours au-dessous de la droite III, étant donné que cette dernière représente une solution surabondante. Quand x tend vers l'infini, l'effet du poids propre devient prépondérant par rapport à celui de la cohésion et de la surcharge q . En conséquence, le diagramme réel IV admet une asymptote parallèle à la droite I.

6.10. Exemple : poussée sur un écran en cas d'un milieu purement cohérent

La surface horizontale OA du massif est soumise à une charge uniforme q_1 . On se propose de déterminer la poussée des terres sur l'écran vertical OB supposé lisse (fig. 88).

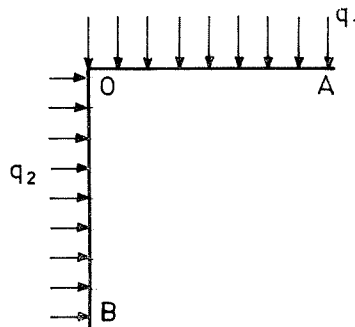


Fig. 88.

Solution directe

Pour cela, appliquons l'équation (4.30) avec $\Omega = \frac{\pi}{2}$

On trouve :

$$q_2 = q_1 - 2C + \gamma x_1 \quad (6.32)$$

Par superposition

- Action du poids propre seul ($q_1 = 0$).

De l'expression (6.32) on obtient :

$$q_2' = -2C + \gamma x_1 \quad (6.33)$$

- Action de la surcharge seule ($\gamma = 0$).

$$q_2'' = q_1 - 2C \quad (6.34)$$

Ces deux solutions partielles admettent les mêmes l.c. et leur superposition donne :

$$q_2 = q_2' + q_2'' = q_1 - 4C + \gamma x_1 \quad (6.35)$$

La comparaison entre les équations (6.32) et (6.35) montre que la superposition conduit à un résultat approché inférieur à la valeur réelle. On a donc une solution qui n'est pas du côté de la sécurité.

7. Stabilité des talus

7.1. Equilibre de Rankine

7.1.1. Examen général

Soit un talus infini de pente constante i formé par un sol pulvérulent (γ, φ).

La contrainte agissant sur un élément de surface parallèle au talus et situé à une profondeur h , par raison de symétrie, a pour valeur (fig. 89)

$$q = \gamma h \cos i \quad (7.1)$$

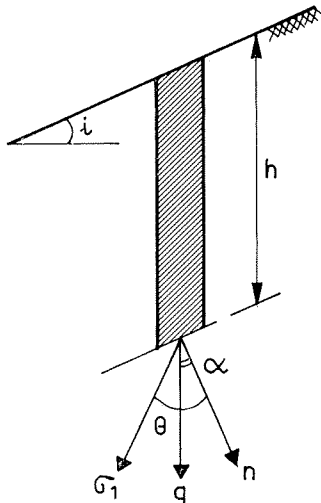


Fig. 89.

A cette valeur de q correspond, dans le plan de Mohr, deux cercles de centre I_1 et I_2 suivant qu'il s'agit d'un équilibre inférieur ou supérieur (fig. 90).

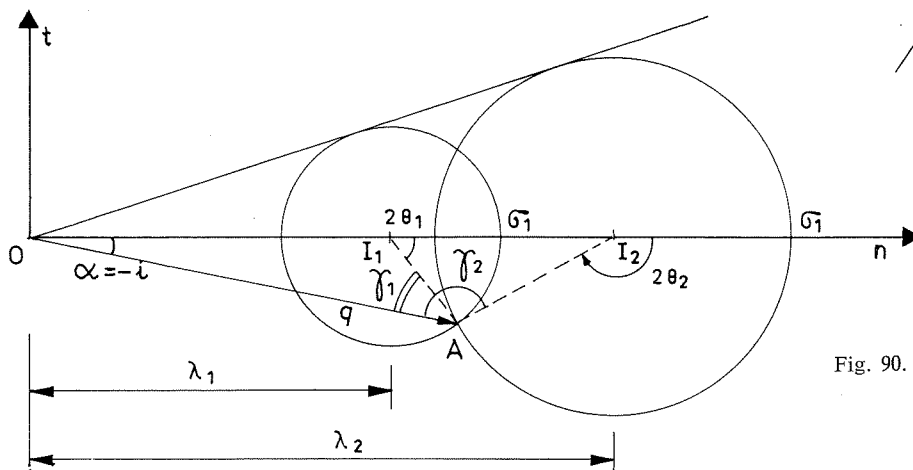


Fig. 90.

On en tire aussi :

$$q = \gamma h \cos i = \lambda (\cos i + \sin \varphi \cos \gamma) \quad (7.2)$$

Du triangle OIA, on a :

$$\frac{OI}{\sin \gamma} = \frac{IA}{\sin \alpha} \quad (7.3)$$

D'où :

$$\sin \gamma = \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} = - \frac{\sin i}{\sin \varphi} \quad (7.4)$$

De l'équation (7.2), on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\gamma h \cos i}{\cos i + \sin \varphi \cos \gamma} = \\ &= \frac{\gamma h \cos i}{\cos i + \varepsilon \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 i}} \end{aligned} \quad (7.5)$$

où :

$\varepsilon = +1$: équilibre inférieur ;

$\varepsilon = -1$: équilibre supérieur.

On voit que la contrainte principale σ_1 fait avec la normale au talus un angle constant de valeur :

$$\theta = \frac{1}{2} (\alpha + \gamma) = C^{\text{te}} \quad (7.6)$$

7.1.2. En résumé

L'état d'équilibre limite relatif à un talus infini dans un milieu pulvérulent est celui de Rankine.

Le paramètre λ ainsi que le tenseur de contraintes σ_{ij} augmentent linéairement avec la profondeur h .

La direction de σ_1 étant constante dans tout le massif, il en résulte que les lignes caractéristiques sont constituées par deux familles de droites parallèles.

Les figures 91 a et 91 b représentent respectivement les deux états d'équilibre inférieur et supérieur.

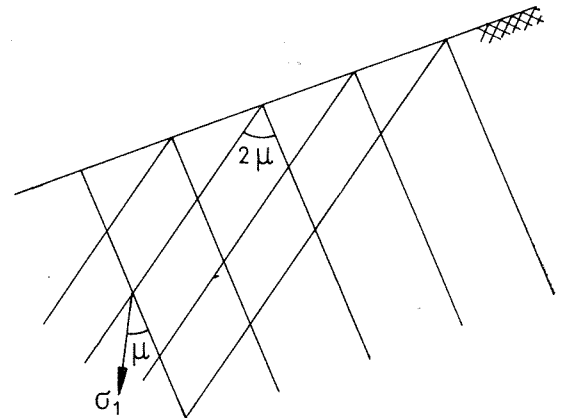


Fig. 91 a.

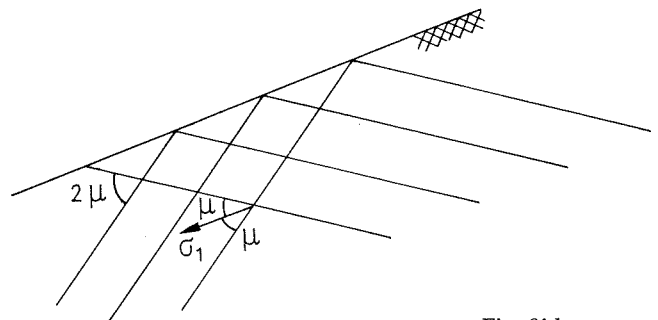


Fig. 91 b.

La valeur de θ peut être obtenue de l'expression (7.4) en remarquant que :

$$\alpha = -i \quad \gamma = 2\theta - \alpha = 2\theta + i \quad (7.7)$$

On obtient alors la relation :

$$\sin i + \sin \varphi \cdot \sin (2\theta + i) = 0 \quad (7.8)$$

7.13. Utilisation des coordonnées polaires

Soit ψ l'angle que fait σ_1 avec le rayon vecteur en un point A (r, ω) quelconque du massif (fig. 92).

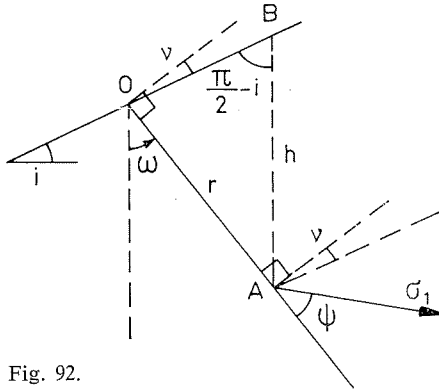


Fig. 92.

Du triangle OAB, on a :

$$\frac{h}{\cos v} = \frac{r}{\cos i}$$

où v est l'angle que fait le talus avec la normale à OA

$$v = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} + i - \omega \right) = \omega - i \quad (7.9)$$

D'où :

$$h = r \frac{\cos(\omega - i)}{\cos i} \quad (7.10)$$

Pour avoir la loi de variation de λ en fonction de (r, ω), il suffit de porter cette expression dans l'équation (7.5). On trouve alors :

$$\lambda = \gamma r \frac{\cos(\omega - i)}{\cos i + \sin \varphi \cos \gamma} = \gamma r g(\omega) \quad (7.11)$$

où :

$$g(\omega) = \frac{\cos(\omega - i)}{\cos i + \sin \varphi \cos \gamma} \quad (7.12)$$

7.14. Cas où $i = \varphi$

Les deux états d'équilibre, supérieur et inférieur, se confondent en un seul et l'on a (fig. 93) :

$$\begin{aligned} \alpha &= -i = -\varphi & \gamma &= -\frac{\pi}{2} \\ \lambda &= \gamma h \\ 2\theta &= \alpha + \gamma = -\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned} \quad (7.13)$$

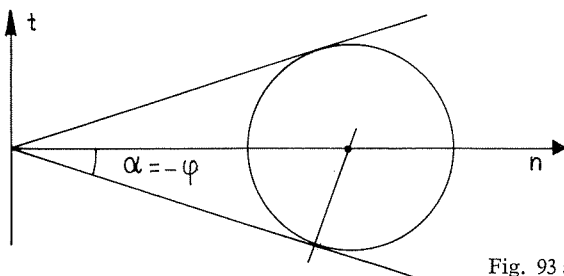


Fig. 93 a.

En conséquence, on trouve pour les l.c. :

- de la première famille Γ_1 :

$$\begin{aligned} \theta + \mu &= -\frac{1}{2} \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = -\varphi \end{aligned}$$

Les lignes Γ_1 sont donc des droites verticales ;

- de la deuxième famille Γ_2 :

$$\theta - \mu = -\frac{\pi}{2}$$

Les lignes Γ_2 sont des droites parallèles à la surface du talus.

7.2. Stabilité des talus infinis

Soit un talus infini de pente constante i en état d'équilibre limite sous l'action de son poids propre γ et d'un chargement uniforme (p, t) agissant à la surface (fig. 94). La répartition des contraintes étant indépendante de x_2 , les équations d'équilibre deviennent alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} &= \gamma \cos i \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} &= -\gamma \sin i \end{aligned} \quad (7.14)$$

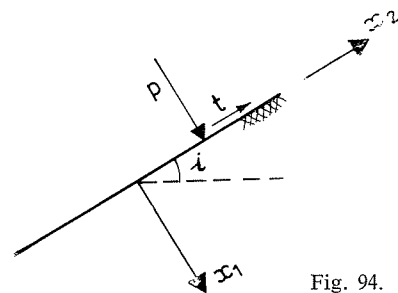


Fig. 94.

Par intégration, on trouve compte tenu du chargement (p, t) et en faisant appel au cercle de Mohr (fig. 95).

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \gamma x_1 \cos i + p = \\ &= \lambda (1 + \sin \varphi \cos 2\theta) - H \\ \sigma_{12} &= -\gamma x_1 \sin i + t = \\ &= \lambda \sin \varphi \sin 2\theta \\ \sigma_{22} &= \lambda (1 - \sin \varphi \cos 2\theta) - H \end{aligned} \quad (7.15)$$

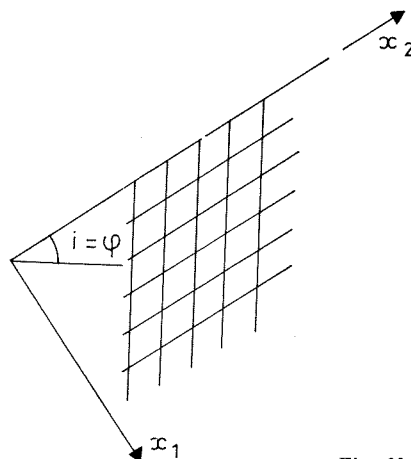


Fig. 93 b.

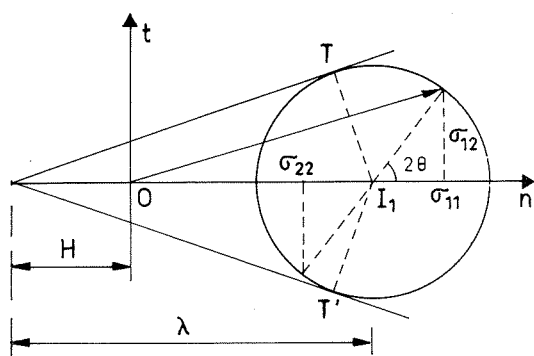


Fig. 95.

7.21. Discussion générale

On voit qu'il existe un plan principal pour lequel $\sigma_{12} = 0$. Il est défini par son abscisse :

$$(x_1)_o = \frac{t}{\gamma \sin i} \quad (7.16)$$

Posons :

$$t = (p + H) \cdot \operatorname{tg} \delta \quad |\delta| \leq \varphi \quad (7.17)$$

Des équations (7.15), on tire alors :

$$\lambda = \frac{p + H}{\cos \delta} \cdot \frac{\sin(i + \delta)}{\sin i + \sin \varphi \sin(2\theta + i)} \quad (7.18)$$

$$x_1 = \frac{p + H}{\gamma \cos \delta} \cdot \frac{\sin \delta - \sin \varphi \sin(2\theta - \delta)}{\sin i + \sin \varphi \sin(2\theta + i)} \quad (7.19)$$

Les lignes caractéristiques sont définies par l'équation :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg}(\theta \pm \mu) \quad (7.20)$$

Or, de l'équation (7.19) on a :

$$\frac{dx_1}{d\theta} = -2 \frac{p + H}{\gamma \cos \delta} \sin \varphi \frac{(\sin \varphi + \cos 2\theta) \sin(i + \delta)}{[\sin i + \sin \varphi \sin(2\theta + i)]^2} \quad (7.21)$$

D'où

$$\frac{dx_2}{d\theta} = \frac{dx_1}{d\theta} \cdot \operatorname{tg}(\theta \pm \mu) \quad (7.22)$$

On trouve par intégration :

$$x_2 = -2 \frac{p + H}{\gamma} \cdot \frac{\sin \varphi \sin(i + \delta)}{\cos \delta} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{(\sin \varphi + \cos 2\theta) \operatorname{tg}(\theta \pm \mu)}{[\sin i + \sin \varphi \sin(2\theta + i)]^2} d\theta + a \quad (7.23)$$

où (fig. 96) :

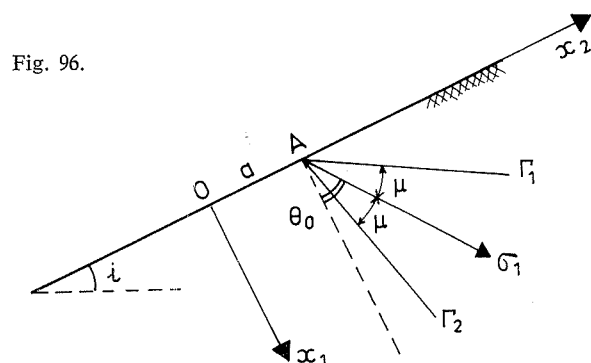
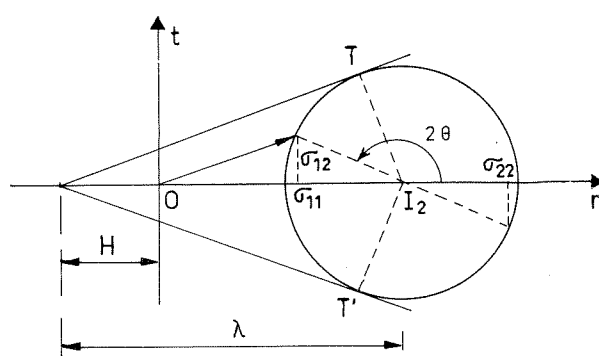


Fig. 96.



• θ : l'angle que fait σ_1 en un point avec x_1 ;

• θ_0 : la valeur prise par θ le long du talus ($x_1 = 0$) et dont la valeur est définie à partir des équations (7.15) :

$$t = \lambda \sin \varphi \sin 2\theta_0 \quad (7.24)$$

• a : ordonnée (x_2) du point d'intersection de la ligne de glissement avec le talus

$$a = OA \quad (7.25)$$

Toutes les lignes de glissement sont identiques et se déduisent les unes des autres par simple translation suivant Ox_2 .

7.22. Etats d'équilibre

Deux états d'équilibre sont à considérer.

• Un état d'équilibre inférieur (ou de poussée) pour lequel on a partout dans le massif (fig. 95 a) :

$$\left. \begin{aligned} -\left(\frac{2}{\pi} + \varphi\right) \leq 2\theta \leq \frac{\pi}{2} + \varphi \\ \sigma_{11} > \sigma_{22} \end{aligned} \right\} \quad (7.26)$$

• Un état d'équilibre supérieur (ou de butée) pour lequel on a (fig. 95 b) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi}{2} + \varphi \leq 2\theta \leq 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \\ \sigma_{22} > \sigma_{11} \end{aligned} \right\} \quad (7.27)$$

7.23. Analyse des lignes de glissement

D'après le critère de Coulomb, nous devons avoir :

$$|\sigma_{12}| \leq (\sigma_{11} + H) \operatorname{tg} \varphi \quad (7.28)$$

Etudions la variation du rapport y ci-après en fonction de x_1 :

$$\begin{aligned} -\operatorname{tg} \varphi \leq y = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11} + H} &= \frac{-\gamma x_1 \sin i + t}{\gamma x_1 \cos i + p + H} = \\ &= \frac{\sin \varphi \sin 2\theta}{1 + \sin \varphi \cos 2\theta} \leq \operatorname{tg} \varphi \end{aligned} \quad (7.29)$$

C'est une hyperbole équilatère dont les principaux points sont (fig. 97) :

$$x_1'' = \frac{p + H}{\gamma \cos \delta} \cdot \frac{\sin(\delta - \varphi)}{\sin(i + \varphi)} \leq 0$$

$$x_1' = h = \frac{p + H}{\gamma \cos \delta} \cdot \frac{\sin(\delta + \varphi)}{\sin(i - \varphi)}$$

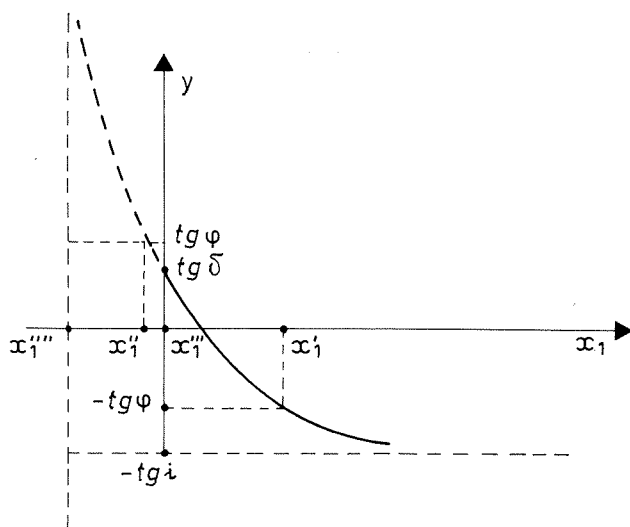


Fig. 97.

7.231. Pour $x_1 = x_1'' \leq 0$

$$y = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11} + H} = \frac{\sin \varphi \sin 2\theta}{1 + \sin \varphi \cos 2\theta} = \operatorname{tg} \varphi \quad (7.30)$$

d'où :

$$\sin 2\theta \cos \varphi = 1 + \sin \varphi \cos 2\theta \quad (7.31)$$

ou :

$$\sin (2\theta - \varphi) = 1$$

$$2\theta - \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$2\theta = \frac{\pi}{2} + \varphi \quad (7.32)$$

On constate, des équations (7.21) et (7.22), que pour cette valeur de θ , on a :

• Pour la première famille de lignes de glissement :

$$\frac{dx_1}{d\theta} = 0 \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg} (\theta + \mu) \rightarrow \infty \quad (7.33)$$

$$\frac{dx_2}{d\theta} = \frac{dx_1}{d\theta} \cdot \operatorname{tg} (\theta + \mu) = 0 \times \infty$$

Un calcul à la limite donne :

$$\frac{dx_2}{d\theta} = -2 \frac{p + H}{\gamma \cos \delta} \cdot \frac{\sin (i + \delta) \sin 2\varphi}{[\sin i + \sin \varphi \cos (\varphi + i)]^2} \quad (7.34)$$

• Pour la deuxième famille, on a :

$$\frac{dx_1}{d\theta} = 0 \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg} (\theta - \mu) = \operatorname{tg} \varphi \quad (7.35)$$

$$\frac{dx_2}{d\theta} = \frac{dx_2}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{d\theta} = 0$$

Il en résulte que le plan défini par $x_1 = x_1'' < 0$ représente une enveloppe pour la première famille de lignes de glissement et un lieu de points de rebroussement pour la deuxième famille.

7.232. Pour $i \leq \varphi$

Les lignes de glissement se prolongent à l'infini ($x_1 \rightarrow \infty$) à l'intérieur du massif et tendent asymptotiquement vers le problème de Rankine où θ est défini par la relation (7.8) :

$$\sin i + \sin \varphi \sin (2\theta + i) = 0$$

7.233. Pour $i > \varphi$

Il existe alors une certaine profondeur h pour laquelle on a :

$$h = x_1' = \frac{p + H}{\gamma \cos \delta} \cdot \frac{\sin (\delta + \varphi)}{\sin (i - \varphi)} > 0 \quad (7.36)$$

$$y = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_{11} + H} = \frac{\sin \varphi \sin 2\theta}{1 + \sin \varphi \cos 2\theta} = -\operatorname{tg} \varphi$$

d'où :

$$\sin 2\theta \cdot \cos \varphi = -(1 + \sin \varphi \cos 2\theta) \quad (7.37)$$

ou :

$$\sin (2\theta + \varphi) = -1$$

$$2\theta + \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$2\theta = -\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \quad (7.28)$$

Pour cette valeur de θ , les équations (7.21) et (7.22) conduisent à :

• pour la première famille de lignes de glissement :

$$\frac{dx_1}{d\theta} = 0 \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg} (\theta + \mu) = -\operatorname{tg} \varphi \quad (7.39)$$

$$\frac{dx_2}{d\theta} = \frac{dx_2}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{d\theta} = 0$$

• pour la deuxième famille :

$$\frac{dx_1}{d\theta} = 0 \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg} (\theta - \mu) \rightarrow \infty \quad (7.40)$$

$$\frac{dx_2}{d\theta} = \frac{dx_2}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{d\theta} \neq 0$$

En conséquence, le plan $x_1 = h$ est une enveloppe pour la deuxième famille et un lieu de points de rebroussement pour la première famille.

7.24. Equations des lignes de glissement

Reprenons les équations de base suivantes :

$$x_1 = \frac{p + H}{\gamma \cos \delta} \cdot \frac{\sin \delta - \sin \varphi \sin (2\theta - \delta)}{\sin i + \sin \varphi \sin (2\theta + i)} \quad (7.41)$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \operatorname{tg} (\theta \pm \mu) \quad \left\{ \begin{array}{l} + : 1^{\text{re}} \text{ famille} \\ - : 2^{\text{e}} \text{ famille} \end{array} \right.$$

Après une transformation adéquate, l'équation (7.41) peut se mettre sous la forme :

$$x_1 = K \frac{\cos i + \sin \varphi \cos (2\theta + i)}{\sin i + \sin \varphi \sin (2\theta + i)} + K_1 \quad (7.42)$$

où :

$$K = \frac{p + H}{\gamma \cos \delta} \cdot \sin (\delta + i) \quad (7.43)$$

$$K_1 = -\frac{p + H}{\gamma \cos \delta} \cdot \cos (\delta + i)$$

De l'équation (7.42), calculons la dérivée de x_1 :

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{d\theta} &= -2K \sin \varphi \frac{\cos 2\theta + \sin \varphi}{[\sin i + \sin \varphi \sin (2\theta + i)]^2} \\ &= -4K \sin \varphi \frac{\cos (\theta + \mu) \cos (\theta - \mu)}{[\sin i + \sin \varphi \sin (2\theta + i)]^2} \quad (7.44)\end{aligned}$$

or :

$$\frac{dx_2}{d\theta} = \frac{dx_2}{dx_1} \cdot \frac{dx_1}{d\theta} = \operatorname{tg} (\theta \pm \mu) \frac{dx_1}{d\theta} \quad (7.45)$$

On a donc :

• pour la première famille :

$$\begin{aligned}\frac{dx_2}{d\theta} &= -4K \sin \varphi \frac{\sin (\theta + \mu) \cos (\theta - \mu)}{[\sin i + \sin \varphi \sin (2\theta + i)]^2} \\ &= -2K \sin \varphi \frac{\sin 2\theta + \cos \varphi}{[\sin i + \sin \varphi \sin (2\theta + i)]^2} \\ &= -2K \sin \varphi \cdot \frac{\sin (2\theta + i) \cos i - \cos (2\theta + i) \sin i + \cos \varphi}{[\sin i + \sin \varphi \sin (2\theta + i)]^2} \quad (7.46)\end{aligned}$$

• pour la deuxième famille :

$$\begin{aligned}\frac{dx_2}{d\theta} &= -4K \sin \varphi \frac{\sin (\theta - \mu) \cos (\theta + \mu)}{[\sin i + \sin \varphi \sin (2\theta + i)]^2} \\ &= -2K \sin \varphi \frac{\sin 2\theta - \cos \varphi}{[\sin i + \sin \varphi \sin (2\theta + i)]^2} \\ &= -2K \sin \varphi \cdot \frac{\sin (2\theta + i) \cos i - \cos (2\theta + i) \sin i - \cos \varphi}{[\sin i + \sin \varphi \sin (2\theta + i)]^2} \quad (7.47)\end{aligned}$$

Trois cas sont à considérer :

7.241. Premier cas : $i > \varphi$

Effectuons le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned}\sin (2\theta + i) &= \frac{\sin i \cos \alpha - \sin \varphi}{\sin i - \sin \varphi \cos \alpha} \\ \cos (2\theta + i) &= \frac{\sin \alpha \sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \varphi}}{\sin i - \sin \varphi \cos \alpha}\end{aligned} \quad (7.48)$$

D'où :

$$\begin{aligned}2 \cos (2\theta + i) \frac{d\theta}{d\alpha} &= \\ &= \frac{-\sin i \sin \alpha (\sin i - \sin \varphi \cos \alpha)}{(\sin i - \sin \varphi \cos \alpha)^2} \\ &\quad - \frac{\sin \varphi \sin \alpha (\sin i \cos \alpha - \sin \varphi)}{(\sin i - \sin \varphi \cos \alpha)^2} \\ &= \frac{-\sin \alpha (\sin^2 i - \sin^2 \varphi)}{(\sin i - \sin \varphi \cos \alpha)^2} \quad (7.49)\end{aligned}$$

ou

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{-\sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \varphi}}{2 (\sin i - \sin \varphi \cos \alpha)} \quad (7.50)$$

Exprimons les équations des courbes caractéristiques sous une forme paramétrique. L'équation (7.42) devient :

$$x_1 = K \cdot \frac{\cos i (\sin i - \sin \varphi \cos \alpha) + \sin \varphi \sin \alpha \sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \varphi}}{\sin^2 i - \sin^2 \varphi} + K_1 \quad (7.51)$$

Calculons x_2 :

• Pour la première famille, les équations (7.46), (7.48) et (7.50) donnent :

$$\begin{aligned}\frac{dx_2}{d\alpha} &= \frac{dx_2}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{K \sin \varphi}{(\sin^2 i - \sin^2 \varphi)^{3/2}} \cdot \\ &\quad [(\sin i \cos \alpha - \sin \varphi) \cos i - \\ &\quad - \sin \alpha \sin i \sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \varphi} + \\ &\quad + \cos \varphi (\sin i - \sin \varphi \cos \alpha)] \quad (7.52)\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{k \sin \varphi}{(\sin^2 i - \sin^2 \varphi)^{3/2}} \cdot \\ &\quad [(\sin i \sin \alpha - \alpha \sin \varphi) \cdot \cos i + \\ &\quad + \cos \alpha \sin i \sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \varphi} + \\ &\quad + \cos \varphi (\alpha \sin i - \sin \varphi \sin \alpha) + A_1] \quad (7.53)\end{aligned}$$

• Pour la deuxième famille, on trouve aussi :

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{K \sin \varphi}{(\sin^2 i - \sin^2 \varphi)^{3/2}} \cdot \\ &\quad [(\sin i \sin \alpha - \alpha \sin \varphi) \cos i + \\ &\quad + \cos \alpha \sin i \sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \varphi} - \\ &\quad - \cos \varphi (\alpha \sin i - \sin \varphi \sin \alpha) + A_2] \quad (7.54)\end{aligned}$$

Les figures 98 a et 98 b montrent les lignes Γ_1 et Γ_2 ainsi que leurs enveloppes E_1 et E_2 dans le cas où $i > \varphi$.

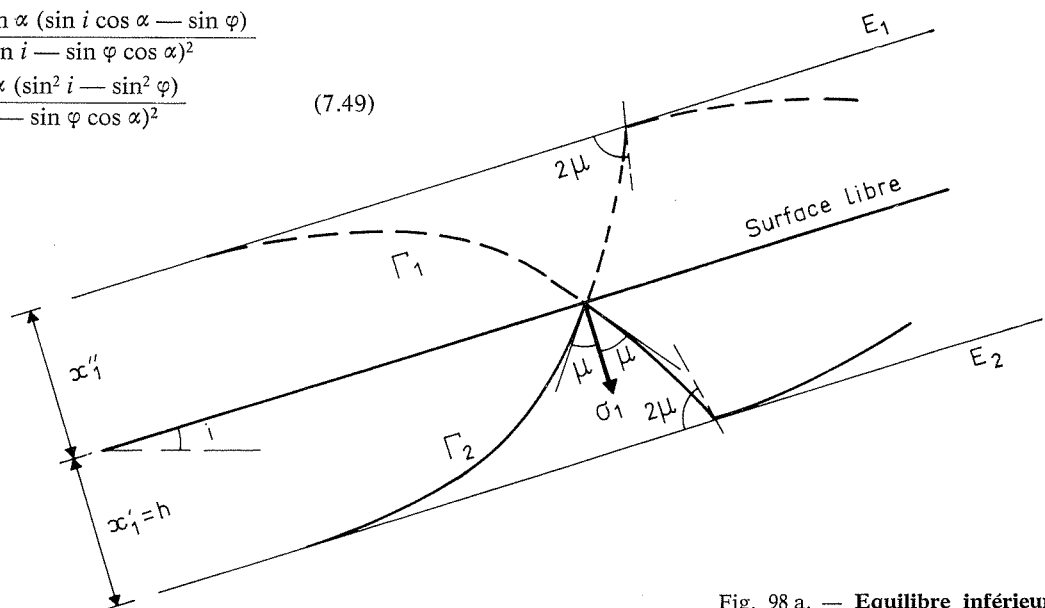
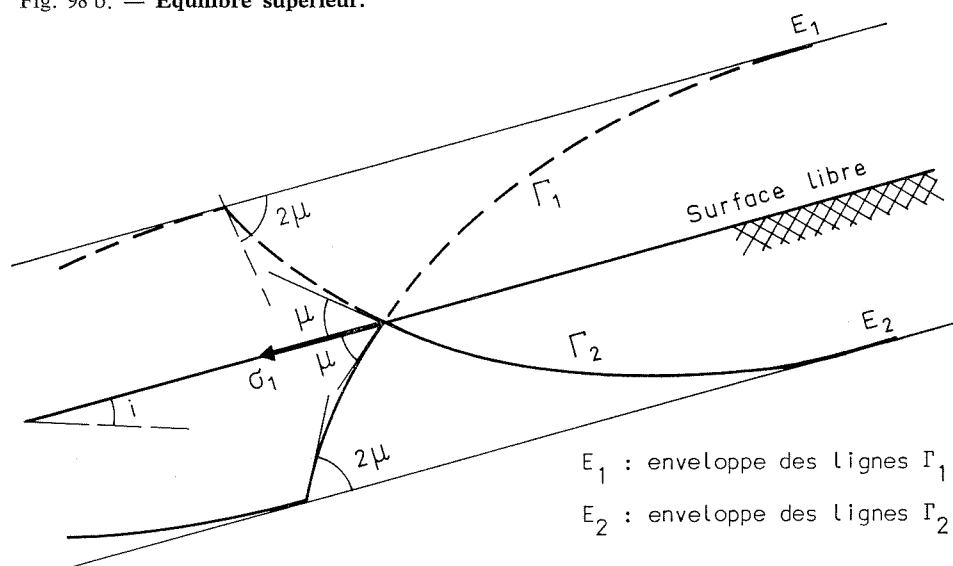


Fig. 98 a. — Equilibre inférieur.

Fig. 98 b. — Equilibre supérieur.

7.242. Deuxième cas : $i < \varphi$

Effectuons le changement de variables suivant :

$$\begin{aligned} \sin(2\theta + i) &= \frac{\sin i \operatorname{ch} \alpha - \sin \varphi}{\sin i - \sin \varphi \operatorname{ch} \alpha} \\ \cos(2\theta + i) &= \frac{\operatorname{sh} \alpha \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 i}}{\sin i - \sin \varphi \operatorname{ch} \alpha} \end{aligned} \quad (7.55)$$

D'où :

$$2 \cos(2\theta + i) \frac{d\theta}{d\alpha} = \frac{\operatorname{sh} \alpha (\sin^2 i - \sin^2 \varphi)}{(\sin i - \sin \varphi \operatorname{ch} \alpha)^2} \quad (7.56)$$

ou :

$$\frac{d\theta}{d\alpha} = - \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 i}}{2 (\sin i - \sin \varphi \operatorname{ch} \alpha)} \quad (7.57)$$

De même, de l'équation (7.42) :

$$x_1 = K.$$

$$\frac{\cos i (\sin i - \sin \varphi \operatorname{ch} \alpha) + \sin \varphi \operatorname{sh} \alpha \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 i}}{\sin^2 i - \sin^2 \varphi} + K_1 \quad (7.58)$$

Calculons x_2 :

- Pour la première famille, les équations (7.46), (7.55) et (7.57) permettent d'écrire :

$$\frac{dx_2}{d\alpha} = \frac{K \sin \varphi}{(\sin^2 \varphi - \sin^2 i)^{3/2}} [(\sin i \operatorname{ch} \alpha - \sin \varphi) \cos i - \sin i \operatorname{sh} \alpha \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 i} + \cos \varphi (\sin i - \sin \varphi \operatorname{ch} \alpha)] \quad (7.59)$$

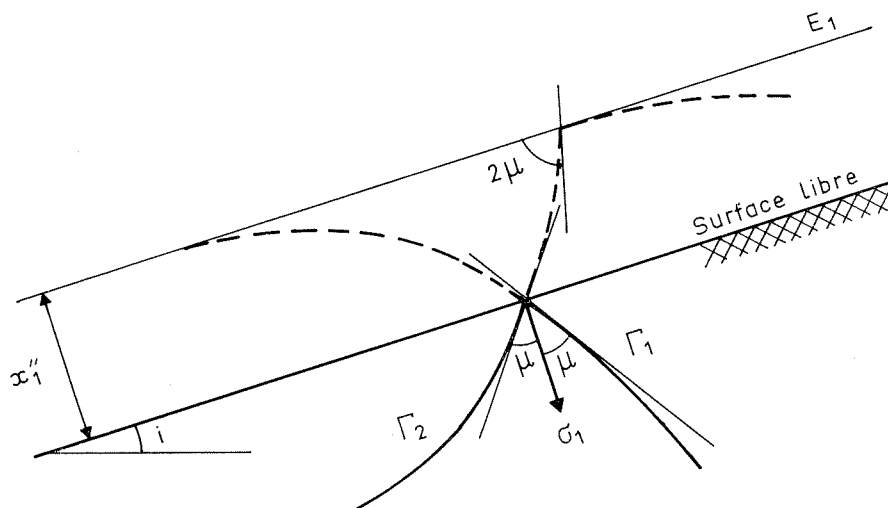
d'où :

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{K \sin \varphi}{(\sin^2 \varphi - \sin^2 i)^{3/2}} [(\sin i \operatorname{sh} \alpha - \alpha \sin \varphi) \cos i - \sin i \operatorname{ch} \alpha \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 i} + \cos \varphi (\alpha \sin i - \sin \varphi \operatorname{sh} \alpha) + A_3] = \\ &= \frac{K \sin \varphi}{(\sin^2 \varphi - \sin^2 i)^{3/2}} [\alpha \sin(i - \varphi) + \frac{1}{2} \operatorname{sh} \alpha (\sin^2 i - \sin^2 \varphi) - \sin i \operatorname{ch} \alpha \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 i}] \end{aligned} \quad (7.60)$$

- Pour la deuxième famille, on trouve :

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{K \sin \varphi}{(\sin^2 \varphi - \sin^2 i)^{3/2}} [(\sin i \operatorname{sh} \alpha - \alpha \sin \varphi) \cos i - \sin i \operatorname{ch} \alpha \sqrt{\sin^2 \varphi - \sin^2 i} - \cos \varphi (\alpha \sin i - \sin \varphi \operatorname{sh} \alpha) + A_4] \end{aligned} \quad (7.61)$$

Les figures 99 a et 99 b montrent les lignes Γ_1 et Γ_2 ainsi que leurs enveloppes E_1 et E_2 dans le cas où $i < \varphi$.

Fig. 99 a.
Equilibre inférieur.

7.3. Cas d'un talus infini en milieu purement cohérent

La recherche des lignes caractéristiques est immédiate. Les équations (7.15) s'écrivent (fig. 100) :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= \gamma x_1 \cos i + p = \eta + C \cos 2\theta \\ \sigma_{12} &= -\gamma x_1 \sin i + t = C \sin 2\theta \\ \sigma_{22} &= -C \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (7.81)$$

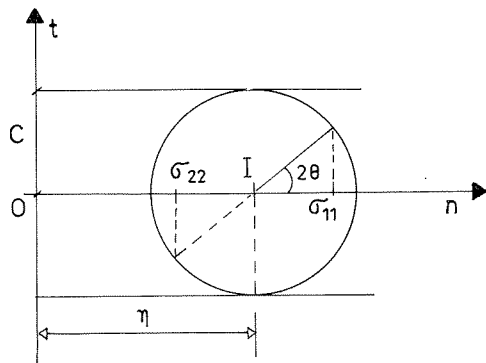


Fig. 100.

D'où :

$$x_1 = \frac{t - C \sin 2\theta}{\gamma \sin i} \quad (7.82)$$

$$\eta = \frac{p \sin i + t \cos i - C \sin(2\theta + i)}{\sin i} \quad (7.83)$$

ou aussi :

$$C^2 = (\gamma x_1 \cos i + p - \eta)^2 + (\gamma x_1 \sin i - t)^2 \quad (7.84)$$

On voit que la loi de variation de η en fonction de la profondeur x_1 est une conique (ellipse) si $i \neq 0$.

7.3.1. Equations des lignes caractéristiques

Déterminons les expressions des lignes caractéristiques. On a :

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \operatorname{tg} \left(\theta \pm \frac{\pi}{4} \right) \quad (7.84)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{d\theta} &= \operatorname{tg} \left(\theta \pm \frac{\pi}{4} \right) \cdot \frac{dx_1}{d\theta} = - \\ &= -2C \frac{\cos 2\theta}{\sin i} \operatorname{tg} \left(\theta \pm \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned} \quad (7.85)$$

• Pour la première famille :

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{d\theta} &= \frac{-2C}{\gamma \sin i} \operatorname{tg} \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(2\theta + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{-4C}{\gamma \sin i} \operatorname{tg} \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= -\frac{4C}{\gamma \sin i} \sin^2 \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \\ &= -\frac{2C}{\gamma \sin i} \left[1 - \cos \left(2\theta + \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &= -\frac{2C}{\gamma \sin i} (1 + \sin 2\theta) \end{aligned} \quad (7.86)$$

D'où :

$$x_2 = \frac{-C}{\gamma \sin i} (2\theta - \cos 2\theta) + C^{\text{te}} \quad (7.87)$$

• Pour la deuxième famille :

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{d\theta} &= -\frac{2C}{\gamma \sin i} \operatorname{tg} \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \cos 2\theta \\ &= +\frac{2C}{\gamma \sin i} \operatorname{tg} \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(2\theta - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \frac{4C}{\gamma \sin i} \sin^2 \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{2C}{\gamma \sin i} \left[1 - \cos \left(2\theta - \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &= \frac{2C}{\gamma \sin i} (1 - \sin 2\theta) \end{aligned} \quad (7.88)$$

D'où :

$$x_2 = \frac{C}{\gamma \sin i} [2\theta + \cos 2\theta] + C^{\text{te}} \quad (7.89)$$

Les équations (7.74), (7.80) et (7.82) montrent que les lignes caractéristiques sont des cycloïdes déformées (fig. 101).

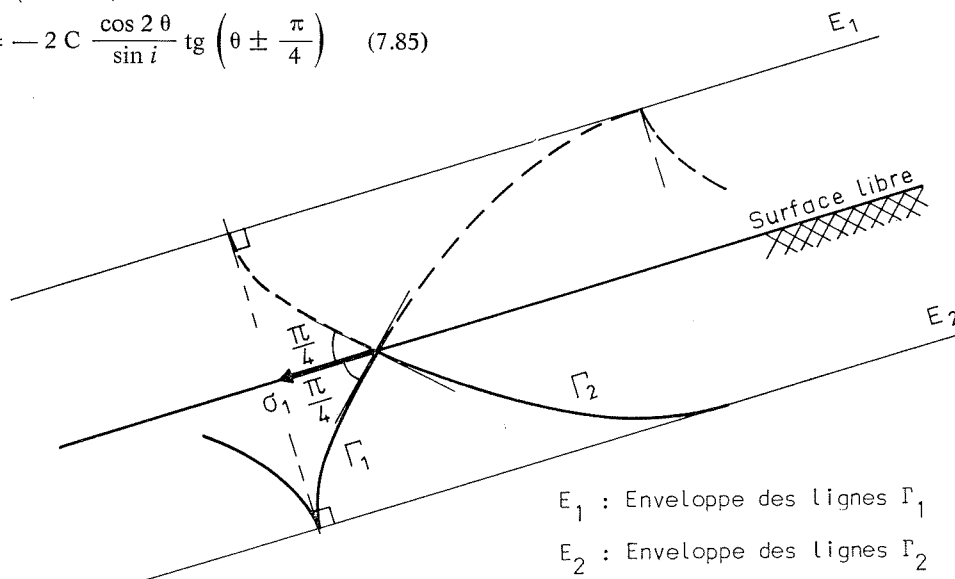


Fig. 101 a.
Équilibre
inférieur.

E_1 : Enveloppe des lignes Γ_1
 E_2 : Enveloppe des lignes Γ_2

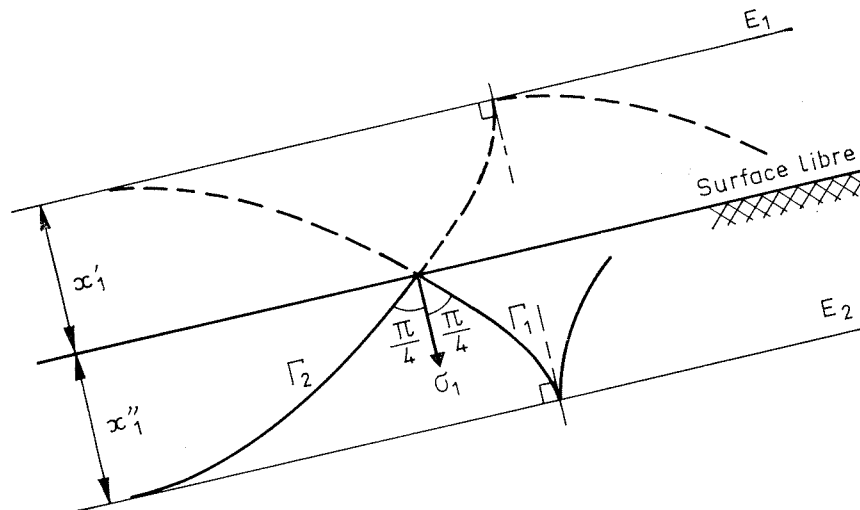


Fig. 101 b. — Equilibre supérieur.

Il est à noter que, de l'équation (7.74), on a (fig. 100) :

- Pour $x_1 = 0$:

$$\sin 2\theta_0 = \frac{t}{C} \quad (7.90)$$

- Quand x_1 augmente, l'angle 2θ diminue progressivement pour atteindre la valeur $-\frac{\pi}{2}$.

7.32. Enveloppes

L'existence d'une solution impose :

$$-C \leq \sigma_{12} = -\gamma x_1 \sin i + t = C \sin 2\theta \leq C \quad (7.91)$$

On a de même :

$$\frac{dx_1}{d\theta} = -\frac{2C}{\gamma \sin i} \cos 2\theta \quad (7.92)$$

- 1) Pour $\sigma_{12} = -C$:

$$\left. \begin{aligned} x_1'' &= \frac{t+C}{\gamma \sin i} \\ \sin 2\theta &= -1 \quad \text{ou} \quad 2\theta = -\frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (7.93)$$

Il en résulte :

$$\bullet \frac{dx_1}{d\theta} = 0 \quad (7.94)$$

- pour la première famille Γ_1 :

$$\frac{dx_2}{d\theta} = -\frac{2C}{\gamma \sin i} (1 + \sin 2\theta) = 0 \quad (7.95)$$

- pour la deuxième famille Γ_2 :

$$\frac{dx_2}{d\theta} = \frac{2C}{\gamma \sin i} (1 - \sin 2\theta) = \frac{4C}{\gamma \sin i} \quad (7.96)$$

En conséquence : le plan défini par $x_1 = x_1''$ constitue une enveloppe E_2 pour les lignes caractéristiques Γ_2 et un lieu de points de rebroussement pour les lignes caractéristiques Γ_1 .

- 2) Pour $\sigma_{12} = C$

$$\left. \begin{aligned} x_1' &= \frac{t-C}{\gamma \sin i} \\ \sin 2\theta &= 1 \quad \text{ou} \quad 2\theta = \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (7.97)$$

On trouve dans ce cas que le plan défini par $x_1 = x_1'$ constitue une enveloppe E_1 pour les l.c. Γ_1 et un lieu de points de rebroussement pour les l.c. Γ_2 .

7.4. Cas général

Sur OA agit une charge uniforme q . Le problème consiste à déterminer le profil OB (fig. 102).

On est en présence d'un cas classique qui comporte un point singulier en O et trois zones d'équilibre. La zone I correspond à celle d'un talus infini de pente i . La zone III est caractérisée par le fait que la surface OB est libre.

La résolution complète de ce problème est obtenue, dans le cas général, par intégration numérique des équations de Kötter.

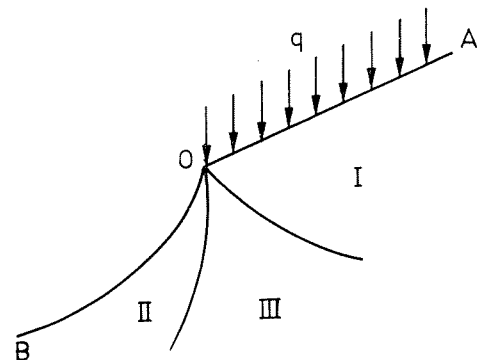


Fig. 102.

8. Poussée et butée des sols sur un écran

8.1. Position du problème

Le sol est délimité par un talus OA de pente i et par un écran OB (fig. 103).

On se propose de déterminer la pression agissant sur cet écran en supposant que le massif (AOB) est en état d'équilibre limite.

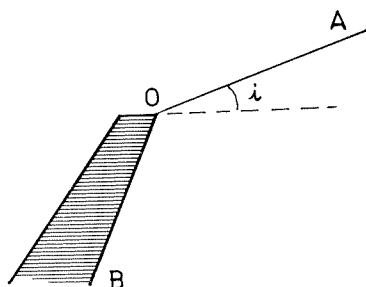


Fig. 103

8.2. Equilibre de Rankine

On suppose que le massif (AOB) est pulvérulent et qu'il y règne un état d'équilibre de Rankine correspondant à la pente i du talus OA. Les l.c. sont constituées par deux familles de droites parallèles (fig. 104 a).

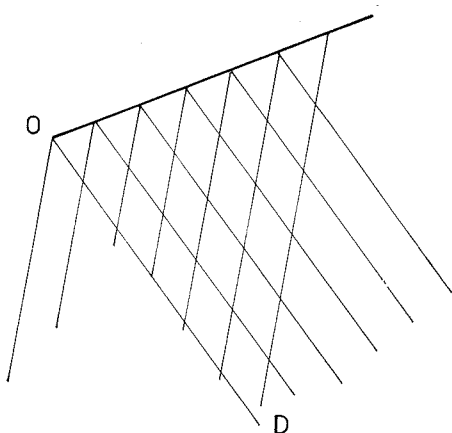


Fig. 104 a.

La contrainte σ_1 fait avec la normale ON au talus (fig. 104 b) un angle constant θ donné par la relation (7.8), soit:

$$\sin i + \sin \varphi \cdot \sin (2\theta + i) = 0 \quad (8.1)$$

et, en un point quelconque C (r, ω) du massif, le paramètre λ est de la forme (7.11), soit :

$$\lambda = \gamma r \cdot g(\omega) \quad (8.2)$$

En remarquant que :

$$\theta = \psi + \omega - i = C^{te} \quad (8.3)$$

$$X_r = \gamma \cos \omega \quad X_\omega = -\gamma \sin \omega \quad (8.4)$$

Les équations (2.59) s'écrivent :

$$\begin{aligned} (1 + \sin \varphi \cos 2\psi) g(\omega) + \\ + \sin \varphi \sin 2\psi \cdot \frac{dg}{d\omega} = \cos \omega \\ \sin \varphi \sin 2\psi \cdot g(\omega) + \\ + (1 - \sin \varphi \cos 2\psi) \cdot \frac{dg}{d\omega} = -\sin \omega \end{aligned} \quad (8.5)$$

De ces relations, on peut tirer l'expression (*) :

$$g(\omega) = \frac{1}{\cos^2 \varphi} [\cos \omega - \sin \varphi \cos (2\psi + \omega)] \quad (8.6)$$

La valeur de la contrainte $\vec{\sigma}$ agissant sur OC est (fig. 105) :

$$\begin{aligned} (\sigma)^2 &= (\sigma_\omega)^2 + (\tau)^2 = \\ &= \lambda^2 [1 - \sin \varphi \cos 2\psi]^2 + \sin^2 \varphi \sin^2 2\psi = \\ &= \lambda^2 [1 + \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2\psi] \end{aligned} \quad (8.7)$$

D'où

$$\sigma = \gamma r g(\omega) \sqrt{1 + \sin^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos 2\psi} \quad (8.8)$$

Son inclinaison α est constante tout le long de OC. Elle est définie par :

$$\tan \alpha = -\frac{\tau}{\sigma_\omega} = -\frac{\sin \varphi \sin 2\psi}{1 - \sin \varphi \cos 2\psi} \quad (8.9)$$

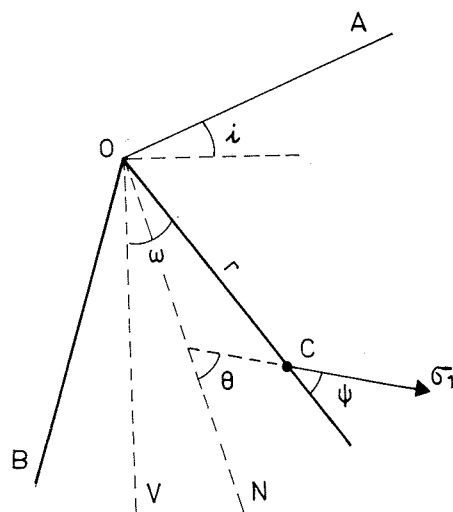


Fig. 104 b.

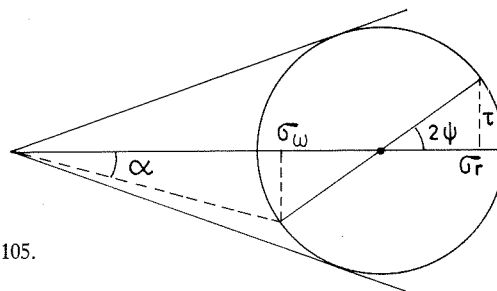


Fig. 105.

(*) Par un calcul simple, on peut établir l'équivalence entre cette expression de $g(\omega)$ et l'expression (7.12). Voir annexe B.

Si OC se confond avec la ligne caractéristique OD, c'est-à-dire avec le premier plan de glissement, on a alors :

$$\left. \begin{aligned} 2\psi &= \varepsilon \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = 2\varepsilon\mu \quad \varepsilon = \pm 1 \\ \alpha &= -\varepsilon\varphi \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left[\cos \omega - \sin \varphi \cos \left(\varepsilon \frac{\pi}{2} - \varepsilon \varphi + \omega \right) \right] \\ &= \frac{\cos(\omega - \varepsilon \varphi)}{\cos \varphi} \end{aligned} \quad (8.11)$$

- $\varepsilon = -1$: en équilibre de poussée.
- $\varepsilon = 1$: en équilibre de butée.

Calculons les variations de ψ et de g . On a :

$$\frac{d\psi}{d\omega} = -1 \quad \text{ou} \quad \frac{d\psi}{d\omega} + 1 = 0 \quad (8.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d\omega} &= \frac{1}{\cos^2 \varphi} \left[-\sin \omega - \left(2 \frac{d\psi}{d\omega} + 1 \right) \cdot \right. \\ &\quad \left. \sin \varphi \sin(2\psi + \omega) \right] \\ &= -\frac{1}{\cos^2 \varphi} [\sin \omega + \sin \varphi \sin(2\psi + \omega)] \end{aligned} \quad (8.13)$$

En particulier, sur la ligne caractéristique OD, on peut écrire :

$$\omega = \omega_o \quad 2\psi = 2\varepsilon\mu \quad (8.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d\omega} &= -\frac{1}{\cos^2 \varphi} [\sin \omega_o + \sin \varphi \sin(2\varepsilon\mu + \omega_o)] \\ &= -\frac{1}{\cos^2 \varphi} [\sin \omega_o + \varepsilon \sin \varphi \sin(2\mu + \varepsilon\omega_o)] \\ &= -\frac{1}{\cos^2 \varphi} \left[\sin \omega_o + \varepsilon \sin \varphi \cdot \right. \\ &\quad \left. \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi + \varepsilon\omega_o \right) \right] \\ &= -\frac{1}{\cos^2 \varphi} [\sin \omega_o + \varepsilon \sin \varphi \cos(-\varphi + \varepsilon\omega_o)] \\ &= -\frac{1}{\cos^2 \varphi} [\sin \omega_o + \varepsilon \sin \varphi \cos(\omega_o - \varepsilon\varphi)] \end{aligned} \quad (8.15)$$

8.3. Equilibre général dans le cas d'un massif pulvérulent

8.31. Position du problème

Au talus OA correspond un état d'équilibre de Rankine délimité par la droite caractéristique OD, ou premier plan de glissement (fig. 106).

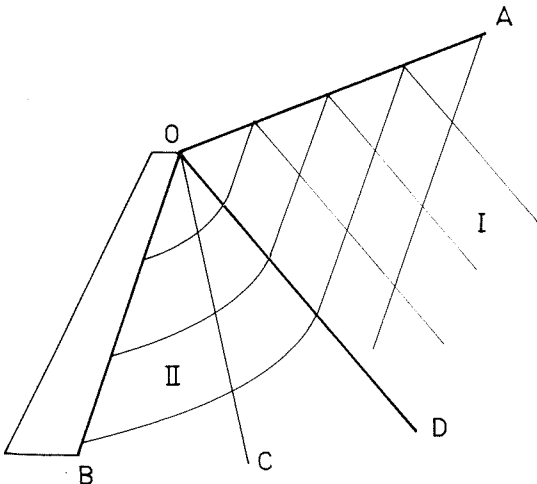


Fig. 106.

Le problème revient à trouver dans la zone (BOD) une solution se raccordant à la l.c. OD et vérifiant une certaine condition le long de l'écran OB (voir paragraphe 2.72).

La condition généralement admise consiste à imposer une valeur constante de l'inclinaison α de la pression qu'exerce le massif sur la paroi OB.

Dans la zone (BOD), recherchons une solution de la forme

$$\psi = \psi(\omega) \quad \lambda = \gamma r g(\omega) \quad (8.16)$$

Une telle solution jouit des propriétés suivantes :

- 1) Elle est de la même forme que celle qui règne dans la zone AOD (équilibre de Rankine) ;
- 2) Le long d'un rayon vecteur OC, le paramètre λ et le tenseur de contraintes varient linéairement en fonction de r . Ceci est particulièrement vrai le long de l'écran OB.
- 3) Le long d'un rayon vecteur OC, l'angle ψ reste constant. Il en résulte que toutes les l.c. d'une même famille coupent OC sous le même angle ($\psi \pm \mu$). Par voie de conséquence, la contrainte agissant sur OC, admet une inclinaison constante le long de celui-ci

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-\tau}{\sigma_o} = -\frac{\sin \varphi \sin 2\psi}{1 - \sin \varphi \cos 2\psi} \quad (8.17)$$

Portons les expressions (8.16) dans le système d'équations (2.59) où l'on a :

$$X_r = \gamma \cos \omega \quad X_\omega = -\gamma \sin \omega \quad (8.18)$$

On trouve :

$$\begin{aligned} &(1 + \sin \varphi \cos 2\psi) g(\omega) + \\ &+ 2 g(\omega) \left(1 + \frac{d\psi}{d\omega} \right) \sin \varphi \cos 2\psi + \\ &+ \sin \varphi \sin 2\psi \cdot \frac{dg}{d\omega} = \cos \omega \end{aligned} \quad (8.19)$$

$$\begin{aligned} &g(\omega) \sin \varphi \sin 2\psi + (1 - \sin \varphi \cos 2\psi) \frac{dg}{d\omega} + \\ &+ 2 g(\omega) \left(1 + \frac{d\psi}{d\omega} \right) \sin \varphi \sin 2\psi = -\sin \omega \end{aligned} \quad (8.20)$$

On en tire :

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d\omega} &= \frac{g \sin 2\psi - \sin(2\psi + \omega)}{\cos 2\psi - \sin \varphi} \\ \frac{d\psi}{d\omega} + 1 &= \frac{\cos \omega - \sin \varphi \cos(2\psi + \omega) - g \cos^2 \varphi}{2 g (\cos 2\psi - \sin \varphi) \sin \varphi} \end{aligned} \quad (8.21)$$

8.32. Recherche des singularités

L'intégration numérique du système d'équation (8.21) nécessite au préalable la détermination des singularités. Mettons-le sous la forme :

$$\begin{aligned} &\frac{d\psi}{\cos \omega - \sin \varphi \cos(2\psi + \omega) - g [\cos^2 \varphi + 2(\cos 2\psi - \sin \varphi) \sin \varphi]} \\ &= \frac{d\omega}{2 g (\cos 2\psi - \sin \varphi) \sin \varphi} \\ &= \frac{dg}{2 g [g \sin 2\psi - \sin(2\psi + \omega)] \sin \varphi} = dt \end{aligned} \quad (8.22)$$

Partant d'un point initial donné (g_o, ψ_o, ω_o) , ce système d'équations admet une solution unique sous réserve que le point considéré ne soit pas singulier.

Un point est dit singulier si les dénominateurs dans ce système d'équations sont simultanément nuls :

$$\left. \begin{aligned} \cos \omega - \sin \varphi \cos (2\psi + \omega) - \\ - g [\cos^2 \varphi + 2 (\cos 2\psi - \\ - \sin \varphi) \sin \varphi] &= 0 \\ 2g (\cos 2\psi - \sin \varphi) \sin \varphi &= 0 \\ 2g [g \sin 2\psi - \sin (2\psi + \omega)] \sin \varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.23)$$

Cette condition est réalisée dans les deux cas suivants :

Premier cas :

$$\left. \begin{aligned} g &= 0 \\ \cos \omega - \sin \varphi \cos (2\psi + \omega) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.24)$$

Ceci correspond à la surface libre OA du talus en équilibre limite de Rankine pour laquelle on a (fig. 107) :

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= g = 0 \\ \omega &= \frac{\pi}{2} + i \\ \theta &= \psi + \omega - i \end{aligned} \right\} \quad (8.24 \text{ bis})$$

ou $\psi = \theta - \omega + i$

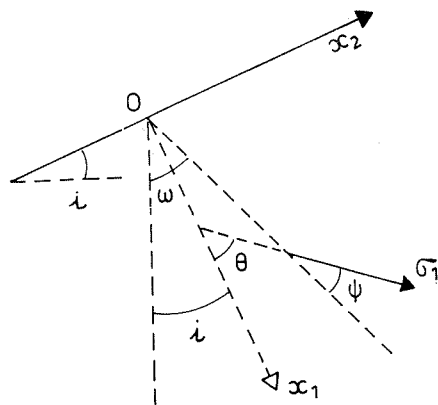


Fig. 107.

En portant ces valeurs dans (8.23), on retrouve l'équation (8.1).

Deuxième cas :

On a :

• d'une part :

$$\left. \begin{aligned} \cos 2\psi - \sin \varphi &= 0 \\ \text{ou} \\ 2\psi &= \varepsilon \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = 2\varepsilon\mu \quad \varepsilon = \pm 1 \end{aligned} \right\}$$

• d'autre part :

$$g = \frac{\cos (\omega - \varepsilon \varphi)}{\cos \varphi} \quad (8.26)$$

On retrouve les équations (8.10) et (8.11) valables le long d'une ligne caractéristique dans l'équilibre de Rankine.

Pour les deux cas ci-dessus, le système d'équations (8.21) est indéterminé.

Dans le cas où seuls les dénominateurs y sont nuls

$$\cos 2\psi - \sin \varphi = 0 \quad \text{ou} \quad \psi = \varepsilon\mu \quad (8.27)$$

les expressions de $\frac{dg}{d\omega}$ et $\frac{d\psi}{d\omega}$ tendent vers l'infini et l'on se trouve en présence d'une singularité différente. Ce point est discuté dans le paragraphe 8.33 ci-après.

Donc la ligne caractéristique OD constitue un ensemble de points singuliers. Dans la zone I règne un équilibre de Rankine auquel on peut lui raccorder dans la zone II une infinité de solutions. C'est en ceci que réside l'indétermination.

8.33. Détermination des courbures

On a sur une ligne caractéristique :

• de la première famille Γ_1 (fig. 108)

$$ds_1 = \frac{rd\omega}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \psi - \mu \right)} = \frac{rd\omega}{\sin (\psi + \mu)}$$

$$\Omega = \omega + \psi$$

$$d\Omega = d\omega + d\psi$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{d\Omega}{ds_1} = \frac{\sin (\psi + \mu)}{r} \left(1 + \frac{d\psi}{d\omega} \right) \quad (8.28)$$

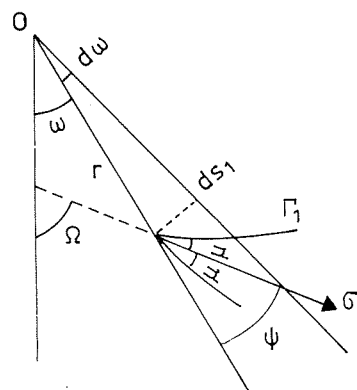


Fig. 108.

• de la deuxième famille Γ_2

$$ds_2 = \frac{rd\omega}{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \psi + \mu \right)} = \frac{rd\omega}{\sin (\psi - \mu)} \quad (8.29)$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{d\Omega}{ds_2} = \frac{\sin (\psi - \mu)}{r} \left(1 + \frac{d\psi}{d\omega} \right) \quad (8.30)$$

Discutons les expressions (8.28) et (8.30).

En remplaçant $\left(1 + \frac{d\psi}{d\omega} \right)$ par sa valeur, [équation (8.21)], on voit que ces expressions peuvent s'écrire sous la forme :

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= k \frac{\sin (\psi + \mu)}{\cos 2\psi - \sin \varphi} \\ \frac{1}{R_2} &= k \frac{\sin (\psi - \mu)}{\cos 2\psi - \sin \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (8.31)$$

Si

$$\left. \begin{aligned} \cos 2\psi - \sin \varphi &= 0 \\ \text{ou} \quad 2\psi &= 2\varepsilon\mu \end{aligned} \right\} \quad (8.32)$$

on se trouve au voisinage d'une singularité (paragraphe 8.32).

- Pour $\varepsilon = -1$

$$\frac{1}{R_1} = k \frac{\sin(\psi + \mu)}{\sin 2\psi - \sin \varphi} = \frac{0}{0}$$

$$= k \frac{\cos(\psi + \mu)}{2 \cos 2\psi} = \frac{k}{2 \sin \varphi} \quad (8.33)$$

$$\frac{1}{R_2} = k \frac{\sin(\psi - \mu)}{\sin 2\psi - \sin \varphi} \rightarrow \infty \quad (8.34)$$

Donc, le rayon vecteur correspondant constitue une enveloppe pour la première famille Γ_1 et un lieu de points de rebroussement pour la deuxième famille Γ_2 .

- Pour $\varepsilon = 1$

On a un résultat inverse.

8.34. Solution au voisinage du premier plan de glissement

Le premier plan de glissement OD, qui est une ligne caractéristique et un lieu de points singuliers, est caractérisé par :

$$\omega = \omega_o \quad \psi_o = \varepsilon \mu$$

$$g_o = \frac{\cos(\omega_o - \varepsilon \varphi)}{\cos \varphi} \quad (8.35)$$

Recherchons la forme de la solution dans le dièdre BOD au voisinage de OD. Pour cela, effectuons le changement de variables suivant :

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \varepsilon \mu + F_1 & g &= g_o + F_2 \\ \omega &= \omega_o + F_3 \end{aligned} \right\} \quad (8.36)$$

Sur OD, on a, bien entendu :

$$F_1 = F_2 = F_3 = 0 \quad (8.37)$$

En restant au voisinage de OD, les variations de F_1 , F_2 et F_3 sont des infiniments petits.

En portant les expressions (8.36) dans les équations (8.22) et en négligeant les infiniments petits d'ordre supérieur ou égal à 2, on trouve tout calcul fait :

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 \varepsilon \sin \varphi \cos(\omega_o - \varepsilon \varphi) & -\sin \omega_o + \varepsilon \sin \varphi \cos(\omega_o - \varepsilon \varphi) & -\cos^2 \varphi \\ 4 g_o^2 \sin^2 \varphi + 4 g_o \varepsilon \sin(\omega_o - \varepsilon \varphi) \sin \varphi & 2 g_o \varepsilon \sin \varphi \sin(\omega_o - \varepsilon \varphi) & 2 g_o \sin \varphi \cos \varphi \\ -4 \varepsilon \sin \varphi \cos(\omega_o - \varepsilon \varphi) & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{vmatrix} \quad (8.38)$$

ou sous la forme condensée :

$$\frac{dF}{dt} = \Delta \cdot F \quad (8.39)$$

En remarquant que :

$$\begin{aligned} 4 g_o^2 \sin^2 \varphi + 4 g_o \varepsilon \sin \varphi \sin(\omega_o - \varepsilon \varphi) &= \\ &= 4 g_o \varepsilon \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \sin \omega_o = \\ &= 4 \varepsilon \frac{\cos(\omega_o - \varepsilon \varphi)}{\cos^2 \varphi} \sin \varphi \sin \omega_o \end{aligned} \quad (8.40)$$

et en posant :

$$\left. \begin{aligned} A &= \varepsilon \sin \varphi \cos(\omega_o - \varepsilon \varphi) \\ B &= \cos \varphi \sin(\omega_o - \varepsilon \varphi) \\ A + B &= \sin \omega_o \end{aligned} \right\} \quad (8.41)$$

la matrice Δ , de l'équation (8.39), s'écrit alors :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6A & -B & -\cos^2 \varphi \\ 4 \frac{A(A+B)}{\cos^2 \varphi} & \frac{2AB}{\cos^2 \varphi} & 2A \\ -4A & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (8.42)$$

Pour la résolution du système d'équation (8.38), déterminons les valeurs propres de la matrice Δ . On a, tout calcul fait :

$$\begin{aligned} \det(\Delta - \beta I) &= -\beta^3 + 8A\beta^2 - 12A^2\beta \\ &= -\beta(\beta - 4A)^2 = 0 \end{aligned} \quad (8.43)$$

On trouve :

- Une racine simple $\beta = 0$ à laquelle correspond la solution :

$$\begin{aligned} F_1 &= 0 & F_2 &= a = C^{te} \\ F_3 &= b = -\frac{B}{\cos^2 \varphi} a = C^{te} \end{aligned} \quad (8.44)$$

- Une racine double

$$\beta = 4A \quad (8.45)$$

pour laquelle on a la solution partielle :

$$\begin{aligned} F_i &= (c_i + d_i t) e^{\beta t} \quad (i = 1, 2, 3) \\ \text{ou } F &= (C + Dt) e^{\beta t} \end{aligned} \quad (8.46)$$

Les coefficients c_i et d_i ne sont pas indépendants entre eux. On a, en effet :

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= [\beta(C + Dt) + D] e^{\beta t} = \\ &= \Delta(C + Dt) e^{\beta t} \end{aligned} \quad (8.47)$$

d'où :

$$\left. \begin{aligned} \beta D &= \Delta \cdot D \\ \beta C + D &= \Delta \cdot C \end{aligned} \right\} \quad (8.48)$$

$$\text{ou } \left. \begin{aligned} (\Delta - \beta I) D &= 0 \\ (\Delta - \beta I) C &= D \end{aligned} \right\} \quad (8.49)$$

En conséquence, la solution du problème au voisinage de la ligne caractéristique OD s'écrit :

$$\begin{aligned}\phi &= \varepsilon\mu + F_1 = \varepsilon\mu + (c_1 + d_1 t) e^{\beta t} \\ g &= g_o + F_2 = \frac{\cos(\omega_o - \varepsilon\varphi)}{\cos \varphi} + \\ &\quad + a + (c_2 + d_2 t) e^{\beta t} \\ \omega &= \omega_o + F_3 = \omega_o + \\ &\quad + b + (c_3 + d_3 t) e^{\beta t}\end{aligned}\quad (8.51)$$

Quand βt (ou εt) $\rightarrow -\infty$, cette solution devant tendre vers la solution de Rankine le long de OD ($\varepsilon\mu$, g_o , ω_o), il en résulte que l'on doit prendre :

$$a = b = 0$$

On a donc finalement :

$$\begin{aligned}\phi &= \varepsilon\mu + (c_1 + d_1 t) e^{\beta t} \\ g &= \frac{\cos(\omega_o - \varepsilon\varphi)}{\cos \varphi} + (c_2 + d_2 t) e^{\beta t} \\ \omega &= \omega_o + (c_3 + d_3 t) e^{\beta t}\end{aligned}\quad (8.52)$$

Étudions les variations de ϕ et g en fonction de ω :

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{d\omega} &= \frac{\beta(c_1 + d_1 t) + d_1}{\beta(c_3 + d_3 t) + d_3} \\ \frac{dg}{d\omega} &= \frac{\beta(c_2 + d_2 t) + d_2}{\beta(c_3 + d_3 t) + d_3}\end{aligned}\quad (8.53)$$

En particulier, quand $\beta t \rightarrow -\infty$, on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{d\omega} &= \frac{d_1}{d_3} = -1 \\ \frac{dg}{d\omega} &= \frac{d_2}{d_3} = -\frac{2A+B}{\cos^2 \varphi} = - \\ &\quad - \frac{1}{\cos^2 \varphi} [\sin \omega_o + \varepsilon \sin \varphi \cos(\omega_o - \varepsilon\varphi)]\end{aligned}\quad (8.54)$$

En résumé :

- 1) Le long de la ligne caractéristique OD, on peut raccorder une double infinité de solutions à l'équilibre de Rankine régnant dans AOD. Elles sont définies par les deux constantes d'intégration c_1 et d_1 .
- 2) Toutes les solutions admettent les mêmes variations (ou la même tangente) $\frac{d\phi}{d\omega}$ et $\frac{dg}{d\omega}$, [équations (8.54)], sur OD (fig. 109).

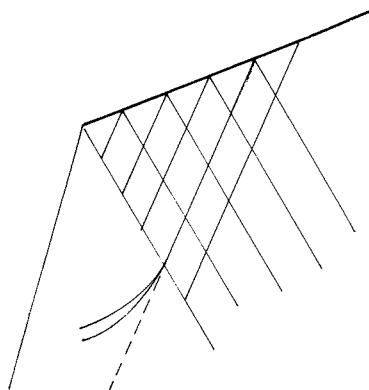


Fig. 109.

- 3) Une de ces solutions est celle où l'équilibre de Rankine règne dans tout le dièdre AOB. Il est donc normal que les expressions (8.12) et (8.15) de $\frac{d\phi}{d\omega}$ et $\frac{dg}{d\omega}$ concordent.

8.35. Approche de Caquot

Posons (fig. 110) :

$$\left. \begin{aligned}\sigma_\omega &= \gamma n r & \tau &= -\gamma t r \\ \sigma_r &= k \sigma_\omega = \gamma n k r & m &= 2k - 1\end{aligned} \right\} \quad (8.55)$$

où n , t et k sont des fonctions de (ω) uniquement.

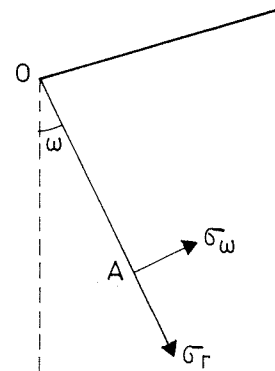


Fig. 110.

Les équations (2.58) deviennent alors :

$$\begin{aligned}\frac{dt}{d\omega} &= (2k - 1)n - \cos \omega = mn - \cos \omega \\ \frac{dn}{d\omega} &= 3t - \sin \omega\end{aligned}\quad (8.56)$$

Ce système d'équations est équivalent aux équations (8.19) et (8.20).

Sur le plan OA, on a (fig. 111) :

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{-\tau}{\sigma_\omega} = \frac{t}{n} \\ \sin \gamma &= \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} & \gamma &= \alpha - 2\psi\end{aligned}\quad (8.57)$$

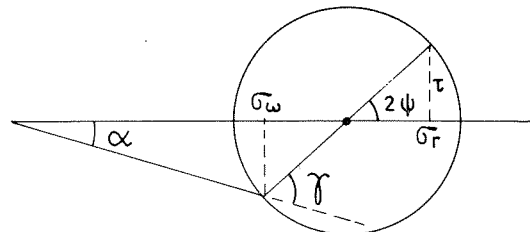


Fig. 111.

Introduisons dans le système d'équations (8.56) une fonction de contraintes $F(\omega)$ définie par la relation :

$$F = \frac{n - \cos \omega}{3} \quad (8.58)$$

Les deux équations d'équilibre (8.56) deviennent alors :

$$\begin{aligned}\frac{dF}{d\omega} &= t \\ \frac{d^2 F}{d\omega^2} &= (2k - 1)n - \cos \omega\end{aligned}\quad (8.59)$$

La connaissance de n_o et t_o sur un plan donné ω_o permet d'avoir la valeur des termes : m_o , F_o , $\left(\frac{dF}{d\omega}\right)_o$, $\left(\frac{d^2 F}{d\omega^2}\right)_o$.

Ceci revient à imposer à l'extrémité q_2 de se déplacer, dans le plan de Mohr, suivant la droite Δ d'équation (fig. 114) :

$$t = \rho (C + n \operatorname{tg} \varphi) \quad (8.75)$$

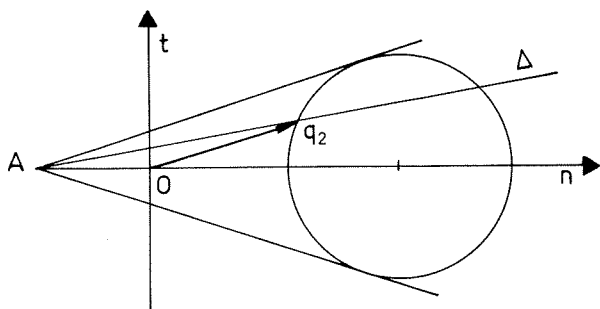


Fig. 114.

La condition (8.74) se ramène à écrire :

- Pour un massif pulvérulent :

$$t = \rho n \operatorname{tg} \varphi$$

ou

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{t}{n} = \rho \operatorname{tg} \varphi \quad (8.76)$$

c'est-à-dire l'inclinaison α reste constante tout le long de l'écran OB.

- Pour un massif purement cohérent [voir équation (6.24)]

$$t = \rho C \quad (8.77)$$

C'est-à-dire la contrainte t est une certaine fraction de la cohésion C .

Les contraintes $(q_1)_o$ et $(q_2)_o$ sont reliées entre elles par l'expression (3.15) établie dans le cas d'un milieu non pesant.

La résolution complète de ce problème ne peut être envisagée que par une intégration numérique des équations de Kötter dans chaque cas à part.

Dans le cas où le chargement q_2 est uniforme, on obtient une solution approchée par superposition de solutions partielles (voir paragraphe 6.9).

9. Les fondations superficielles

9.1. Position du problème

Connaissant la répartition des charges p sur OB, le problème revient à déterminer le chargement q agissant sur OA et mettant le massif en état d'équilibre limite (fig. 115 a).

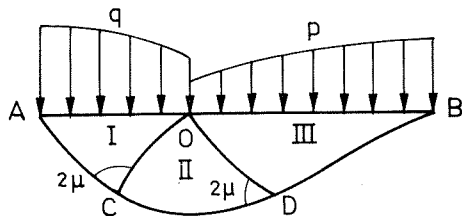


Fig. 115 a.

Le problème ainsi posé est bien déterminé. Au voisinage du point singulier O règnent trois états d'équilibre distincts (I, II et III). Si les charges sont normales à la surface du sol, l'étude des milieux non pesants nous donne en O (fig. 115 b).

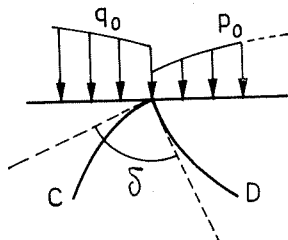


Fig. 115 b.

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0 \\ \Omega = \pi \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

$$2\delta = -\pi + 2\Omega = \pi \quad (9.2)$$

$$p_o + H = (q_o + H) \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} e^{-\pi \operatorname{tg} \varphi} \quad (9.3)$$

d'où :

$$q_o = -H + (p_o + H) e^{\pi \operatorname{tg} \varphi} \cdot \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (9.4)$$

La résolution complète du problème ne peut s'effectuer que par intégration numérique des équations de Kötter dans chaque cas particulier.

9.2. Approche traditionnelle

Soit une fondation rigide de largeur B et enterrée à une profondeur h (fig. 116). La charge limite Q de poinçonnement du sol est estimée par la superposition de solutions élémentaires d'équilibre limite. Il s'agit donc d'une solution approchée et l'on écrit généralement :

$$q = \frac{Q}{B} = \gamma h N_q + C N_c + \frac{1}{2} B \gamma N_\gamma \quad (9.5)$$

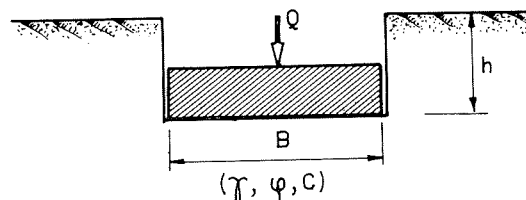


Fig. 116.

Dans cette expression :

- N_q , N_c , N_γ sont des coefficients dépendant de φ uniquement ;
- q est la répartition moyenne de la charge totale Q sous la fondation.

Examinons la signification de ces différents termes.

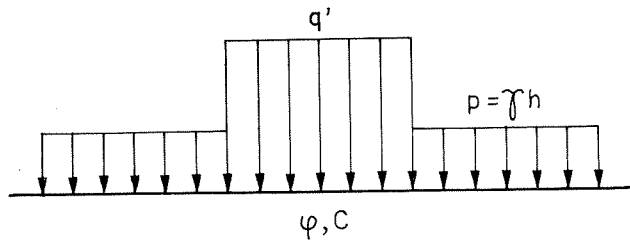


Fig. 117.

9.21. Coefficients N_q et N_c

Le sol sous la fondation est supposé non pesant et le poids des terres agissant de part et d'autre de celle-ci est assimilé à une surcharge uniforme $p = \gamma h$ (fig. 117).

Dans ces conditions, la charge uniforme q' correspondant à p est donnée par l'expression (9.4) et l'on a :

$$q' = -H + (\gamma h + H) e^{\pi \tan \varphi} \cdot \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (9.6)$$

La comparaison avec l'équation (9.5) montre que l'on a :

$$\bullet \text{ d'une part : } N_q = e^{\pi \tan \varphi} \cdot \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (9.7)$$

$$\bullet \text{ d'autre part, en remarquant que } H = \frac{C}{\tan \varphi}$$

$$C N_c = H (N_q - 1) = \frac{C}{\tan \varphi} (N_q - 1) \quad (9.8)$$

ou

$$N_c = \frac{N_q - 1}{\tan \varphi} \quad (9.9)$$

9.22. Coefficient N_γ

Déterminons la valeur moyenne $\left(q'' = \frac{Q''}{B} \right)$ du chargement provoquant le poinçonnement du sol supposé pesant et pulvérulent (fig. 118).

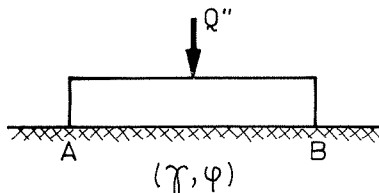


Fig. 118.

La loi de répartition des pressions sous la fondation AB n'étant pas connue *a priori*, divers schémas de rupture ont été envisagés par les spécialistes.

9.221. Schéma de Caquot-Kérisel

On admet que (fig. 119) :

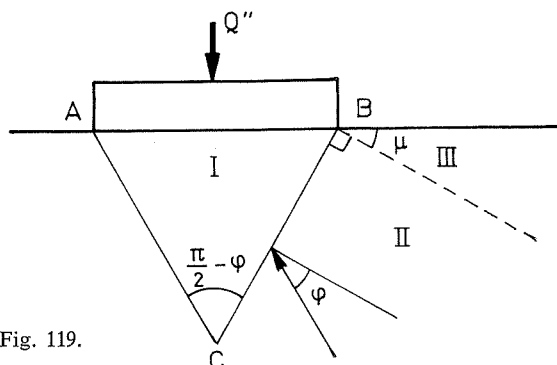


Fig. 119.

• sous la fondation se forme un dièdre rigide ABC d'angle au sommet $2\mu = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Il suit la fondation dans son mouvement de poinçonnement (zone I de la figure 119) ;

• la résistance au poinçonnement est réalisée en mobilisant la butée sur les écrans AC et BC qui sont des plans de glissement ; soit K_p le coefficient de butée correspondant ;

• la zone III est en état d'équilibre de Rankine.

En désignant par W le poids du coin ABC et par R la résultante de la butée mobilisée le long des deux écrans AC et BC, on a bien entendu :

$$R = Q'' + W \quad (9.10)$$

Tout calcul fait, on trouve :

$$q'' = \frac{Q''}{B} = \frac{1}{2} B \gamma N_\gamma \quad (9.11)$$

où

$$N_\gamma = \frac{1}{2} \left[K_p \frac{\cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right)}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} - \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \quad (9.12)$$

L'application de cette expression conduit au tableau III suivant :

TABLEAU III

φ°	N_γ	N_q	N_c	φ°	N_γ	N_q	N_c
0	0	1	5.14	25	10.4	10.7	20.7
5	0.2	1.56	6.47	30	21.8	18.4	30.1
10	1.0	2.49	8.45	35	48	33.3	46.1
15	2.33	3.94	11.0	40	113	64.2	75.4
20	4.97	6.40	14.8	45	297	135	134

9.222. Critique du schéma de Caquot-Kérisel

Soit le trapèze BB'CC' défini par (fig. 120) :

$$CC' = ds$$

$$CB = l$$

$$\widehat{C'CB} = 2\mu = \frac{\pi}{2} - \varphi \quad (9.13)$$

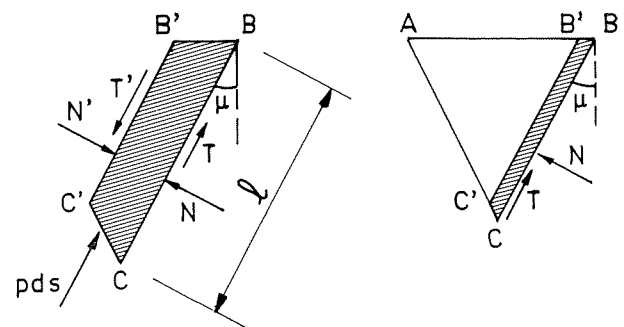


Fig. 120.

Les forces en présence sont les suivantes :

- Poids de cet élément de volume :

$$P = \gamma l ds \sin 2\mu \quad (9.14)$$

- Pression p agissant sur CC' :

$$p = \gamma K_p l \quad (9.15)$$

- T et N composantes de la résultante de la butée agissant sur CB :

$$\frac{T}{N} = \tan \varphi \quad (9.16)$$

- T' et N' composantes de la résultante des forces agissant sur $B'C'$.

L'équilibre des forces permet d'écrire :

$$\begin{aligned} N' &= N - P \sin \mu \\ &= N - \gamma l ds \sin 2\mu \sin \mu < N \end{aligned} \quad (9.17)$$

$$\begin{aligned} T' &= T - P \cos \mu + p ds \\ T + \gamma l ds (K_p - \sin 2\mu \cos \mu) &> T \end{aligned} \quad (9.18)$$

D'où :

$$\frac{T'}{N'} > \frac{T}{N} = \tan \varphi \quad (9.19)$$

Ce qui est impossible.

Donc ce schéma est statiquement inadmissible, à moins de considérer que le sol dans le coin ABC est compact et admet un angle de frottement interne apparent supérieur à φ .

9.223. Schéma de Terzaghi

Ce schéma (fig. 121) ne diffère de celui de Caquot-Kérisel que par le fait que l'angle du dièdre ABC est de $\pi - 2\varphi$. Les deux écrans AC et BC sont des plans de glissement.

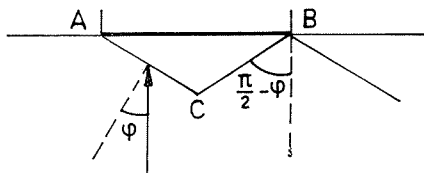


Fig. 121.

Le calcul, mené comme précédemment, conduit à des valeurs peu différentes de celles données dans le tableau III.

9.224. Critique du schéma de Terzaghi

Comme on peut le vérifier immédiatement, les répartitions des contraintes sur AC et sur BC sont incompatibles entre elles en C . En effet, ces deux plans font entre eux un angle $ACB = \pi - 2\varphi$ et il est impossible de tracer le cercle de Mohr correspondant à ce point.

9.225. Autres schémas

La principale difficulté dans la détermination de N_γ est le manque d'informations sur la répartition des pressions sous la fondation supposée rigide.

On peut trouver une solution en supposant que la fondation est lisse et la répartition des pressions triangulaire (fig. 122). La valeur de N_γ qu'on trouve est nettement inférieure à celle donnée par les schémas précités (voir bibliographie [4]).

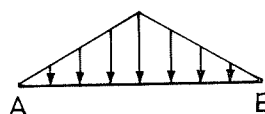


Fig. 122.

Une autre approche a été envisagée en [9] dans la bibliographie. Le principe est le suivant (fig. 123) :

Dans la zone III, on a un équilibre de Rankine. L'inclinaison α de la ligne caractéristique BC en B est choisie de manière que celle-ci soit tangente à l'axe de symétrie en C . Cette approche revient implicitement à considérer que l'inclinaison des pressions sous la fondation dépend de la largeur de celle-ci. Les valeurs ainsi obtenues pour N_γ peuvent différer jusqu'à 20 % de celles données dans le tableau I.

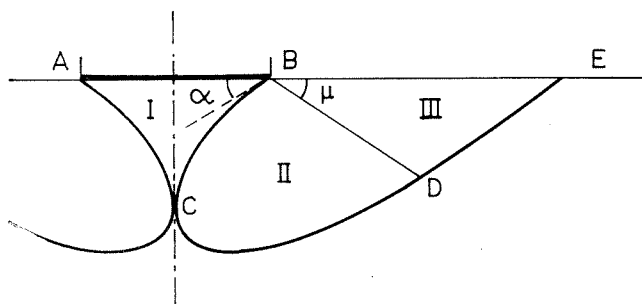


Fig. 123.

9.23. Conclusions

La solution exacte du problème des fondations nécessite, pour chaque cas, un traitement numérique particulier (assez lourd en général).

La solution traditionnelle conduit à un résultat approché du fait, d'une part, qu'elle résulte de la superposition de solutions élémentaires et, d'autre part, que les schémas utilisés pour le terme N_γ sont critiquables. Cependant, cette solution présente le grand avantage d'être d'une utilisation aisée et l'approximation est pratiquement acceptable.

La corrélation entre le résultat du calcul et l'étude expérimentale est analysée en détail dans [8].

Pour différents cas de fondations (chargement incliné, ...) les tables des bibliographies [6] et [7] permettent d'avoir directement les valeurs de N_c et N_q correspondantes.

9.3. Fondations au voisinage d'un talus

Différents aspects de ce problème sont traités dans les bibliographies [3] et [4].

ANNEXE A

Problème de Cauchy et lignes caractéristiques

A.1. Cas d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre

Soit l'équation aux dérivées partielles :

$$A(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + B(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = C(x, y, z) \quad (\text{A.1})$$

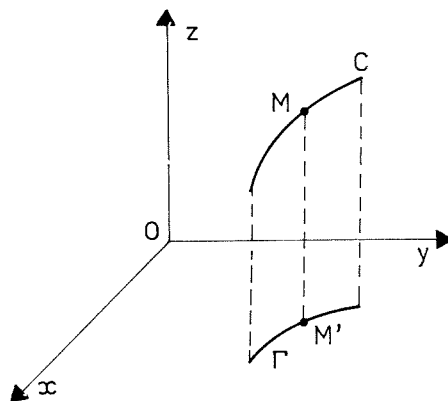


Fig. A 1.

Le problème de Cauchy consiste à trouver une surface solution $z(x, y)$ passant par une courbe donnée $C(z(x), y(x))$ et de projection $\Gamma(y(x))$ sur le plan (x, y) (fig. A.1).

A cet effet, appliquons la méthode du développement en série et cherchons à calculer les dérivées partielles premières $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ en un point M de C.

La variation de z suivant C s'écrit :

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (\text{A.2})$$

$$\text{ou } \frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} y' \quad (\text{A.3})$$

A partir des deux équations (A.1) et (A.2), on peut calculer les valeurs de $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ en M.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{C dy - B dz}{A dy - B dx} \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{A dz - C dx}{A dy - B dx} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.4})$$

On voit que le problème est possible sous réserve que le dénominateur soit non nul :

$$\Delta_1 = \det. \begin{vmatrix} A & B \\ 1 & y' \end{vmatrix} = Ay' - B \neq 0 \quad (\text{A.5})$$

Dans ce cas, on peut calculer de proche en proche toutes les dérivées partielles d'ordre deux ou plus. En effet, le long de C, on a, de l'équation (A.3) :

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial z}{\partial y} y'' + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (y')^2$$

ou

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} (y')^2 = \frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{\partial z}{\partial y} y'' \quad (\text{A.6})$$

De même, on a de l'équation (A.1) :

$$A \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \quad (\text{A.7})$$

$$A \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + B \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial B}{\partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \quad (\text{A.8})$$

Les termes des seconds membres dans les équations (A.6), (A.7) et (A.8) étant connus ou déjà déterminés, il est possible d'avoir les dérivées partielles de second ordre de $z(x, y)$ sous réserve que l'on ait :

$$\Delta_2 = \det. \begin{vmatrix} 1 & 2y' & (y')^2 \\ A & B & 0 \\ 0 & A & B \end{vmatrix} = B^2 - 2y'(AB) + (y')^2 A^2 = (Ay' - B)^2 = (\Delta_1)^2 \neq 0 \quad (\text{A.9})$$

On peut démontrer de même que les dérivées partielles d'ordre quelconque n peuvent être obtenues sous réserve que

$$\Delta_n = (\Delta_1)^n \neq 0 \quad (\text{A.10})$$

En résumé :

- Si $\Delta_1 = Ay' - B \neq 0$ on peut avoir toutes les dérivées partielles souhaitées de z et le problème est donc possible.

- Si $\Delta_1 = Ay' - B = 0$ et si les numérateurs dans les équations (A.4) sont nuls aussi, il y a indétermination et le problème admet une infinité de solutions possibles.

La courbe Γ est dite alors « ligne caractéristique » et le long de cette courbe on a la relation :

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B} = \frac{dz}{C} \quad (\text{A.11})$$

- Si $\Delta_1 = Ay' - B = 0$ et si, en plus, les relations (A.11) ne sont pas réalisées, on voit que $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ dans les équations (A.4) sont infinies.

La courbe Γ est dite alors « singulière » et le problème est impossible.

Soit Γ une courbe caractéristique. Si l'on se donne la valeur de z en un point P (x, y) de Γ , la valeur de z

sera déterminée, et d'une façon unique, le long de cette courbe. En effet, l'équation (A.11) peut s'écrire sous la forme suivante de différence finie

$$\frac{\Delta x}{A} = \frac{\Delta y}{B} = \frac{\Delta z}{C} \quad (\text{A.12})$$

A.2. Cas d'un système de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre

Soit le système :

$$\begin{cases} A_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + B_1 \frac{\partial \xi}{\partial y} + C_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} + D_1 \frac{\partial \eta}{\partial y} = E_1 \\ A_2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + B_2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + C_2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + D_2 \frac{\partial \eta}{\partial y} = E_2 \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

où $(A_1, \dots, E_2)$ sont des fonctions de $(x, y, \xi \text{ et } \eta)$.

Le problème de Cauchy revient à trouver deux fonctions $\xi(x, y)$ et $\eta(x, y)$ vérifiant les équations (A.13) et prenant des valeurs données le long de la courbe Γ du plan (x, y) (fig. A.2).

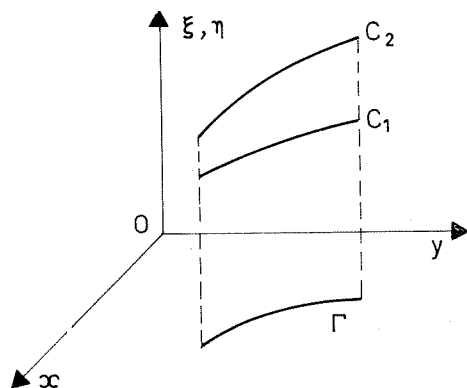


Fig. A.2.

Sous l'angle géométrique, il s'agit de définir deux surfaces intégrales $\xi(x, y)$ et $\eta(x, y)$, solutions des équations (A.13) et passant respectivement par les courbes données C_1 et C_2 qui admettent la même projection Γ sur le plan (x, y) .

Le long de Γ on a donc

$$\begin{cases} d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy \\ d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

Les équations (A.13) et (A.14) nous permettent d'avoir les dérivées premières $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)$ sous réserve que dans ces expressions le dénominateur Δ_1 soit différent de zéro.

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \det. \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ dx & dy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx & dy \end{vmatrix} \\ &= adx^2 + bdx dy + c dy^2 \\ &= (a + by' + c(y')^2) dx^2 \neq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Dans ce cas, le problème de Cauchy est possible et le calcul des dérivées partielles d'ordre élevé n se fait de proche en proche et l'on a :

$$\Delta_n = (\Delta_1)^n \neq 0 \quad (\text{A.16})$$

Dans le cas contraire, c'est-à-dire si

$$\Delta_1 = (a + by' + c(y')^2) dx^2 = 0 \quad (\text{A.17})$$

le problème de Cauchy est impossible à moins que les numérateurs dans les expressions des dérivées partielles $\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)$ soient nuls.

Ainsi, pour $\frac{\partial \eta}{\partial y}$, on doit avoir :

$$\det. \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & E_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & E_2 \\ dx & dy & 0 & d\xi \\ 0 & 0 & dx & d\eta \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{A.18})$$

Dans ce cas, il y a indétermination et le problème admet une infinité de solutions possibles. Dans l'espace à quatre dimensions (x, y, ξ, η) les lignes caractéristiques sont des courbes du plan (x, y) qui vérifient les équations (A.17) et (A.18).

De l'équation (A.17), on peut tirer la valeur de y' :

$$y' = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$$

- Si $b^2 - 4ac > 0$: en chaque point passe deux lignes caractéristiques et le système d'équations (A.13) est dit de type « hyperbolique ».
- Si $b^2 - 4ac = 0$: les deux lignes caractéristiques se confondent et les équations (A.13) sont de type « parabolique ».
- Si $b^2 - 4ac < 0$: les lignes caractéristiques sont imaginaires et les équations (A.13) sont de type « elliptique ».

A.3. Cas d'une équation aux dérivées partielles du second ordre

Considérons l'équation :

$$\begin{aligned} A \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \\ = D \left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

où les coefficients A, B et C sont des fonctions de $\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial z}{\partial y}\right)$.

On se donne le long de Γ du plan (x, y) les valeurs de z et de ses dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Géométriquement, la solution du problème revient à déterminer la surface $z(x, y)$ passant par une courbe donnée C le long de laquelle l'équation du plan tangent est connue (fig. A.3).

Le long de Γ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} d \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy \\ d \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

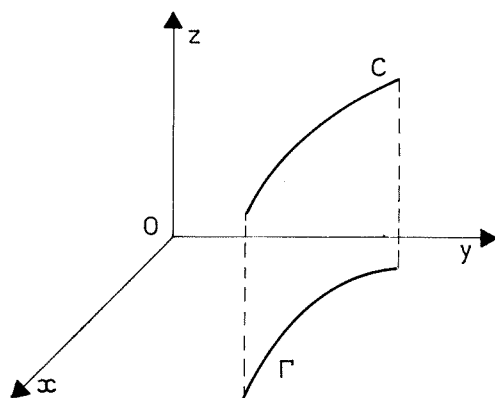


Fig. A 3.

Les équations (A.19) et (A.20) sont suffisantes pour déterminer les dérivées secondes $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ sous réserve que

$$\det. \begin{vmatrix} A & 2B & C \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix} = A dy^2 - 2B dx dy + C dx^2 \neq 0 \quad (\text{A.21})$$

Suivant le signe de $\Delta = B^2 - AC$, l'équation (A.19) est dite :

- *hyperbolique*, si $\Delta > 0$ et l'on a alors deux familles de lignes caractéristiques (Γ_1 , Γ_2) définies dans le plan (x, y) par la relation :

$$A \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2B \frac{dy}{dx} + C = 0$$

- *elliptique*, si $\Delta < 0$
- *parabolique*, si $\Delta = 0$.

Exemple :

Soit l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 \quad \Delta = B^2 = 1 > 0 \quad (\text{A.22})$$

C'est une équation de type hyperbolique et sa solution générale peut se mettre sous la forme

$$z = f(x) + g(y) \quad (\text{A.23})$$

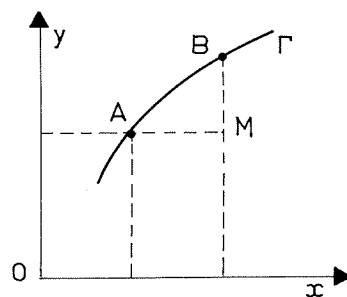


Fig. A 4.

On se donne z sur la courbe Γ . Sa valeur est bien définie en un point M quelconque du plan (fig. A.4) :

$$z(M) = f(x_B) + g(y_A)$$

Considérons le cas où Γ se réduit à une droite parallèle à oy (ou à ox). On constate que le problème devient impossible.

Il y a indétermination et les lignes caractéristiques sont constituées par les deux familles de droites Γ_1 et Γ_2 , parallèles respectivement à oy et à ox (fig. A.5). En effet, l'équation (A.21) se réduit à

$$B dx dy = 0$$

Les deux familles de lignes caractéristiques sont donc définies par :

- $dx = 0$ ou $x = C^{te}$
- $dy = 0$ ou $y = C^{te}$

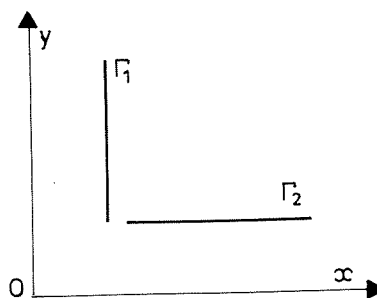


Fig. A 5.

ANNEXE B

Démontrons que les expressions (7.12) et (8.6) de $g(\omega)$ sont équivalentes.

$$g(\omega) = \frac{1}{\cos^2 \varphi} [\cos \omega - \sin \varphi \cos (2\psi + \omega)]$$

Or, des figures B.1 et B.2 on tire :

$$\bullet \psi = \theta - (\omega - i)$$

$$2\psi + \omega = 2\theta - \omega + 2i = \gamma + \alpha - \omega + 2i \\ = \gamma + i - \omega$$

$$\bullet \sin \gamma = \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} = - \frac{\sin i}{\sin \varphi}$$

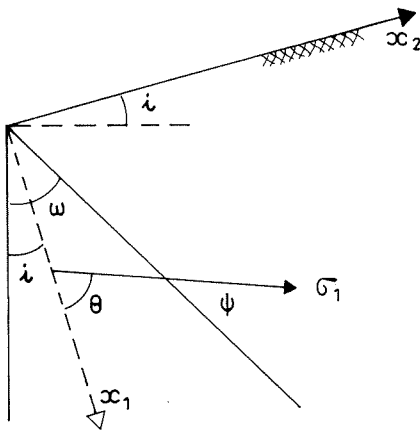


Fig. B 1.

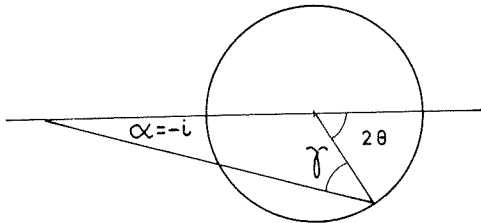


Fig. B 2.

Il en résulte :

$$\begin{aligned} g(\omega) &= \frac{1}{\cos^2 \varphi} [\cos \omega - \sin \varphi \cos (\gamma + i - \omega)] \\ &= \frac{1}{\cos^2 \varphi} \{ \cos \omega - \sin \varphi [\cos \gamma \cos (i - \omega) - \sin \gamma \sin (i - \omega)] \} \\ &= \frac{1}{\cos^2 \varphi} [\cos \omega - \sin \varphi \cos \gamma \cos (i - \omega) - \sin \gamma \sin (i - \omega)] \\ &= \frac{1}{\cos^2 \varphi} [\cos \omega - \sin \varphi \cos \gamma \cos (i - \omega) - \sin^2 i \cos \omega + \sin i \cos i \sin \omega] \\ &= \frac{1}{\cos^2 \varphi} [\cos^2 i \cos \omega - \sin \varphi \cos \gamma \cos (i - \omega) + \sin i \cos i \sin \omega] \\ &= \frac{1}{\cos^2 \varphi} [\cos i \cos (i - \omega) - \sin \varphi \cos \gamma \cos (i - \omega)] \\ &= \frac{\cos (i - \omega)}{\cos^2 \varphi} [\cos i - \sin \varphi \cos \gamma] \\ &= \frac{\cos (\omega - i)}{\cos i + \sin \varphi \cos \gamma} \end{aligned}$$

En effet :

$$\begin{aligned} &(\cos i + \sin \varphi \cos \gamma) (\cos i - \sin \varphi \cos \gamma) \\ &= \cos^2 i - \sin^2 \varphi \cos^2 \gamma \\ &= \cos^2 i - (1 - \sin^2 \gamma) \sin^2 \varphi \\ &= \cos^2 i - \sin^2 \varphi + \sin^2 i = \cos^2 \varphi \end{aligned}$$

ANNEXE C

Étudions la transformation suivante du coefficient k (équation 8.63)

$$\begin{aligned} k &= \frac{1 + \sin \varphi \cos 2\psi}{1 - \sin \varphi \cos 2\psi} = \frac{1 + \sin \varphi \cos (\alpha - \gamma)}{1 - \sin \varphi \cos (\alpha - \gamma)} \\ &= \frac{1 + \sin \varphi (\cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma)}{1 - \sin \varphi (\cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma)} \\ &= \frac{1 + \sin \varphi \cos \alpha \cos \gamma + \sin^2 \alpha}{1 - \sin \varphi \cos \alpha \cos \gamma - \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{1 + \sin \varphi \cos \alpha \cos \gamma + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin \varphi \cos \alpha \cos \gamma} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\cos \gamma &= \frac{k \cos^2 \alpha - 1 - \sin^2 \alpha}{(1+k) \sin \varphi \cos \alpha} \\ &= \frac{(1+k) \cos^2 \alpha - 2}{(1+k) \sin \varphi \cos \alpha}\end{aligned}$$

Or :

$$\sin \gamma = \frac{\sin \alpha}{\sin \varphi}$$

Éliminons γ entre ces deux relations. On a :

$$\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma = 1 = \left[\frac{(1+k) \cos^2 \alpha - 2}{(1+k) \sin \varphi \cos \alpha} \right]^2 + \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} \right)^2$$

On trouve successivement :

$$\begin{aligned}[(1+k) \sin \varphi \cos \alpha]^2 &= [(1+k) \cos^2 \alpha - 2]^2 + [(1+k) \sin \alpha \cos \alpha]^2 \\ (1+k)^2 [\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \varphi \cos^2 \alpha] - 4(1+k) \cos^2 \alpha + 4 &= 0 \\ (1+k)^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi - 4(1+k) \cos^2 \alpha + 4 &= 0 \\ (1+k)^2 - 4(1+k)(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) + 4(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) &= 0\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}1+k &= 2(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) \pm 2 \sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^2 - (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)} \\ &= 2(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) \pm \frac{2}{\cos \varphi} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \alpha}\end{aligned}$$

Où :

$$k = 1 + 2 \operatorname{tg}^2 \varphi \pm \frac{2}{\cos \varphi} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

ANNEXE D

Déformation du sol en équilibre limite

D.1. Problèmes plans

Les équations d'équilibre et le critère de Coulomb suffisent généralement pour déterminer le champ de contraintes et tracer les lignes caractéristiques dans un massif en état d'équilibre limite. Pour obtenir ensuite l'état des déformations, on a besoin des lois de comportement des sols en phase d'écoulement.

Les lois qui pourraient paraître convenir, *a priori*, consisteraient à admettre que :

- les déformations s'effectuent sans changement de volume

$$\frac{\Delta V}{V} = e_{11} + e_{22} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \quad (\text{D.1})$$

où u_1 et u_2 sont les composantes du vecteur de déplacement $\vec{u}$ en un point du massif ;

- les tenseurs de contraintes et de déformations ont les mêmes directions principales :

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_{11} - \sigma_{22}} = \frac{\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}}{\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}} \quad (\text{D.2})$$

ou

$$\left(-\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) \operatorname{tg} 2\theta + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0 \quad (\text{D.3})$$

Or, le tracé des lignes caractéristiques donne l'angle θ en tout point du massif (fig. D.1). Les conditions aux limites doivent donc nous permettre d'avoir normalement u_1 et u_2 par intégration numérique des deux équations (D.1) et (D.3). Celles-ci constituent, d'ailleurs, un système d'équations à dérivées partielles de type hyperbolique.

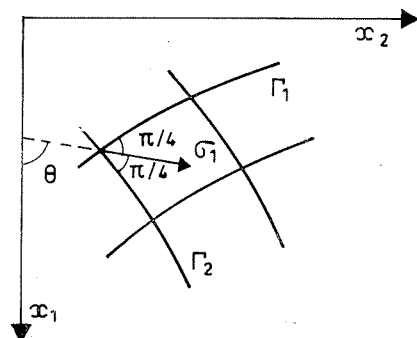


Fig. D 1.

D.11. Problème de Cauchy

Connaissant les déplacements $\vec{u}$ le long d'une courbe Γ , on se propose de déterminer les valeurs de u_i et de leurs dérivées partielles dans le voisinage de Γ (fig. D.2).

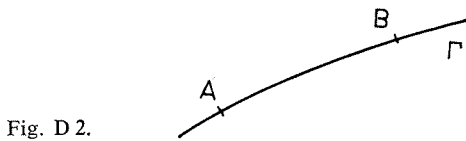


Fig. D.2.

Le long de Γ , on peut écrire :

$$\begin{aligned} du_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 \\ du_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 \end{aligned} \quad (D.4)$$

Le problème revient donc à déterminer les dérivées partielles $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ le long de Γ à partir des équations (D.1), (D.3) et (D.4). On trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= -\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{du_1 dx_1 + du_2 dx_2}{D} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} &= \frac{du_1 dx_2 + dx_1 du_2 - 2 du_1 dx_1 \operatorname{tg} 2\theta}{D} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} &= \frac{du_2 dx_1 + dx_2 du_1 - 2 du_2 dx_2 \operatorname{tg} 2\theta}{D} \end{aligned} \quad (D.5)$$

où :

$$D = \det. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ dx_1 & dx_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx_2 & dx_1 \\ -\operatorname{tg} 2\theta & 1 & \operatorname{tg} 2\theta & 1 \end{vmatrix} = (dx_2)^2 - (dx_1)^2 - 2 dx_1 dx_2 \operatorname{tg} 2\theta \quad (D.6)$$

Le problème n'est possible que si $D \neq 0$.

D.12. Lignes caractéristiques

La courbe Γ devient une ligne caractéristique si l'on a simultanément

$$D = 0 \quad (D.7)$$

$$du_1 dx_1 + du_2 dx_2 = 0 \quad (D.8)$$

Dans ce cas, tous les numérateurs et les dénominateurs dans les équations (D.5) sont simultanément nuls et la courbe Γ est bien une ligne caractéristique.

La condition (D.7) entraîne qu'en chaque point du massif, il y a deux lignes caractéristiques β_i définies par l'équation

$$D = \left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2 - 2 \left(\frac{dx_2}{dx_1}\right) \operatorname{tg} 2\theta - 1 = 0 \quad (D.9)$$

D'où :

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\sin 2\theta \pm 1}{\cos 2\theta} = \begin{cases} \operatorname{tg} \left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \\ \operatorname{tg} \left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases} \quad (D.10)$$

Donc les lignes caractéristiques β_i constituent deux familles de courbes orthogonales admettant les contraintes principales σ_i comme bissectrices (fig. D.3).

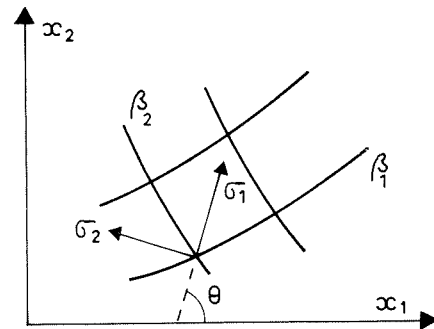


Fig. D.3.

Par conséquent, les lignes caractéristiques des contraintes et celles des déformations ne coïncident pas, sauf dans le cas d'un matériau purement cohérent ($C \neq 0$, $\varphi = 0$).

Ce résultat revient à dire que, dans le cas général d'un sol cohérent, l'hypothèse de faire coïncider les directions principales des tenseurs de contraintes et de déformations [équation (D.2)], conduit à une difficulté majeure sur le plan fondamental si le milieu n'est pas purement cohérent.

D.13. Analyse du champ des vitesses

Plaçons-nous dans le cas des sols purement cohérents ($\varphi = 0$). L'équation (D.8) s'écrit :

$$\vec{du} \cdot \vec{ds}_i = 0 \quad (D.11)$$

où $\vec{ds}_i$ est un élément de la ligne caractéristique β_i .

La relation (D.11) exprime que $\vec{du}$ est normale à la ligne caractéristique β_i . Soit AB un élément de β_i . Si, après déformation, A vient en A' et B en B' , on a (fig. D.4) :

$$\left. \begin{aligned} \vec{u} &= \overrightarrow{AA'} & A'B'' &\parallel AB \\ \vec{du} &= \overrightarrow{B''B'} & A'B'' &\perp B''B' \end{aligned} \right\} \quad (D.12)$$

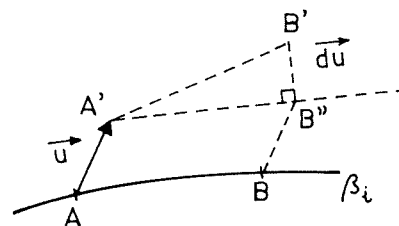


Fig. D.4.

Il en résulte qu'un élément AB situé sur une ligne caractéristique ne subit pas une variation de longueur au cours de l'écoulement du massif (AB $\neq$ A'B').

Considérons un rectangle ABCD dont les côtés se confondent avec les lignes caractéristiques β_1 et β_2 (fig. D.5). Après déformation, il subit une distorsion γ et se transforme en A'B'C'D'. On a, bien entendu :

$$2 e_{12} = \gamma = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \quad (\text{D.13})$$

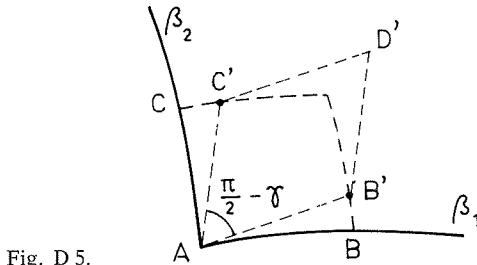


Fig. D.5.

La variation de volume qui en résulte est :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V}{V} &= \frac{AB \cdot AC - AB' \cdot AC' \cos \gamma}{AB \cdot AC} = \\ &= (1 - \cos \gamma) = \frac{1}{2} \gamma^2 \quad (\text{D.14}) \end{aligned}$$

Donc, à un infiniment près de second ordre, on peut dire que la déformation du massif s'effectue sans changement de volume. Ce résultat est conforme à notre hypothèse de base [équation (D.1)]. De même, un élément de longueur AE faisant l'angle ω avec β_1 subit une variation relative de longueur de valeur (fig. D.6).

$$e = \frac{A'E' - AE}{AE} = \gamma \sin \omega \cos \omega \quad (\text{D.15})$$

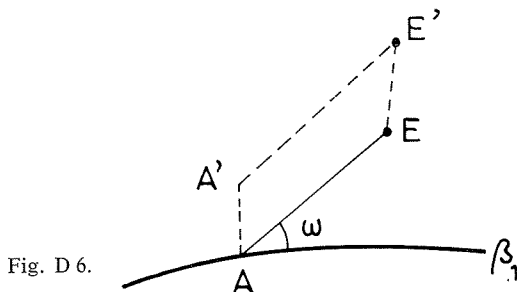


Fig. D.6.

D.14. Equations de Geiringer

En regardant la vitesse d'écoulement $\vec{v}$, l'équation (D.11) permet d'écrire :

$$\vec{dv} \cdot \vec{ds}_i = 0 \quad (\text{D.16})$$

En un point A du massif désignons par v_1 et v_2 les composantes de la vitesse suivant les lignes caractéristiques β_1 et β_2 . On peut écrire :

$$\left. \begin{aligned} \vec{v} &= v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 \\ \vec{ds}_i &= \vec{e}_i ds \end{aligned} \right\} \quad (\text{D.18})$$

où $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ constituent une base mobile orthonormée (fig. D.7).

On a :

$$d\vec{v} = v_1 d\vec{e}_1 + \vec{e}_1 dv_1 + v_2 d\vec{e}_2 + \vec{e}_2 dv_2$$

L'équation (D.16) donne alors suivant la ligne β_1 :

$$\vec{e}_1 d\vec{v} = dv_1 - v_2 d\theta \quad (\text{D.19})$$

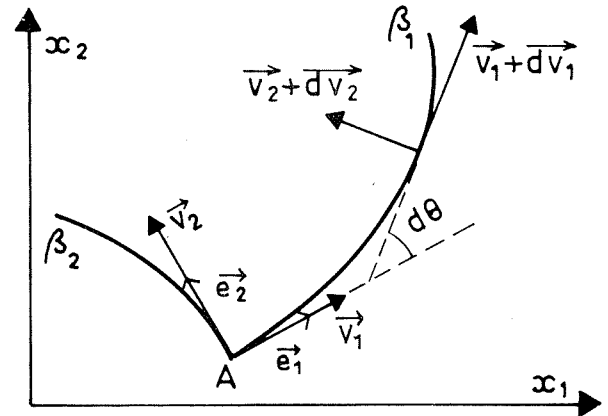


Fig. D.7.

Suivant la ligne β_2 , on trouve également :

$$\vec{e}_2 d\vec{v} = dv_2 + v_1 d\theta = 0 \quad (\text{D.20})$$

Les relations (D.18) et (D.19) sont les équations de Geiringer.

D.141. Cas particuliers

Si dans le massif règne un équilibre homogène, les lignes caractéristiques sont alors constituées par des droites et l'on a $\theta = c^{te}$.

Si le système de référence (x_1, x_2) est pris parallèlement aux lignes caractéristiques β_1 et β_2 , les équations (D.19) et (D.20) montrent alors que la solution générale est de la forme (fig. D.8) :

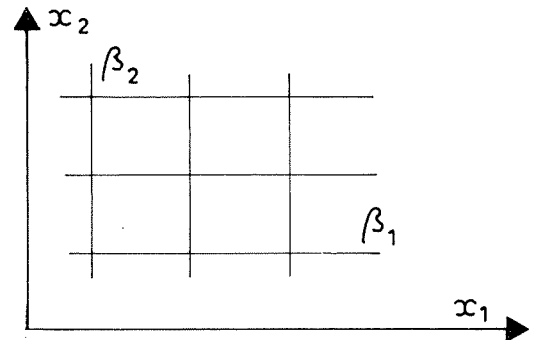


Fig. D.8.

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= v_1(x_2) \\ v_2 &= v_2(x_1) \end{aligned} \right\} \quad (\text{D.21})$$

où $v_1(x_2)$ et $v_2(x_1)$ sont des fonctions quelconques.

Dans le cas où v_1 et v_2 sont constantes, la zone en équilibre limite se déplace comme un solide.

S'il s'agit d'un équilibre en éventail de Prandtl, en utilisant les coordonnées polaires (r, ω) , on a (fig. D.9) :

$$\left. \begin{aligned} \text{Sur une ligne caractéristique } \beta_1 \text{ constituée par une droite :} \\ d\omega = d\theta = 0 \quad \theta = \omega + \frac{4}{\pi} \end{aligned} \right\} \quad (\text{D.23})$$

$$dv_1 = 0 \quad v_1 = v_1(\omega) = f'(\omega) \quad (\text{D.22})$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Sur une ligne caractéristique } \beta_2, \text{ qui est un arc de cercle, on trouve :} \\ v_2 = -f(\omega) + g(r) \end{aligned} \right\} \quad (\text{D.24})$$

Dans le cas où $f(\omega) = 0$, l'écoulement suivant une ligne caractéristique β_2 consiste en un mouvement de rotation autour du centre O.

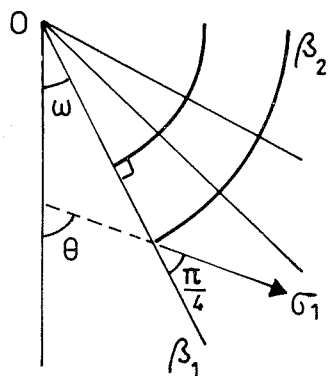


Fig. D 9.

D.142. *Ecoulement sous une fondation rigide lisse*

La fondation AB est soumise à une charge uniforme et poinçonne le sol avec une vitesse V . On se propose d'examiner les deux schémas d'écoulement suivants qui acceptent, d'ailleurs, la même charge limite :

$$g = (2 + \pi) c \quad (D.25)$$

Schéma de Prandtl

Le sol sous la fondation comporte trois zones d'équilibre (fig. D.10).

La zone ABC (fig. D.11) est en équilibre homogène. Elle suit la fondation dans son mouvement vertical avec la vitesse V . Ses composantes suivant β_1 et β_2 sont :

$$v_1 = v_2 = V \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (D.26)$$

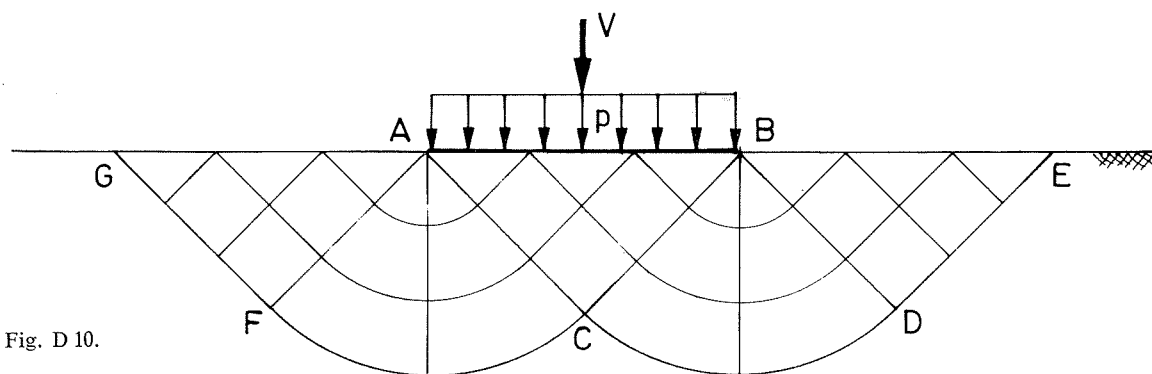


Fig. D 10.

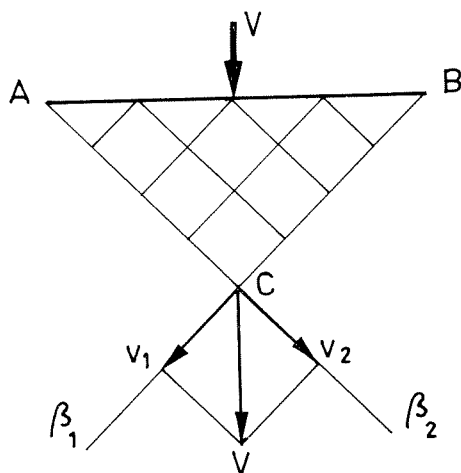


Fig. D 11.

Le mouvement dans l'éventail BCD est défini par (fig. D.12) :

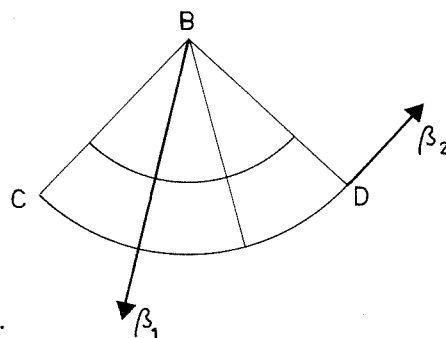


Fig. D 12.

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= f'(\omega) = 0 \\ v_2 &= V \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \quad (D.27)$$

La zone BDE (fig. D.10) est en équilibre homogène. Elle est refoulée vers le haut comme un corps solide et glisse suivant DE avec une vitesse de composantes

$$v_1 = 0 \quad v_2 = V \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On constate que le champ de vitesse subit, suivant BC notamment, une discontinuité.

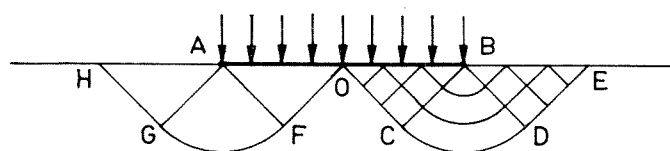
Schéma de Hill

Fig. D 13.

La zone OBC (fig. D.13) est en équilibre homogène et l'on a :

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= 0 \\ v_2 &= V \sqrt{2} \end{aligned} \right\} \quad (D.28)$$

L'éventail BCD subit un mouvement caractérisé par :

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= 0 \\ v_2 &= V \sqrt{2} \end{aligned} \right\} \quad (D.29)$$

Enfin, la zone BDE glisse suivant DE avec la vitesse :

$$v_2 = V \sqrt{2}$$

Comme on peut le remarquer, l'avantage du schéma de Hill est que le champ de vitesses ne comporte pas de discontinuités à l'intérieur des régions OCDE et OFGH.

D.15. Remarques

- 1) Si l'on suppose que la déformation du massif s'effectue avec un changement de volume dépendant du tenseur de contraintes ($\underline{\sigma}$), l'équation (D.1) s'écrit alors :

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = f(\underline{\sigma}) \quad (D.30)$$

On peut vérifier que les lignes caractéristiques ne sont pas modifiées. Par contre, la relation (D.11) ainsi que les équations de Geiringer ne sont plus valables.

- 2) Afin de faire coïncider les lignes caractéristiques pour les contraintes avec celles des vitesses et éviter la difficulté évoquée au paragraphe D.1.2, certains auteurs proposent des approches qui font abstraction de la nécessité de faire coïncider les directions principales des tenseurs de contraintes et de déformations.
- 3) Si l'on se trouve en présence de différentes solutions statiquement admissibles, le choix de la

solution nécessite alors l'examen du champ de déformations.

Ajoutons que si l'on a une solution avec une ligne de discontinuité pour les contraintes et une autre qui n'en comporte pas, il y a lieu de retenir, *a priori*, la seconde.

D.2. Problèmes tridimensionnels

Dans le cas d'un problème plan, les deux équations d'équilibre et le critère de Coulomb permettent normalement de déterminer les contraintes σ_{11} , σ_{22} et σ_{12} .

Pour un problème axisymétrique, les deux équations d'équilibre et le critère de Coulomb ne suffisent plus pour avoir les quatre composantes de contraintes σ_r , σ_θ , σ_z , σ_{rz} . Parfois, on introduit une hypothèse complémentaire due à Haar-Karman qui consiste à prendre σ_θ égale à σ_r ou à σ_z . Le traitement du problème devient alors possible.

Pour un problème tridimensionnel, les trois équations d'équilibre et le critère de Coulomb sont insuffisants pour déterminer les six composantes du tenseur de contraintes σ_{ij} . La connaissance des lois de comportement des sols en état d'équilibre limite est indispensable pour avoir les relations complémentaires utiles pour le traitement du problème. Bien qu'un grand nombre de travaux en laboratoire aient été réalisés au cours des dernières années, nous ne disposons pas encore de résultats suffisants pour pouvoir traiter les problèmes tridimensionnels.

Bibliographie

- [1] ABSI. — « Equilibre limite des massifs ». *Annales de l'ITBTP*, série SF/38, septembre 1962.
- [2] ABSI. — « Milieux purement cohérents ». *Annales de l'ITBTP*, série EM/121, janvier 1970.
- [3] ABSI. — « Superposition de différentes solutions d'équilibre limite ; fondations sur un talus ». *Annales de l'ITBTP*, série TMC/125, septembre 1970.
- [4] ABSI. — « Fondations au voisinage d'un talus ». *Annales de l'ITBTP*, série TMC/146, janvier 1972.
- [5] ABSI. — « Manuel pratique de mécanique des sols et des fondations ». *Annales de l'ITBTP*, série SF/165, juin 1979.
- [6] ABSI et L'HERMINIER. — « Equilibre limite d'un coin dans un milieu non pesant ». *Cahiers de la Recherche*, n° 16, Eyrolles, 1962.
- [7] ABSI et L'HERMINIER. — « Tables numériques de butée en milieu pulvérulent non pesant ». *Cahiers de la Recherche*, n° 28, Eyrolles.
- [8] ABSI et L'HERMINIER. — « Quelques réflexions sur le critère d'équilibre limite en mécanique des sols ». *Annales de l'ITBTP*, série SF/99, novembre 1973.
- [9] ABSI et PIERROT. — « Etude des fondations superficielles ». Rapport interne de Recherche, 1982.
- [10] CAQUOT et KERISEL. — « Traité de mécanique des sols ». Gauthier-Villars, 1966.
- [11] CAQUOT, KERISEL et ABSI. — « Tables de butée et de poussée ». Gauthier-Villars, 1973.
- [12] HEURTAUX. — « Calcul des contraintes en poussée ». Thèse de 3^e cycle à l'Université de Grenoble en 1960.
- [13] HILL. — « The Mathematical theory of plasticity ». Oxford, 1950.
- [14] KATCHANOV. — « Eléments de la théorie de la plasticité ». Editions MIR, 1975.
- [15] KRAVTCHENKO. — Cours de mécanique des sols à l'Université de Grenoble.
- [16] MANDEL. — « Equilibre par tranches planes des solides à la limite d'écoulement ». Gap, 1942.
- [17] PRAGER et HODGE. — « Theory of perfectly plastic solids ». Dover Pub., 1968.
- [18] RAVIZE. — « Poussée des terres ». Dunod, 1945.
- [19] SALENÇON. — « Théorie de la plasticité pour les applications à la mécanique des sols ». Eyrolles, 1974.
- [20] SOKOLOVSKI. — « Statics of granular media ». Pergamon Press, 1965.

THEORY OF PLASTICITY AND LIMIT EQUILIBRIUM IN SOIL MECHANICS

Design methods in soil mechanics and structural analysis have developed differently because of the nature of the problems to solve and the available design tools.

Since Coulomb, two centuries back, the study of the stability of earth structures has been based on limit state analysis. For general structures, the calculation was undertaken only in the service phase and linear elastic behaviour of the materials used was assumed.

With the new possibilities offered by data processing and an improved knowledge of the rheology of materials, the present tendency is to consider these two approaches as complementary and to proceed simultaneously, whatever the nature of the engineering structure, with an analysis in service and at limit state. It is indeed essential to know the behaviour of the structure in service as well as the safety interval which can be counted upon.

This article reviews the application of the theory of plasticity to various problems of limit equilibrium in soil mechanics and updates different contributions which the author has already published on this question.

DIE PLASTIZITÄTSTHEORIE UND DAS GLEICHGEWICHT IM GRENZZUSTAND IN DER BODENMECHANIK

Die Dimensionierungsmethoden in der Bodenmechanik und der Statik haben sich infolge der Art der zu lösenden Probleme und der zur Verfügung stehenden Rechenmöglichkeiten unterschiedlich entwickelt.

Seit Coulomb, d.h. seit 200 Jahren, basierte die Stabilitätsuntersuchung für Böden auf einer Analyse des Grenzzustands der Tragfähigkeit. Für Bauwerke wurde dagegen nur der Gebrauchszustand untersucht und ein linear-elastisches Verhalten der verwendeten Materialien unterstellt.

Aufgrund der durch die Informatik gebotenen neuartigen Möglichkeiten und einer besseren Kenntnis der Rheologie der Materialien, geht die gegenwärtige Tendenz dahin, die beiden Vorgehensweisen als komplementär anzusehen. Man will gleichzeitig, unabhängig von der Art des Bauvorhabens, sowohl den Gebrauchszustand als auch den Grenzzustand der Tragfähigkeit betrachten. In der Tat ist es unerlässlich, sowohl das Betriebsverhalten als auch den Sicherheitsabstand zu kennen, auf den man sich verlassen kann.

Die hier vorgestellte Studie ermittelt den Anwendungsstand der Plastizitätstheorie auf eine Reihe von Fragestellungen zum Gleichgewicht im Grenzzustand in der Bodenmechanik und setzt verschiedene Veröffentlichungen fort, die der Autor zu dieser Frage publiziert hat.

LA TEORIA DE LA PLASTICIDAD Y EL EQUILIBRIO SUS LIMITES EN MECANICA DE SUELOS

Los métodos aplicables en cuanto al cálculo dimensional en Mecánica de Suelos y para el análisis de las estructuras han evolucionado de forma distinta debido a la propia naturaleza de los problemas que se trata de resolver y de los medios de cálculo existentes.

Desde Coulomb — hace dos siglos — el estudio de la estabilidad de las obras de tierra se venía fundando en un análisis del estado límite. Para las estructuras, el cálculo se efectuaba únicamente en fase de servicio y se suponía un cálculo elástico lineal de los materiales utilizados.

Con las nuevas posibilidades brindadas por la informática, así como un mejor conocimiento de la reología de los materiales, la tendencia actual consiste en considerar estos dos enfoques como complementarios y proceder simultáneamente, sea cual la naturaleza de la estructura, a un análisis en fase de servicio y en el estado último. Effectivamente, parece indispensable conocer el comportamiento de la estructura en curso de utilización, así como el intervalo de seguridad con que se puede contar.

El presente estudio indica el estado de la situación actual respecto a la aplicación de la Teoría de la plasticidad a diversos problemas de equilibrio límite en Mecánica de Suelos y menciona diversas publicaciones que el autor ha presentado y a respecto a este problema.

Les thèses et la méthode d'exposition adoptées par les auteurs peuvent parfois heurter certains points de vue habituellement admis. Mais il doit être compris que ces thèses, à l'égard desquelles l'Institut Technique ne saurait prendre parti, ne visent en rien les personnes ni le principe des Institutions.

© 1984 by LE BATIMENT (S.A.R.L.)